機械の運動における部材干渉の研究*

(第3報, 多閉路構造の干渉性のグラフを用いた判定)

遠 藤 享^{*1}

A Study of Interference among Parts of a Machine in Motion (3rd Report, Graph-Based Judgment of Interferential Characteristics of Multi-Loop Structure)

Takashi ENDO

This study deals with the problem of analyzing the phenomena of interference among parts of a machine in motion. Some machines cause interference because of their basic structure as well as of their superficial form. A previous report demonstrated that a machine causes interference in a motion when its basic structure realizes a certain relationship among the torsion numbers, that is, the numbers of relative revolutions to occur between links in kinematic pairs in the motion. This report presents a graph-based method of judging the realization of the relationship for multi-loop structures. First, the basic structure and the torsion numbers are represented in a graph. Next, this graph is transformed through a series of several graphs into a graph, called the fourth pair graph, each arc of which corresponds to a set of kinematic pairs in the structure and has a weight: the sum of all the torsion numbers that are each related to a kinematic pair in the set. It is graph-theoretically shown that when the weight of an arc in the fourth pair graph is not zero, the above-mentioned relationship is realized. Hence, by calculating the weights, one can easily judge the interferential characteristics of the structure.

Key Words: Design Engineering, CAD, Machine Element, Mechanism, Multi-Loop Structure, Interference of Parts, Collision Check, Design Verification, Graph

1. 緒 言

機械設計において、機械が運動時に部材どうしの干渉(衝突)を起こさないように、その構造および形状を決定する作業は、機械の構造、形状、または運動が複雑になる場合や、機械の占有空間が制限されている場合などに、困難を伴う。そのため、このような設計作業を体系的に支援する方法あるいはCADシステムの開発が望まれる。

本研究の第1報⁽¹⁾では、上述の方法あるいはシステムの開発のためには、まず、干渉(衝突)問題の観点から機械の構造と機能との関係を検討する必要があると考え、そのための基礎概念として、構造を具体化した機械が必ず干渉を生じるという必然性や、構造を干渉の生じない機械に具体化できるという可能性といった様相的性質である、構造の干渉性を定義した。そして、干渉性を判定できれば設計の効率化を図れることを示した。次いで第2報⁽²⁾では、運動によって構造内の閉路に生じる「捩れ」に注目して、構造の干渉性を判定する方法を示した。そこでは、構造内に複数の閉路がある場合でも、それらの間の関係は考慮せずに、

原理的にはただ一つの閉路がある場合を扱った。

本第3報では、第2報の結果に基づいて構造内に複数の閉路がある場合を扱う。すなわち、複数の閉路の従属性をグラフで表現し、このグラフを用いて、構造が干渉的であるための十分条件を与える定理を導き、干渉性判定法の機能の向上を図る。なお、既報と同様に、低次対偶からなる機構学的な機械の構造を干渉性判定の対象とする。

2. 基 礎 事 項

既報⁽¹⁾⁽²⁾で導入した概念で本報に関連するものについて、若干の追加をおりまぜて要約する。

2・1 構造 第1報⁽¹⁾で、干渉現象に関わる機械の構造として1-構造, ..., 5-構造を定義した。本節では、これらのいくつかについて直感的に説明する。

機械の運動を決定する属性は、機構形式、機構定数、および節の組立て方である。これらの属性を複合させた属性を機構構造(または1-構造)と呼ぶ。機構構造は、いわゆる機構図によって表現される構造である。

図1(a)は、六つの節が回り対偶と進み対偶で接続している機械の構造を、節の実形で表したものである。このような図で表される構造を、本研究では機構(または5-構造)と呼んでいる。機構は、各節の詳細形状の情報を持っているが、各節がどのような形状の部

* 原稿受付 1998年3月19日。

*¹ 正員, 東京工業大学総合理工学研究科(〒226-8502 横浜市緑区長津田町4259)。

E-mail: endo@pms.titech.ac.jp

Fig. 1 Structures of machine

Fig. 2 Branching pair point and torsion numbers at it [$n_1 = \omega(\mathbb{C}_1, \mathbb{J}_7, M)$, $n_2 = \omega(\mathbb{C}_2, \mathbb{J}_7, M) = -n_1$, $n_3 = \omega(\mathbb{C}_3, \mathbb{J}_7, M) = 0$] Fig. 3 Abstraction of structure around a branching pair point [Skeletonoid σ^3 is abstracted from σ^5 via σ'^5 and σ^4 . σ'^5 is obtained by contracting σ^5 .]

Fig. 4 Torsion number at a pair point

品から構成されているかという情報は持っていない。

機構において、基本的な属性である機構構造を変化させずに、各節の肉厚が零に収束するまで肉付形状⁽¹⁾を連続的に収縮させたときの極限の機構を、骨格（または4-構造）と呼ぶ。図1(a)の機構 σ^5 に対応する骨格の一例 σ^4 を同図(b)に示す。

骨格から、機構構造、部材位相⁽¹⁾（機械部材の作るネットワークのトポロジカルなありさま）、および対偶部骨格特性⁽¹⁾（対偶軸部材の形状を代表する中心線が対偶部から出る方向；図1(b)中の矢印で表す）を抽出したものを、骨相（または3-構造）と呼ぶ。図1(a)の機構 σ^5 に対応する骨相 σ^3 を同図(c)に示す。

