動的切削過程の特性値による工具摩耗の検出*

(第1報, 摩耗検出のための特性値の検討)

近 藤 英 二^{*1}, 皮 籠 石 紀 雄^{*1}大 隈 博 輝^{*2}, 川 合 忠 雄^{*3}Detection of Tool Wear Using Characteristic Values
of Dynamic Cutting Process

(1st Report, Study of Characteristic Values to Detect Flank Wear)

Eiji KONDO, Norio KAWAGOISHI,
Hiroaki OKUMA and Tadao KAWAI

The purpose of this study is to propose new characteristic values of dynamic cutting process to detect tool flank wear during steady cutting in turning. The characteristic values of dynamic cutting process are evaluated by in-process measurement of dynamic cutting force and vibration of a workpiece. In proposed approach, the standard deviation of dynamic cutting force normalized by the standard deviation of undeformed chip thickness and the cross-correlation coefficient between dynamic cutting force and undeformed chip thickness are investigated as characteristic values of dynamic cutting process to detect flank wear. Furthermore, relation between dynamic cutting force and workpiece vibration in thrust force direction is also investigated by the same way as the relation between dynamic cutting force and undeformed chip thickness. Experiments were carried out on a lathe in orthogonal cutting with a cutting-off tool and a disk workpiece made by a brass plate. As a result of the experiments and considerations, the following characteristic values linearly change with increase of flank wear due to nonlinearity of dynamic cutting process caused by flank wear. (i) The standard deviation of dynamic thrust force normalized by the standard deviation of undeformed chip thickness increases. (ii) The cross-correlation coefficient between dynamic thrust force and undeformed chip thickness decreases. (iii) The standard deviation of dynamic thrust force normalized by the standard deviation of workpiece vibration in thrust force direction increases.

Key Words: Turning, Tool Wear, Measurement, Cutting, Detection, Dynamic Cutting Process, Characteristic Value

1. ま え が き

切削工具の摩耗を検出するには、非切削の間に工具摩耗量を直接測定する直接的な方法、摩耗と関係をもつ切削系のほかの物理量を測定する間接的な方法に大別される⁽¹⁾⁻⁽³⁾。間接的な方法は摩耗の検出に必要な物理量の加工中の測定が比較的容易なため、加工能率の低下が少なく、適応制御への応用も期待できる。また、間接的な摩耗の検出方法で用いられる切削抵抗、温度、振動・音響といった物理量は加工状態に関する数多くの有用な情報を含んでいると推定され⁽⁴⁾⁻⁽⁷⁾、工具の摩耗だけでなく、総合的な切削状態の認識への利用が期待できる。特に切削抵抗の動的成分や工作機械（被削材と切削工具を含む）の振動は、切削工具の摩耗によって変化することが指摘され、この変化を利用した摩耗の検出方法が数多く提案されている⁽⁸⁾⁻⁽¹³⁾。しかし、切削抵抗の動的成分の発生や工作機械の振動状態の変化の機構が明確でないため、汎用性という点で十

分でない。また、切削抵抗の動的成分や振動と関連する方法として、切削加工中の動的切削過程の特性から切削工具の逃げ面の摩耗を推定する方法も提案されている⁽¹⁴⁾⁻⁽¹⁷⁾。これらの方法では、逃げ面の摩耗の増加に伴って動的切削過程での速度成分（減衰力）が増大することを利用しており⁽¹⁵⁾⁻⁽¹⁷⁾、その機構が比較的はつきりしているため、汎用性の高い検出方法として期待できるが、動的切削過程の速度成分を求めるために外力によって切削工具を加振させ、摩耗部と切削仕上げ面とを強制的に干渉させる必要がある。また、これらの方法では動的切削過程は線形であると仮定しているが、実際には逃げ面の摩耗部と仕上げ面の干渉によって生じる切削抵抗の動的成分は、切取り厚さの大きさやその変化率（速度成分）には比例しない、非線形な特性を持っていると推定される⁽¹⁸⁾。

そこで、本研究は旋盤加工における切削中の工具の逃げ面の摩耗を簡便な方法で検出することを目的とし、定常な切削中の被削材系の振動と切削抵抗の動的成分から得られる、動的切削過程の非線形性を表す特性値と切削工具の逃げ面の摩耗との関係を調べ、この特性値による工具逃げ面摩耗の検出の可能性について基礎的な検討を行った。