2.2 径路・閉路 図1(c)の骨相 σ^3 の表現図で、一続きの、対偶点（○点）、剛接合点（□点）、および部材線（2点（○点または□点）を結ぶ破線）の系列を骨相径路と呼ぶ。[$\mathbb{J}_1$ -a- $\mathbb{J}_2$ -b- $\mathbb{J}_3$ -c1- $\mathbb{R}$ -c2- $\mathbb{J}_4$ -f1- $\mathbb{J}_7$ -f2]のような閉じた骨相径路を骨相閉路と呼ぶ。 σ^3 は三つの骨相閉路を持つ。

2.3 分岐対偶点 図1(a)の機構 σ^5 の対偶部 $\mathbb{J}_7$ の周辺の様子を、図2(a)に示す。図2(a)のように、回り対偶（または、進み対偶、円筒対偶）において一つの軸fが軸受を貫通して軸受の左右両側に延びている場合、軸fを軸受部において左右二つの部材 f_1, f_2 に分割し、 f_1 と f_2 とは軸受部で剛接合していると考え、このような剛接合を軸受内剛接合と呼ぶ。

図2(a)に示した機構の対偶部周辺は、同図(b)に示す骨相のように抽象化される。図2(b)の $\mathbb{J}_7$ のような対偶点を分岐対偶点と呼ぶ。 $\mathbb{J}_7$ からは三つの部材線e, f_1, f_2 が出ている。次章での議論を容易にするために、骨相ではどの分岐対偶点からもちょうど三つの部材線が出る、という制約をおく。たとえば、図3の機

構 σ^5 の回り対偶部からは四つの部材 e_1, e_2, f_1, f_2 が出ているが、 $\sigma^5 \rightarrow \sigma'^5 \rightarrow \sigma^4$ と肉付形状を連続的に収縮させ剛接合点を適所に設ければ、骨格 σ^4 を抽象化した骨相 σ^3 では分岐対偶点からちようど三つの部材線e, f_1, f_2 が出ることになり、上述の制約を満たせる。

2.4 閉運動 機械がある運動Mを実行するとする。その機械の各節について、Mの開始時刻における変位と終了時刻における変位とが相等しいとき、Mを閉運動と呼ぶ。すなわち、閉運動は、その実行後に各節が元の位置に戻るような運動である。たとえば、周期的反復運動の1周期分は閉運動である。

2.5 振れ数 第2報⁽²⁾で、骨相径路の振れ数を定義した。本節では、これを直感的に説明する。

骨相径路 $\mathbb{C}$ 上の部材aとbが対偶点 $\mathbb{J}$ で接続しているとすると（図4）。骨相の運動Mで生じる、aに対するbの相対運動が、aから $\mathbb{C}$ に沿って $\mathbb{J}$ を通過してbに到る視線で見ると、時計まわりのn回転であるとする。ここで、nは $\mathbb{C}, \mathbb{J}$ 、およびMに応じて一意的に定まる。そこで、nを、 $\omega(\mathbb{C}, \mathbb{J}, M)$ で表し、Mによる $\mathbb{J}$ における $\mathbb{C}$ の振れ数と呼ぶ。

$\mathbb{C}$ の端点でない $\mathbb{C}$ 上のすべての対偶点を $\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2, \dots, \mathbb{J}_N$ とすると、 $\sum_{j=1}^N \omega(\mathbb{C}, \mathbb{J}_j, M)$ を、 $\Omega(\mathbb{C}, M)$ で表し、Mによる $\mathbb{C}$ の全振れ数と呼ぶ。

2.6 分岐対偶点における振れ数 図2(b)で、分岐対偶点 $\mathbb{J}_7$ を通過する骨相径路は $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_3$ の三つである。よって、運動をMに固定すれば、 $\mathbb{J}_7$ における骨相径路の振れ数として、 $\omega(\mathbb{C}_1, \mathbb{J}_7, M), \omega(\mathbb{C}_2, \mathbb{J}_7, M), \omega(\mathbb{C}_3, \mathbb{J}_7, M)$ の三つが考えられる。 $\mathbb{C}_3$ は、前述のように、同じ軸fを構成する部材 f_1, f_2 が $\mathbb{J}_7$ で剛接合したものであるため、 $\omega(\mathbb{C}_3, \mathbb{J}_7, M) = 0$ である。また、 $\omega(\mathbb{C}_2, \mathbb{J}_7, M) = -\omega(\mathbb{C}_1, \mathbb{J}_7, M)$ である⁽²⁾。

Fig. 5 Graph representations of structure and torsion numbers [For the skeletonoid σ^3 and the closed motion M in Fig. 1(c)]

進み対偶, 円筒対偶の場合も, 以上と同様である.

2・7 干渉性 第1報⁽¹⁾で, s -構造 σ^s ($s=1, 2, \dots, 5$) の, 機械の干渉に関連した性質 (これを干渉性と呼ぶ) として, 「 σ^s が運動 M に関して Σ^r -干渉的である」 (記号表記 “ Σ^r -*int*(σ^s, M)”) ($r=1, 2, \dots, s$) を定義した. 本節では, これを, $r=s=3$ の場合について直感的に説明する.

Σ^3 -*int*(σ^3, M) であるとは, 骨相 (3-構造) σ^3 に対して骨格形状⁽¹⁾と肉付形状を複合することによって σ^3 を具体化⁽¹⁾して得られる任意の機構 (5-構造) が, 運動 M によって干渉を生じることである. たとえば, 図 1(c) の骨相 σ^3 を具体化して得られる機構の一例が同図 (a) の σ^5 であるが, σ^3 を具体化して得られる機構は σ^5 以外にも無数に存在する. Σ^3 -*int*(σ^3, M) であるとは, このような無数の機構のすべてが運動 M によって干渉を生じることである.

2・8 振れ数と干渉性 次の定理を導いた⁽²⁾.

【定理 3】*² 骨相 σ^3 で閉運動 M によるある骨相閉路の全振れ数が非零であるならば, Σ^3 -*int*(σ^3, M) である.

骨相閉路の全振れ数を評価できれば, 【定理 3】を用いて閉運動に関する骨相の干渉性を判定できる. 以下では, 全振れ数の評価方法について検討する.

3. 構造と振れ数のグラフ表現

骨相閉路の全振れ数の評価のためには, 構造と振れ数のどのような表現が効果的であるか, ということについて検討する. 図 1(c) の骨相 σ^3 と, σ^3 において節 a が静止節 f (f_1 と f_2 の剛接合体) に対して図示の向きに 1 回転する閉運動 M を例にとって説明する.

3・1 部材位相グラフ [図 5(a)] 先ず, 骨相 σ^3 の持つ部材位相⁽¹⁾を表現するグラフを作る. すなわち, σ^3 の対偶点 (図 1(c) の○点) と剛接合点 (同図の□点) をノードに, 部材線 (同図の 2 点○点または□点) を結ぶ破線をアークにしたグラフ H を作る. H は, 空間図形である図 1(c) の σ^3 の表現図を, 長さ・角度を無視して平面上に描いただけのものである.

* 2 定理には, 前報⁽²⁾と本報に亘って通し番号を付ける. 【定理 1】～【定理 3】は前報のものである.

次に, 運動 M による対偶点における骨相径路の振れ数をグラフ H のノードに添える. たとえば, σ^3 の骨相径路 $\mathbb{C} = f_2 - J_1 - a$ について $\omega(\mathbb{C}, J_1, M) = 1$ であるので, 振れ数 1 を H のノード J_1 に添える. 剛接合点を表すノードには 0 を添える.

以上のようにして作られる, 振れ数の表示を伴ったグラフ H [図 5(a)] を, σ^3 の M に関する部材位相グラフと呼ぶ (誤解の恐れのないときは, 単に部材位相グラフと呼ぶ. 後述の諸グラフについても同様に呼び方を短縮する). 2・3 の後半で述べた制約から, H の, 分岐対偶点を表すノードの次数は 3 となる.

【振れ数の表示に関する補足】 図 1(c) [図 2(b)] の分岐対偶点 J_7 における骨相径路の振れ数として, 前述 (2・6) のように, $\omega(\mathbb{C}_1, J_7, M) = 1$, $\omega(\mathbb{C}_2, J_7, M) = -1$, $\omega(\mathbb{C}_3, J_7, M) = 0$ が考えられる. したがって, 三つの振れ数 1, -1, 0 を部材位相グラフ H のノード J_7 に添える (これらの数値が $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_3$ のどれの振れ数であるかを見て取れるように表示する).

このように, 一つのノードに複数の骨相径路の振れ数が添えられることがあるため, 部材位相グラフは, 骨相閉路の全振れ数評価用ツールとして洗練が足りない. できるならば, グラフの一つの要素 (ノードまたはアーク) にはちょうど一つの振れ数が添えられるようにしたい. 次節でそれを行う.

3・2 第 1 対偶グラフ [図 5(b)] 図 6 のように, 部材位相グラフ H に対応させてグラフ G_1 を作る. すなわち, 先ず, H の各アーク x に G_1 のノード (これも x と表記する) を対応させる. H のアーク x, y があるノード N で隣接しているとき, G_1 のノード x, y の間にアーク (これにはラベル “N” を付ける) を設ける. 次に, H のノード N に添えられた振れ数 n を, G_1 のラベル “N” を付けられたアークに添える. グラフ G_1 [図 5(b)] を σ^3 の M に関する第 1 対偶グラフと呼ぶ.

【振れ数の表示に関する補足】 部材位相グラフの 3 次以上のノードには, 第 1 対偶グラフの複数のアークが対応する. たとえば, 図 5(a) の H のノード J_7 には, 図 5(b) の G_1 のラベル “ J_7 ” を付けられた三つのアークが対応する. その場合, H のノードに図 2(c) のように添えられた振れ数 n_1, n_2, n_3 を, G_1 のアーク

Fig. 6 Correspondence between graphs H and G_1

に図2(d)のように添える。

【アークの種類】 第1対偶グラフでは、ノードが部材を、アークが二つの部材間の対偶または剛接合を表す。対偶を表すアークは、**対偶アーク**と呼び太単線で図示する。剛接合を表すアークは、**剛接合アーク**と呼び二重線で図示する。たとえば、図5(b)の第1対偶グラフ G_1 のラベル“ Σ ”を付けられた三つの剛接合アークは、図1(c)の骨相 σ^3 の節 c の部材 c_1, c_2, c_3 の間の剛接合 Σ を表す。 G_1 のラベル“ $\mathbb{J}_7$ ”を付けられた剛接合アークは、 σ^3 の対偶点 $\mathbb{J}_7$ における、節 f の部材 f_1, f_2 の間の軸受内剛接合 (2・3 参照) を表す。