* 原稿受付 1998年3月30日。

^{*1} 正員, 鹿児島大学工学部 (☎ 890-0065 鹿児島市郡元1-21-40)。^{*2} 鹿児島大学大学院。^{*3} 正員, 名古屋大学工学部 (☎ 464-0814 名古屋市千種区不老町)。

E-mail: kondo@mech.kagoshima-u.ac.jp

2. 実験装置と実験方法

本研究では、旋盤加工における定常な切削中の動的切削過程の特性値を、図1に示すような(株)オークマ製のLS 450×800型旋盤により、直径約160 mmの円盤状の被削材(黄銅板)の外周を突切りバイトで二次元切削するときの切削中の被削材の背分力(x 軸)方向の振動変位と切削抵抗の動的成分から求めた。表1は実験条件である。実験には逃げ面が摩耗していない切削工具1本と、あらかじめ逃げ面に摩耗帯を設けた切削工具3本の合計4本を使い、切削工具ごとに何種類かの切削幅(板厚) b で被削材を切削し、背分力 F_x 、主分力 F_y と被削材の変位 x を同時に測定した。非接触変位センサ①と切削動力計②とで検出した電気信号はバンドパスフィルターを通し、旋盤主軸に取付けられたロータリーエンコーダの発生するパルス(2000 P/rev)に同期させてA/D変換器により8000個(旋盤主軸の

4回転分)のデジタル値に変換した。本研究で用いた実験装置の切削工具系の剛性は十分に高く、切削工具系の振動(工具系の固有振動数は数kHz以上)は無視できる程度に小さい。よって、ここでは被削材系の微小振動(被削材系の固有振動数は約250 Hz)とそれに伴う切削抵抗の動的成分との関係を調べるため、バンドパスフィルターの周波数帯域は100 Hz - 1000 Hzとした。

それぞれの切削実験で得られた切削抵抗 F_x, F_y と被削材の振動変位 x の8000組のデータは被削材の一回転分である2000組ごとに4分割し、2回転目から4回転目までの一回転分ごとのデータから標準偏差、スペクトル、相関係数、相互相関関数を求め、得られた3回転分の結果を平均した。ここで、1回転目のデータ(振動変位 x)は、2回転目の切取り厚さの変動成分を求めるために用いた。

3. 実験結果

3.1 切削抵抗の動的成分と切取り厚さの変動成分

切刃が鋭利な切削工具による二次元切削では、背分力の動的成分 ΔF_x と主分力の動的成分 ΔF_y は、近似的に切取り厚さの変動成分 Δd に比例する⁽¹⁹⁾。

$$\Delta F_x = b p_{sx} \Delta d, \Delta F_y = b p_{sy} \Delta d \quad (1)$$

ここで、 b は切削幅、 p_{sx} と p_{sy} はそれぞれ背分力と主分力の比切削抵抗である。

3.1.1 標準偏差 ここでは、切削抵抗の動的成分の標準偏差と切削工具の逃げ面の摩耗幅との関係を調べる。

図2は切削実験で得られた背分力 F_x の動的成分 ΔF_x の標準偏差 σ_{Fx} で、表1に示した切削工具の摩耗幅 V_B をパラメータとし、切削幅 b に対して示してある。得られた σ_{Fx} は摩耗幅 V_B 、切削幅 b に対してそれぞれ増加する傾向はあるが、ばらつきが大きく、摩耗幅 V_B の

Workpiece	Material	Brass (JIS C2801P)
	Width of cut b mm	1.00 ~ 4.75
Tool	Type	Brazed tool (Igetalloy 43-4)
	Material	Sintered carbide (H2)
	Rake angle α_0 deg.	6
	Clearance angle γ_0 deg.	6
	Width of tool flank wear V_B mm	0, 0.22, 0.27, 0.45
Cutting speed	V_0 m/min	100
Feed rate of depth setting motion	d_0 mm/rev	0.145