【アークの重み】 第1対偶グラフでは、一つのアークにはちょうど一つの振れ数が添えられる。これをアークの**重み**と呼ぶ。アーク e の重みを $\tau(e)$ で表す。

【アークの集合の重み】 第1対偶グラフ (および後出の諸グラフ) におけるパス (path), ループ (loop), 純ループ的同値類 (後出) などの重みを、アークの集合の重みとして統一的に定義する。すなわち、アークの集合 A に属するすべてのアークの重みの和 $\sum_{e \in A} \tau(e)$ を、 $\tau(A)$ で表し、A の**重み**と呼ぶ。 $A \cap B = \emptyset$ のとき、 $\tau(A \cup B) = \tau(A) + \tau(B)$ である。

【ループの種類】 任意の骨相閉路 $\mathbb{C}$ は第1対偶グラフのあるループ L_1 によって表され、 $\Omega(\mathbb{C}, M) = \tau(L_1)$ が成り立つ。このように骨相閉路を表すループを**実ループ**と呼ぶ。しかし、第1対偶グラフには、骨相閉路を表さない余計なループ (**虚ループ**と呼ぶ) が存在することがある。たとえば、図5(b)の G_1 のループ $[f_1 - c - f_2]$ は虚ループである。第1対偶グラフは、虚ループを持つことがあるという点で、骨相閉路の全振れ数評価用ツールとして洗練が足りない。できるならば、虚ループを消去したい。以下でそれを行う。

3・3 第2対偶グラフ [図5(c)] 第1対偶グラフ G_1 で軸受内剛接合を表す剛接合アーク (図5(b)のラベル“ $\mathbb{J}_7$ ”を付けられた二重線) を開放除去したグラフ G_2 を、 σ^3 の M に関する**第2対偶グラフ**と呼ぶ。この開放除去によっていくつかのループが消去される。

【骨相径路 (閉路) の全振れ数とパス (ループ) の重み】

以上で作った三つのグラフ H, G_1, G_2 で、骨相径路の全振れ数がどのように算出されるかを見る。分岐対偶点を通らない骨相径路の場合は、容易にわかる。以下では、分岐対偶点を通る骨相径路の場合を考える。

図2(c)の部材位相グラフ H において、骨相径路 $\mathbb{C}_3 = f_1 - \mathbb{J}_7 - f_2$ の全振れ数は $n_3 = 0$ である。これは、図2(d)の第1対偶グラフ G_1 ではパス $L_{1,3} = f_1 - \mathbb{J}_7 - f_2$ の重み、 $\tau(L_{1,3}) = n_3 = 0$ 、として算出される。

軸受内剛接合を表す剛接合アークの開放除去によっ

て、 G_1 のパス $L_{1,3}$ (および $L_{1,3}$ を含むループ) は、第2対偶グラフ G_2 では分断消去される。そこで G_2 では、 $L_{1,3}$ の代理として、開放除去された剛接合アークと同じラベル“ $\mathbb{J}_7$ ”を付けられた二つの対偶アークからなるパス $L_{2,3}$ [図2(e)] を用いる。いい換えると、 G_1 のパス $L_{1,3}$ (または $L_{1,3}$ を含むループ) に、 G_2 のパス $L_{2,3}$ (または $L_{2,3}$ を含むループ) を代理として対応させる。ここで、 $\tau(L_{2,3}) = n_1 + n_2 = n_1 + (-n_1) = 0 = n_3 = \tau(L_{1,3})$ である。このように代理のパス (ループ) を対応させることで、 G_1 の任意の実ループ L_1 、および G_2 の、 L_1 に対応するループ (またはくびれたループ; 3・4, *3 参照) L_2 について、 $\tau(L_1) = \tau(L_2)$ となる。

【ループの種類】 第2対偶グラフに残る虚ループは、① 上述のように第1対偶グラフの実ループに代理として対応させられた虚ループ、② そうでない虚ループ、に二分できる。図5(c)の G_2 のループ $[a - b - c_1 - c_2 - f_1 - e - f_2]$ は①の例、ループ $[c_1 - c_2 - c_3]$ は②の例である。①の虚ループは、消去された実ループの代理として、その重みを担うという役割を持たされている。実ループと①の虚ループを**実質的ループ**と呼ぶ。

剛接合アークは、重みが0であるので、パス (ループ) の重みを算出する上では短絡除去しても支障ない。次節でそれを行って、②の虚ループを消去する。

3・4 第3対偶グラフ [図5(d)] 第2対偶グラフ G_2 で剛接合アーク (二重線) を短絡除去したグラフ G_3 を、 σ^3 の M に関する**第3対偶グラフ**と呼ぶ。第3対偶グラフでは、すべてのアークは対偶アークである。また、ノードは、同一の節に属するいくつかの (すべてのとは限らない) 部材の集合を表す。

【ループの種類】 第3対偶グラフの任意のループは、第2対偶グラフの実質的ループに対応する。しかし、第2対偶グラフの実質的ループのあるものに、第3対偶グラフのどのループも対応しないことがある。つまり、第2対偶グラフから第3対偶グラフを作る操作で、実質的ループをも消去してしまうことがある。すなわち、グラフの操作によって、第2対偶グラフの剛接合アークだけからなる実ループは一つのノードに縮退し、また、ある種の実質的ループはくびれてしまい (図7)*3、第3対偶グラフではもはやループとして

Fig. 7 Constriction of a loop

*3 このようなくびれは、第1対偶グラフから第2対偶グラフを作る操作でも、生じることがある。

は存在しなくなる。しかし、次の【補題1】が成り立つため、すべての骨相閉路の全振れ数の評価に第3対偶グラフを用いることができる。

【骨相閉路の全振れ数とループの重み】

【補題1】 骨相 σ^3 で運動Mによる任意の骨相閉路の全振れ数が0であることと、 σ^3 のMに関する第3対偶グラフ G_3 の任意のループの重みが0であることは、等価である。(証明 付録A)

【補題1】によって、任意の骨相閉路の全振れ数が0であるかどうかを知るには、「第3対偶グラフの任意のループの重みが0である」という命題の成否を調べればよいことがわかる。一般に、多閉路構造の第3対偶グラフは互いに従属な複数のループを持つ。これらのループの従属性を利用すれば、上記の命題は、それと等価であるが、成否を判定するのがより簡単な命題に書き換えられるのではないかと期待される。以下では、そのような命題を求める。

3.5 ループ的同値類 本節と次節では、一般のグラフを対象にして議論する。グラフGの二つのアーキ e, f を考える。 $e=f$ であるか、または、 e を通るすべてのループの集合と、 f を通るすべてのループの集合とが非空であって等しいことを、 $e \sim f$ で表す。

関係 $\sim$ はGのアーキの集合上の同値関係⁽³⁾となる。したがって、Gのアーキの集合は、関係 $\sim$ によっていくつかの同値類 $E_1, E_2, \dots, E_r$ ($r \geq 1$) に分割される。 $E_1, E_2, \dots, E_r$ の各々をGのループ的同値類と呼ぶ。図8(a)にグラフとそのループ的同値類の例を示す。

ループ的同値類 E_i に属すアーキが少なくとも一つのループに属するとき、 E_i を純ループ的同値類と呼ぶ。図8(a)で、 $E_1, E_2, \dots, E_5, E_7$ は純ループ的同値類であるが、 E_6 は純ループ的同値類でない。

3.6 純ループ的同値類グラフ グラフGの相異なる二つのアーキ e, f が $e \sim f$ であるとき、 $w = \tau(e) + \tau$

(a) Graph G and its loop-equivalence classes $E_1, E_2, \dots, E_7$

(b) left: Real-loop-equivalence-class graph $\bar{G}$ of the graph G in (a)

(c) right: Real-loop-equivalence-class matrix of the graph G in (a)

Fig. 8 Loop-equivalence classes of a graph

(f) とおいてから、 f を短絡除去し、さらに、 e の重みを w に変更する、という操作を考える。この操作は、 $e \sim f$ である二つのアーキ e, f を一つのアーキにまとめる。Gに対してこの操作を可能な限り繰り返して得られるグラフは一般に複数個存在するが、それらのうちの任意の一つを G' で表す。 G' でループに属さないアーキを短絡除去して得られるグラフを、Gの純ループ的同値類グラフと呼び、 $\bar{G}$ で表す。図8(a)のグラフGの純ループ的同値類グラフ $\bar{G}$ を同図(b)に示す。

【性質1】 グラフGから $\bar{G}$ を作る操作によって、Gの純ループ的同値類と $\bar{G}$ のアーキとが、また、Gのループと $\bar{G}$ のループとが、1対1対応する。対応するものどうしは重みが等しい。

【性質2】 グラフGから $\bar{G}$ を作る操作によって、Gのブロックのうち、(i) ループを持たないブロック (たとえば、図8(a)の $\{e_9\}$) は、 $\bar{G}$ の一つのノードに縮退し、(ii) ただ一つのループを持つブロック (同 $\{e_{10}, e_{11}\}$) は、 $\bar{G}$ のただ一つのアーキ (自己ループ) e からなるブロックに変換され、(iii) 複数のループを持つブロック (同 $\{e_1, e_2, \dots, e_8\}$) は、 $\bar{G}$ のアーキ連結度^{*4}が3以上のブロック B に変換される。(証明 付録B)

上記の性質を用いて、次の補題を導ける。

【補題2】 グラフGの任意のループの重みが0であることと、 $\bar{G}$ の任意のアーキの重みが0であることは、等価である。(証明 付録C)

3.7 第4対偶グラフ [図5(e)] 骨相 σ^3 の運動Mに関する第3対偶グラフ G_3 の純ループ的同値類グラフ $\bar{G}_3$ を、 σ^3 のMに関する第4対偶グラフと呼ぶ。いま、 $\bar{G}_3$ を G_4 と書く。 G_3 の純ループ的同値類の重みが、 G_4 のアーキの重みとして表される。

【補題3】 骨相 σ^3 で運動Mによる任意の骨相閉路の全振れ数が0であることと、 σ^3 のMに関する第4対偶グラフ G_4 の任意のアーキの重みが0であることは、等価である。