Fig.1 Experimental apparatus

Fig.2 Standard deviation of dynamic thrust force

大きさに対する標準偏差 σ_{Fx} の大きさの違いは明確でない。

図3は切取り厚さの変動成分 Δd の標準偏差 σ_d である。切削工具は剛体で被削材のみが振動すると仮定すれば、切取り厚さの変動成分 Δd は被削材の振動変位 x の関数で表される⁽¹⁹⁾。

$$\Delta d = x(t-T) - x(t) \quad (2)$$

よって、ここでは式(2)により切取り厚さの変動成分 Δd が得られると仮定して σ_d を求めた。実際の計算で用いた $\Delta d(i)$ は、一回転前の被削材の振動変位を $x(i-2000)$ として、式(3)により計算した。

$$\Delta d(i) = x(i-2000) - x(i) \quad (3)$$

得られた σ_d は工具逃げ面に摩耗がないときに最も大きく、摩耗がある場合は半分程度に減少しており、図2で示した背分力の動的成分 σ_{Fx} とは逆の傾向になっている。しかし、それぞれの摩耗幅 V_B ごとの背分力の動的成分の大きさ σ_{Fx} は、切取り厚さの変動成分の大きさ σ_d にほぼ比例している。これは、摩耗の有無によらず、統計的には切削抵抗の動的成分の大きさが切取り厚さの変動成分の大きさにほぼ比例しているためと推定される。図4は背分力の動的成分の標準偏差 σ_{Fx} を切取り厚さの変動成分の標準偏差 σ_d で規準化した(割った)値 σ_{Fx}/σ_d で、得られた σ_{Fx}/σ_d は、図2で示した σ_{Fx} よりも摩耗幅 V_B ごとのデータのばらつきは小さくなっている。

表2に規準化した背分力の動的成分の標準偏差 σ_{Fx}/σ_d を式(4)の y 、つまり従属変数とし、摩耗幅 V_B と切削幅 b を独立変数として求めた重回帰分析の結果が、重相関係数は R_{cor} 、摩耗幅 V_B の回帰係数は k_{VB} 、切削幅 b の回帰係数は k_b で示してある⁽²⁰⁾。

$$y = k_{VB} V_B + k_b b + y_0 \quad (4)$$

また、比較のため、表2には規準化した主分力の動的成分の標準偏差 σ_{Fy}/σ_d 、切削抵抗の動的成分の標準偏差

σ_{Fx} , σ_{Fy} 、切取り厚さの変動成分の標準偏差 σ_d を従属変数 y とした場合の結果もそれぞれ示してある。得られた σ_{Fx}/σ_d の重相関係数 R_{cor} の値は 0.91 で、 σ_{Fx} の重相関係数の値 0.87 よりもやや大きくなっている。一方、 σ_{Fx} の回帰係数 k_{VB} は 0.69 で、 $k_b (=0.27)$ の約3倍であるのに対し、 σ_{Fx}/σ_d の回帰係数 k_{VB} は 7.5 で、 $k_b (=0.36)$ の約20倍であり、工具逃げ面の摩耗幅 V_B に対する感度は σ_{Fx} よりも高い。これは、図2の σ_{Fx} の摩耗幅ごとのデータのばらつきが、図4で示したように σ_d で規準化したことにより小さくなったことと対応している。また、図4で示した線分は、表2に示した k_{VB} と k_b の値を使い、式(4)で求めたそれぞれの摩耗幅 V_B に対する σ_{Fx}/σ_d の計算値である。得られた計算値は切削幅 b に対してやや増加しているが、その増加率は小さく、図4の σ_{Fx}/σ_d の増加が主として摩耗幅 V_B の増加によるものであることを示している。

ここでは、規準化した背分力の動的成分の標準偏差 σ_{Fx}/σ_d が、摩耗幅 V_B の増加に伴って増大する理由について考察する。

図5は切取り厚さの変動成分 Δd と背分力の動的成分 ΔF_x を周波数分析した結果で、図5の(a)~(c)のそれぞれの図の上段には切取り厚さの変動成分のスペクトル $|\Delta d(\beta)|$ 、中段には背分力の動的成分のスペクトル $|\Delta F_x(\beta)|$ が示してある。また、背分力の動的成分に対する切取り厚さの変動成分の影響を見るため、下段には

Table 2 Correlation and regression coefficient

y	R_{cor}	k_{VB}	k_b	y_0
σ_{Fx}	0.87	0.69	0.27	0.13
σ_{Fy}	0.63	0.05	0.38	0.83
σ_d	0.62	-0.56	0.03	0.36
σ_{Fx}/σ_d	0.91	7.5	0.36	0.88
σ_{Fy}/σ_d	0.72	9	0.52	3