【証明】 【補題1】と【補題2】(Gを G_3 でおき換え、 $\bar{G}_3 = G_4$ に注意する) からただちに導ける。■

【補題3】から、骨相閉路の全振れ数の評価に第4対偶グラフを利用できることがわかる。

4. グラフを用いた干渉性の判定

第4対偶グラフを用いて骨相の干渉性を判定する方法について説明する。

4.1 骨相を要因とする干渉性 骨相が閉運動に

*4 グラフを非連結かトリビアルにするために、開放除去すべきアーキの最小個数。別名、線連結度⁽⁴⁾。

関して Σ^3 -干渉的であるための、第4対偶グラフについての十分条件を与える次の定理を導ける。

【定理4】 骨相 σ^3 の閉運動 M に関する第4対偶グラフ G_4 のあるアークの重みが非零であるならば、 Σ^3 - $\text{int}(\sigma^3, M)$ である。

〔証明〕 【定理3】と【補題3】から明らか。■

たとえば、図1(c)の骨相 σ^3 の閉運動 M に関する第4対偶グラフ G_4 [図5(e)] は重みが非零のアークを持つので、【定理4】から Σ^3 - $\text{int}(\sigma^3, M)$ がいえる。

4.2 部材位相付き機構構造を要因とする干渉性

骨相の Σ^2 -同型変換 (部材位相付き機構構造 (2-構造)⁽¹⁾ を保存する変換) に関して、対偶点における骨相経路の振れ数の絶対値は不変であること⁽²⁾ を考慮すれば、【定理4】を用いて、一段上位の干渉性についての条件、すなわち、骨相が閉運動に関して Σ^2 -干渉的であるための、第4対偶グラフについての十分条件、を与える次の定理を導ける。

【定理5】 骨相 σ^3 の閉運動 M に関する第4対偶グラフ G_4 のあるアークの重みが奇数であるならば、 Σ^2 - $\text{int}(\sigma^3, M)$ である。 (証明省略)

4.3 アークの重みの算出法

【定理4】、【定理5】に基づいて骨相の干渉性を判定するには、第4対偶グラフ G_4 のアークの重みを求める必要がある。本節では、多少末梢的な事柄になるが、計算機利用の立場から G_4 のアークの重みの算出法を示す。

始めに、一般のグラフ G について簡単な定義を行う。 G のすべてのアークを $e_1, e_2, \dots, e_b$ 、すべての純ループ的同値類を $E_1, E_2, \dots, E_r$ とする。

- G のアーク重みベクトルとは、次の τ である。

$$\tau = {}^t(\tau(e_1), \tau(e_2), \dots, \tau(e_b))$$

ここで、 tA は行列 A の転置行列である。

- G の純ループ的同値類行列とは、次の D である。

$$D = [\delta_{ij}] \quad (i=1, 2, \dots, r; j=1, 2, \dots, b)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (E_i \ni e_j) \\ 0 & (E_i \not\ni e_j) \end{cases}$$

たとえば、図8(a)のグラフ G の純ループ的同値類行列は同図(c)のようになる。

干渉性を判定するために、第4対偶グラフ G_4 のアーク重みベクトル τ_4 を求めたい。それには、骨相のデータ、すなわち、部材位相グラフの接続行列と対偶点における振れ数から、第3対偶グラフ G_3 の接続行列 A_3 とアーク重みベクトル τ_3 を求める。これは容易である。次に、 A_3 を参照して、 G_3 の基本ループ行列 F_3 を作る⁽⁵⁾。そして、 F_3 の第 j_1 列と第 j_2 列とが等しいときにだけ、これらの列に対応する G_3 のアーク e_{j_1} 、 e_{j_2} が $e_{j_1} \oplus e_{j_2}$ であることを利用して、 G_3 のアークの集合

をループ的同値類 $E_1, E_2, \dots, E_r$ に分割して、 G_3 の純ループ的同値類行列 D_3 を求める。以上では、 G_3 のすべてのループを数え上げる必要はない。 G_4 のアーク重みベクトル τ_4 は、 $\tau_4 = D_3 \tau_3$ として求められる。

4.4 干渉性判定法のまとめ

次の手順で判定する。

if τ_4 のある要素が奇数である

then 「 Σ^2 - $\text{int}(\sigma^3, M)$ である」と判定する

else if τ_4 のある要素が非零である

then 「 Σ^3 - $\text{int}(\sigma^3, M)$ である」と判定する

else 判定しない

5. 例と考察

5.1 干渉性判定例 4.3 および 4.4 に基づいて構造の干渉性を判定するシステムを作成した。本システムによる干渉性判定の例を図9に示す。

同図(a)に、平面6節機構⁽⁶⁾の機構構造(1-構造) σ^1 を示す。 σ^1 において原動節 a が静止節 f に対して図示の向きに1回転する閉運動を M とする。同図(b)に、 σ^1 を具体化⁽¹⁾した骨相(3-構造)の一例 σ^3 を示す。