Fig.3 Standard deviation of undeformed chip thickness

Fig.4 Normalized standard deviation of dynamic thrust force

中段の $|\Delta F_x(\beta)|$ を上段の $|\Delta d(\beta)|$ で割った値 $|\Delta F_x(\beta)/\Delta d(\beta)|$ が示してある. 図 5(a) の切削工具の逃げ面に摩耗がない場合 ($V_B = 0.0$ mm, $b = 1.5$ mm) の $|\Delta d(\beta)|$ は, 被削材系の固有振動数に近い約 250 Hz でスペクトルのピークがあり, $|\Delta F_x(\beta)|$ にも同じ振動数でスペクトルのピークがあるが, $|\Delta F_x(\beta)/\Delta d(\beta)|$ に大きなピークは

Fig.5 Spectrum of dynamic component

ない. これは, 背分力の動的成分 ΔF_x は切り厚の変動成分 Δd にほぼ比例しているため, 結果としてスペクトルのピークは見られなくなったと推定される. 切削工具が摩耗した図 5(b) の場合 ($V_B = 0.22$ mm, $b = 3.0$ mm), $|\Delta d(\beta)|$ のスペクトルには大きなピークは見られないが, $|\Delta F_x(\beta)|$ のスペクトルには被削材系の固有振動数の約 2 倍の約 450 Hz のところにピークが生じており, $|\Delta F_x(\beta)/\Delta d(\beta)|$ にもこの振動数でピークがある. また, さらに摩耗幅が大きい図 5(c) の場合 ($V_B = 0.45$ mm, $b = 3.0$ mm), $|\Delta F_x(\beta)|$ の約 450 Hz でのスペクトルのピークは図 5(b) のピークよりも大きくなり, さらにピークが 2箇所 (約 570 Hz, 約 720 Hz) 増えて 3箇所になっており, $|\Delta F_x(\beta)/\Delta d(\beta)|$ もピークが増えている. これは, 工具の逃げ面の摩耗部と仕上げ面とが干渉して非線形な動的切削力が発生し, 被削材系の振動が抑制されたためと推定される.

3・1・2 相関係数 図 5 で示したように, 切り厚の変動成分と背分力の動的成分との関係は, 切削工具の逃げ面の摩耗の増加に伴って変化する. そこで, ここでは切削抵抗の動的成分と切り厚の変動成分との相関係数を求め, 相関係数の大きさと逃げ面の摩耗との関係について調べる.

図 6 は背分力の動的成分 ΔF_x と切り厚の変動成分 Δd との相関係数 ρ_{d^*Fx} で, 図 2 と同じように, 摩耗幅 V_B をパラメータとし, 切削幅 b に対して示してある. 得られた, それぞれの摩耗幅 V_B ごとの ρ_{d^*Fx} の値は, 切削幅 b に対してあまり変化していない. 表 3 には, 相関係数 ρ_{d^*Fx} を従属変数とし, 表 2 と同様にして求めた重回帰分析の結果が示してある. 得られた ρ_{d^*Fx} の重回帰係数 R_{cor} は 0.84 で, σ_{Fx}/σ_d の重回帰係数の値 0.91 よりもやや小さいが, 回帰係数 k_{VB} の絶対値 (= 0.66) は k_b の絶対値 (= 0.02) の約 30 倍で, σ_{Fx}/σ_d の場合

Fig.6 Correlation coefficient between undeformed chip thickness and dynamic thrust force

よりも大きい。また、図6の線分は表3の値を使って式(4)により求めた $\rho_{d^*F_x}$ の計算値で、切削幅 b に比べ、摩耗幅 V_B に対する変化が非常に大きいことが確認できる。一方、主分力の動的成分 ΔF_y と切取り厚さの変動成分 Δd との相関係数 $\rho_{d^*F_y}$ の重相関係数は0.91で、 $\rho_{d^*F_x}$ の重相関係数(=0.84)よりも大きい。回帰係数 k_{VB} の絶対値(=0.20)は k_b の値(=0.19)とほぼ等しく、 $\rho_{d^*F_x}$ の場合よりも摩耗幅 V_B の影響がかなり大きい。