骨相 σ^3 の記述および閉運動 M の指定に対して、システムは、まず、 σ^3 の M に関する部材位相グラフ $H \rightarrow$ 第1対偶グラフ $G_1 \rightarrow$ 第2対偶グラフ $G_2 \rightarrow$ 第3対偶グラフ G_3 、の順にそれらの接続行列を求め、4.3 に従って G_3 の純ループ的同値類行列 D_3 を求める。次に、 σ^3 の変位解析を行い、 M による各対偶点における各骨相閉路の振れ数を算出して、 G_3 のアーク重みベクトル τ_3 を求め、 $\tau_4 (= D_3 \tau_3)$ を算出する。実際、システムは同図(c)のように算出し、その結果から 4.4 の手順で「 Σ^2 - $\text{int}(\sigma^3, M)$ である」と判定した。

因みに、システムが求めた接続行列と D_3 、 τ_3 、 τ_4 を参照して、著者が諸グラフを同図(d)に描いた。

5.2 考察 前節の判定結果の意味を、構造の集合の階層性を表す、機構構造 σ^1 を根とする木⁽¹⁾ [図9(e)] を使って考える。 Σ^2 - $\text{int}(\sigma^3, M)$ であると判定されたことは、 σ^3 と Σ^2 -同型⁽¹⁾である任意の骨相 σ'^3 を具体化した任意の機構(5-構造) (図中の点線で囲んだ領域内最下段に出現しうるすべての機構) が、 M によって干渉を生じることである⁽¹⁾。よって、 σ^3 を具体化しても干渉を生じない機構は得られないので、 σ^3 は骨相の設計案として不適格である。そこで、 σ^3 を修正して Σ^2 - $\text{int}(\sigma''^3, M)$ ではない骨相 σ''^3 を得たい。それには、図中の点線で囲んだ領域の外に出る必要がある。すなわち、部材位相付き機構構造(2-構造) σ^2 にまで遡って修正する必要がある。そこで、同図(d)の G_4 を参考にして、第4対偶グラフに重みが奇数であるアークが現れないことを目指して σ^2 の部材

Fig. 9 Example of judging interferential characteristics of a skeletonoid (3-structure) of a 6-link planar mechanism

位相⁽¹⁾を修正し、たとえば、同図(e)の σ''^2 を作ってみる。 σ''^2 には、第4対偶グラフのすべてのアークの重みが0になるように対偶部骨格特性⁽¹⁾を複合できて、 σ''^3 を得る。さらに、 σ''^3 を具体化して交差を生じない骨格が得られることが確かめられる。このように、構造を設計する上で有用な情報がグラフを用いた干渉性判定で得られる。なお、グラフに基づく体系的な構造設計法については、別報で扱いたい。

Σ^3 -干渉的であると判定された場合、第4対偶グラフの重みが非零(偶数)のアークに対応する対偶点における対偶部骨格特性が不適格である。第4対偶グラフの一つのアークに対応する対偶点の個数は、一つの骨相閉路に含まれる対偶点の個数よりも一般に少ない。したがって、第4対偶グラフを用いれば、干渉性の原因となる不適格な対偶部の候補をより狭く限定できる。

骨相閉路は純ループの同値類の組合わせに相当するので、構造が複雑になると、骨相閉路の個数は組合わさ的に増大する。第4対偶グラフを用いれば、骨相閉路を数え上げる必要はないので、【定理3】を直接用いる場合よりも、干渉性を簡単に判定できる。

以上のように、複数の骨相閉路の従属性をグラフを用いて考慮することで、干渉性判定法の機能の向上が

図られることがわかる。

6. 結 言

複数の閉路を持つ機械を対象として、その構造と振れ数をグラフによって表現し、これを用いて構造の干渉性を判定する方法を示した。この方法は、前報で示した骨相閉路の全振れ数と構造の干渉性との関係を基礎として、グラフのループの従属性を考慮することで、次のような新たな特徴を実現している。(1) より上位の構造を要因とする干渉性、すなわち、構造が Σ^2 -干渉的であることも判定できる。(2) 構造が Σ^3 -干渉的である場合、その原因となっている対偶部をより限定的に特定できる。(3) すべての骨相閉路を数え上げる必要がないので、干渉性をより簡単に判定できる。

今後の課題として、干渉性を判定できる機械の範囲の拡大や、干渉性を考慮した設計法などを考えている。

謝辞 暖かい励ましを頂いている東京工業大学の名誉教授、教授の皆様に、心からお礼申し上げます。

付 録

A. 【補題1】の証明 補題中の第1命題から第2命題を導けることが、本報の議論では意味がある。

そこで, そのことを示す. 3・1~3・4 で述べた諸グラフの作り方によって, ループとその重みがどのように表されるかを調べればよい.

Mによる任意の骨相閉路の全振れ数が0であると仮定する. G_3 の任意のループ L_3 は, 第2対偶グラフ G_2 のある実質的ループ L_2 に対応する. L_2 は, 第1対偶グラフ G_1 のある実ループ L_1 に対応する. L_1 は, ある骨相閉路 $\mathbb{C}$ に対応する(を表す). 対応するものごうしは重み(全振れ数)が等しいので, $\tau(L_3) = \tau(L_2) = \tau(L_1) = \Omega(\mathbb{C}, M)$ である. 仮定から, $\Omega(\mathbb{C}, M) = 0$ である. これらの式から, $\tau(L_3) = 0$ がいえる. ■