図7は背分力の動的成分 ΔF_x と切取り厚さの変動成分 Δd との相互相関関数 $R_{d^*F_x}$ で⁽²¹⁾、図の横軸は時間 t である。ここで、図7の $R_{d^*F_x}$ の値は、 $t = 0$ msで図6に示した相関係数の値と同じになるように正規化してある(最大値は1)。図7(a)の切削工具に摩耗がない場合($V_B = 0.0$ mm, $b = 1.5$ mm), $R_{d^*F_x}$ は $t = 0$ msのとき最大で、 t が増加、あるいは減少するのに伴って周期的に増減を繰り返しながら徐々に振幅が減少しており、 ΔF_x と Δd の相関関係は比較的強い。切削工具が摩耗した図7(b)の場合($V_B = 0.22$ mm, $b = 3.0$ mm), $t = 0$ ms近傍では、 t の増減に対する $R_{d^*F_x}$ の変化は図7(a)とほぼ同じ傾向になっているが、 t の絶対値が約20 ms以上では周期性が見られなくなっており、図7(a)の逃げ面に摩耗がない場合と比較し、 ΔF_x と Δd との相関関係は弱くなっている。また、図7(c)に示すように、さらに逃げ面の摩耗幅が大きくなると($V_B = 0.45$ mm, b

Table 3 Correlation and regression coefficient

y	R_{cor}	k_{VB}	k_b	y_0
$\rho_{d^*F_x}$	0.84	-0.66	-0.02	0.39
$\rho_{d^*F_y}$	0.91	-0.2	-0.19	0.98

Fig. 7 Correlation function between undeformed chip thickness and dynamic thrust force

= 3.0 mm), ΔF_x と Δd との相関関係はほとんどなくなっている。

3.2 切削抵抗の動的成分と被削材の振動変位

3.1節では切削力の動的成分と切取り厚さの変動成分との関係を調べた。しかし、切取り厚さの変動成分を求めるには、被削材の一定の回転角ごとの切削抵抗の動的成分と被削材の振動変位を測定する必要があるため、ここではより測定が簡単な、一定の時間間隔ごとの振動変位と切削抵抗の動的成分との関係について検討する。ただし、ここでは切取り厚さの変動成分を用いた場合との比較のため、被削材の回転速度を一定と仮定し、3.1節で用いた被削材の一定の回転角ごとの切削抵抗の動的成分と振動変位のデータを一定の時間間隔ごとのデータとして用いることにする。

図8は被削材の振動変位 x の標準偏差 σ_x で、図3で示した切取り厚さの変動成分の標準偏差 σ_d とほぼ同じ傾向を示している。これは、式(2)で示したように、切取り厚さの変動成分 Δd は被削材の振動変位 x の関数であり、定常な切削状態では Δd の振幅と x の振幅とが、統計的にほぼ比例しているためと推定される。

図9は、図2で示した背分力の動的成分の標準偏差 σ_{F_x} を図8で示した被削材の振動変位の標準偏差 σ_x で規

Fig. 8 Standard deviation of workpiece vibration

Fig. 9 Normalized standard deviation of dynamic thrust force

Table 4 Correlation and regression coefficient

y	R_{cor}	k_{VB}	k_b	y_0
σ_x	0.56	-0.34	0.02	0.27
σ_{F_x}/σ_x	0.97	7.2	0.63	0.88
σ_{F_y}/σ_x	0.75	8	0.86	3.6
$\rho_{x \cdot F_x}$	0.57	0.05	-0.11	0.45
$\rho_{x \cdot F_y}$	0.83	0.17	-0.18	0.71

準化した σ_{F_x}/σ_x である。また、表4には σ_{F_x}/σ_x , σ_{F_y}/σ_x , σ_x を従属変数として重回帰分析した結果が示してある。得られた σ_{F_x}/σ_x の重相関係数 R_{cor} は 0.97 で、 σ_{F_x}/σ_d の重相関係数の値 (= 0.91) よりも大きい。これは、切削厚さの変動成分 Δd を $x(t)$ と $x(t-T)$ から求めているため、 $x(t)$ の測定値に含まれるノイズ成分の影響が $x(t)$ を単独で用いる場合よりも大きいために推定される。しかし、特性値 σ_{F_x}/σ_x の回帰係数 k_{VB} は 7.2 で、 k_b (= 0.63) の約 10 倍であり、 σ_{F_x}/σ_d の場合よりも切削幅 b の変化の影響は受けやすい。