B. 【性質2】の証明 (i), (ii) は容易にわかる. (iii) を示す. G のブロック B が複数のループを持つとする. G から $\bar{G}$ を作る操作によって, B は $\bar{B}$ のあるブロック $\bar{B}$ に変換される. $\bar{B}$ の任意の異なる二つのアーク e, f を考える. もはや, $e \bar{B} f$ ではない(①). 「 $e \bar{B} f$ ではない」と「 $\bar{B} - \{e, f\}$ は連結グラフである」とが等価である(②), ということが, $\bar{B}$ がブロックであることを使って示せる. 命題①, ②から, $\bar{B} - \{e, f\}$ は連結グラフである. これは, $\bar{B}$ のアーク連結度が3以上であることである. ■

C. 【補題2】の証明 補題中の第1命題から第2命題を導けることが, 本報の議論では意味がある. そこで, そのことを示す. G の任意のループの重みが0であるとする. そのとき, 【性質1】から, 「 G の任意のループの重みが0である」(③). G のブロックごとに考える. G から $\bar{G}$ を作る操作によって, G のブロックは【性質2】の(i)~(iii)のように変換されるが, $\bar{G}$ にブロックとして残るのは(ii)と(iii)の場合である.

【性質2】の(ii)で言及されている $\bar{G}$ のアーク(自己ループ) e の重みは, 命題③から, $\tau(e) = 0$ である.

(iii)で言及されている $\bar{G}$ のアーク連結度が3以上のブロック B を考える. メンガーの定理の変型*5から, $\bar{B}$ の任意のアーク e の端ノード u, v について, それらを結び, アークを共有しないパスが三つ以上ある. ところが, e 自身が u, v を結ぶパスである. よって, 「 e の端ノード u, v を結び, アークを共有しないパスが, e 自身以外に二つ以上ある」(④). 命題③, ④と下記の【補題4】から, e の重みは $\tau(e) = 0$ である. ■

D. 任意のループの重みが0であるグラフのアークの重みについて

【補題4】 グラフで, 任意のループの重みが0であり, かつ, アーク e の端ノード u, v を結び, アークを共有しないパスが, e 自身以外に二つあるとする. このとき, e の重みは $\tau(e) = 0$ である.

【証明】 題意のようなグラフを考える. 題意の二

Fig. 10 Two arc-disjoint paths P_1, P_2 joining the end nodes u, v of arc e

つのパス P_1 と P_2 が, ノード u, v 以外に n 個($n \geq 0$)のノードを共有するものとする. P_1 と P_2 が共有するノードを, P_2 に沿って u から v まで進むときに出会う順に並べたものを,

$$u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1} = v$$

とする. 図10の(a)は $n=0$ の場合, (b)は $n=3$ の場合の一例であり, (c)は n が一般の場合で P_1, P_2 を随所で省略して描いたものである. P_s ($s=1, 2$)上のパスで u_i と u_{i+1} ($0 \leq i \leq n$)を結ぶものを $P_s[u_i, u_{i+1}]$ で表す. また, パス P_1 からパス $P_1[u_i, u_{i+1}]$ 上の u_i, u_{i+1} 以外のすべてのノードとすべてのアークを除去した残りの部分を $P_1 - P_1[u_i, u_{i+1}]$ で表す.

図10からわかるように, $P_1[u_i, u_{i+1}]$ と $P_2[u_i, u_{i+1}]$ の合併, および, $P_s[u_i, u_{i+1}]$ と $P_1 - P_1[u_i, u_{i+1}]$ と e の合併($s=1, 2$)は, それぞれループをなす. したがって, ループの重みが0であることから,

$$\tau(P_1[u_i, u_{i+1}]) + \tau(P_2[u_i, u_{i+1}]) = 0$$

$$\tau(P_1[u_i, u_{i+1}]) + \tau(P_1 - P_1[u_i, u_{i+1}]) + \tau(e) = 0$$

$$\tau(P_2[u_i, u_{i+1}]) + \tau(P_1 - P_1[u_i, u_{i+1}]) + \tau(e) = 0$$

である. これら三つの式から,

$$\tau(P_2[u_i, u_{i+1}]) = 0 \quad (0 \leq i \leq n) \quad \dots\dots\dots (1)$$

を得る. ところで,

$$\tau(P_2) = \sum_{i=0}^n \tau(P_2[u_i, u_{i+1}]) \quad \dots\dots\dots (2)$$

である. 式(1), (2)から,

$$\tau(P_2) = \sum_{i=0}^n 0 = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

を得る. P_2 と e の合併はループをなすので,

$$\tau(P_2) + \tau(e) = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

である. 式(3), (4)から, $\tau(e) = 0$. ■

文 献

- (1) 遠藤 亨, 機論, C-60-576, (1994), 2837-2844.
- (2) 遠藤 亨, 機論, C-61-591, (1995), 4555-4562.
- (3) 日本数学会編, 数学辞典, 第3版, (1985), 878, 岩波書店.
- (4) Harary, F.(池田貞雄訳), グラフ理論, (1971), 64, 共立出版.
- (5) 服部嘉男・小澤孝夫, グラフ理論解説, (1974), 34, 昭晃堂.
- (6) Hain, K., Applied Kinematics, 2nd ed., (1967), 388, McGraw-Hill.
- (7) 文献(4), 73, 定理 5.12.

*5 グラフのアーク連結度が k 以上であるための必要十分条件は, 任意の二つのノードについて, それらを結び, アークを共有しないパスが k 個以上あることである⁽⁷⁾.