また、 σ_{F_y}/σ_x の重相関係数 R_{cor} は 0.75 で、 σ_{F_x}/σ_x の場合と同様、 σ_{F_y}/σ_d の重相関係数 (= 0.72) よりもわずかに増加している。一方、 ΔF_x と x との相関係数 $\rho_{x \cdot F_x}$ の重相関係数 R_{cor} は 0.57 で、 $\rho_{d \cdot F_x}$ の重相関係数 (= 0.84) よりもかなり低下している。これは、切削工具の切刃が鋭利な場合、式(1)で示したように、背分力の動的成分 ΔF_x は切削厚さの変動成分 Δd に比例するが、式(2)で示したように、 Δd が一回転前の被削材の振動変位 $x(t-T)$ の関数であるため、 $x(t-T)$ の影響により ΔF_x が $x(t)$ に比例する関係にはならなかったためと推定される。

4. ま と め

本研究では、切削抵抗の動的成分と被削材の背分力方向の振動変位とから得られた、動的切削過程の特性値による工具逃げ面の摩耗検出の可能性について検討し、以下の結果を得た。

(1) 切削厚さの変動成分の標準偏差で規準化した(割った)背分力の動的成分の標準偏差は、切削工具の逃げ面の摩耗幅、あるいは切削幅が増加するのに伴って大きくなり、摩耗幅に対する増加率は切削幅に対する増加率の約 20 倍であった。

(2) 背分力の動的成分と切削厚さの変動成分との相関係数は、切削工具の逃げ面の摩耗幅、あるいは切削幅が増加するのに伴って小さくなり、摩耗幅に対する減少率は切削幅に対する減少率の約 30 倍であった。

(3) 工具の摩耗部と仕上げ面が干渉することにより、逃げ面の摩耗が大きくなるのに伴って切り厚さの変動成分に比例しない背分力の動的成分が増大し、また背分力の動的成分と切り厚さの変動成分との相関係数は小さくなる。

(4) 被削材の背分力方向の振動変位の標準偏差で規準化した(割った)背分力の動的成分の標準偏差は、切削工具の逃げ面の摩耗幅、あるいは切削幅が増加するのに伴って大きくなり、摩耗幅に対する増加率は切削幅に対する増加率の約 10 倍であった。

なお、本研究は(財)スズキ財団の研究助成により行ったことを付記する。

参考文献

- (1) 岩田, 機誌, 82 - 731 (1979), 1120.
- (2) 上原, 機誌, 89 - 814 (1986), 1084.
- (3) 精密工学会編, 精密工学便覧, (1992), 1353, コロナ社.
- (4) 谷, 機誌, 89 - 814 (1986), 1059.
- (5) 伊東・新野, 総合的切削状態認識方法に関する研究, (1988), 1, (財)工作機械技術振興財団.
- (6) 伊東・新野, 総合的切削状態認識方法に関する研究 (2年度), (1989), 1, (財)工作機械技術振興財団.
- (7) Sata, T., Nagakura, T. and Kono, E., *CIRP Annals*, 22-1 (1973), 41.
- (8) 頼・他3名, 精密機械, 50 - 7 (1984), 1117.
- (9) 田中・沖津, 精密工学会誌, 52 - 12 (1986), 2099.
- (10) 三好, 精密工学会誌, 57 - 10 (1991), 1774.
- (11) 村田・小久保, 精密工学会誌, 60 - 2 (1994), 250.
- (12) Li, X.Q., Wong, Y.S. and Nee, A.Y.C., *Int. J. Mach. Tools Manufact.*, 37 - 4 (1997), 425.
- (13) 近藤・田中・皮籠石, 機論, C, 64 - 617 (1998), 342.
- (14) Rao, S.B., *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, 108 - 3 (1986), 183.
- (15) Kwon, W.T. and Ehmann, K.F., *Int. J. Mach. Tools Manufact.*, 34 - 3 (1994), 393.
- (16) 白樫・龍・帯川, 精密工学会誌, 61 - 12 (1995), 1750.
- (17) 白樫・龍・帯川, 精密工学会誌, 62 - 8 (1996), 1146.
- (18) 松原・草野, 精密機械, 45 - 4 (1979), 500.
- (19) 近藤・太田・川合, 機論, C, 61 - 584 (1995), 1279.
- (20) 東京大学教養部統計学教室編, 統計学入門, (1992), 257, 東京大学出版会.
- (21) 中川・室津・岩壺, 工業振動学, (1986), 138, 森北出版.