積層複合円筒殻の振動特性に関する研究*

(FW 対称積層円筒殻の固有振動数)

成 沢 哲 也^{*1}, 川 原 正 言^{*2}, 鈴 木 浩 平^{*2}

A Study on Vibration Characteristics of Laminated Composite Cylindrical Shells (Natural Frequencies of FW Symmetrically Laminated Composite Cylindrical Shells)

Tetsuya NARISAWA, Masanori KAWAHARA and Kohei SUZUKI

Filament-Wound (FW) formed highly anisotropic shell structures have recently been widely used in light weight applications as a space vehicle or a flexible manipulator. This paper discusses the influence of winding angle and lamination of FW forming on the natural frequencies for symmetrically graphite/epoxy laminated composite cylindrical shell simply supported at both ends. This free vibration analysis, which includes linear transverse shear deformation, shows that the fundamental or minimum frequencies are strongly dependent on the winding angle and value of shell geometry. The minimum frequencies are able to be higher with consideration of optimal lamination at various values of the shell geometry.

Key Words: Composite Material, Free Vibration, Natural Frequency, Eigen Analysis, Vibration of Continuous System, Angle-Ply Laminated Shell, FRP, FW Forming, Cylindrical Shell

1. 結 言

近年、軽量で剛性の高い繊維強化複合材料が航空宇宙機やロボットアームのような柔軟構造に利用されつつあり、その制御系設計を行うにあたっては複合材料構造物の振動特性を的確に把握することが必要である。しかし、炭素繊維強化複合材(CFRP)に代表されるハイモジュラスな材料で作られた構造の異方性を考慮した信頼性のある振動解析法や設計法の確立にはまだ不十分なところがある⁽¹⁾。著者らは前報⁽²⁾において直交異方性円筒殻の固有振動について解析し、異方性度合いと円筒形状が固有振動数に及ぼす影響を検討した。

ところで、一方向繊維強化材(ラミナ)は繊維と直角方向の伸張剛性およびせん断剛性が極端に低いので、さまざまな角度でラミナを積層することで曲げ剛性を高め固有振動数を大きくする。しかし、円筒が周方向にも振動する殻振動の場合は円筒軸方向と円周方向の振動が互いに関連し、積層形態によっては振動数

が大きく変化する。そこで、本報では中空チューブや圧力容器のような殻状構造を作るのに有利とされるフィラメント・ワインディング(FW: Filament-Winding)法で対称積層された円筒殻を取上げ、固有振動数と円筒剛性との関係について定量的に明らかにし、次に固有振動数を向上させるための積層構成について検討した。

2. 理 論

FW法とは樹脂を含浸させた繊維ロービングを任意の角度で型に巻き付け、樹脂を硬化させた後に離型する成形法である。図1にFW法で作られた長さ L 、曲率半径 R 、厚さ h の積層円筒を示す。座標軸は中央面を基準面にとり、母線方向を x 、周方向を y 、中央面を原点($z=0$)とする法線外向き方向を z とする。ラミナは繊維方向を1、それと直角方向を2、厚さ方向を3にとる。ヘリカル巻きでは $+\alpha^\circ$ と $-\alpha^\circ$ の2層のラミナが互いに織り合った状態に巻かれるが、その角度 $\pm\alpha^\circ$ を単に巻き角度 α で表記する。また、 $\alpha=0^\circ$ の場合を特にフープ巻き(hoop winding)と呼ぶ。

さて、 $\pm\alpha$ の両層に滑りがなく板厚方向に均質であると仮定するとFW単層材の $o-xyz$ 系の応力-ひずみ

* 原稿受付 1998年4月13日。

^{*1} 正員、東京都立工業高等専門学校(〒140-0011 東京都品川区東大井1-10-40)。

^{*2} 正員、東京都立大学(〒192-0364 八王子市南大沢1-1)。
E-mail: narisawa@tokyo-tmct.ac.jp

Fig.1 Coordinate system of FW laminated composite cylindrical shell

関係は直交異方性弾性論より次式で与えられる⁽³⁾。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{FW} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 \\ & & \bar{Q}_{33} & 0 \\ \text{symm.} & & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{FW}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}_{FW} = \begin{bmatrix} \kappa_2 \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & \kappa_1 \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}_{FW} \quad \dots\dots\dots (1)$$

式(1)の導出過程は付録に記す。ただし、 κ_1, κ_2 はそれぞれ γ_{zx}, γ_{yz} に対するせん断修正係数であり、 $\bar{Q}_{ij}$ は複合材料のヤング率 E_{11}, E_{22}, E_{33} 、せん断弾性係数 G_{12}, G_{23}, G_{31} 、ポアソン比 $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$ および巻き角度 α によって決まる剛性成分である。

式(1)から FW 単層材のひずみ-応力関係式が次のように導かれる。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{FW} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 \\ & & C_{33} & 0 \\ \text{symm.} & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{FW}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}_{FW} = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}_{FW} \quad \dots\dots\dots (2)$$

したがって、FW 単層材の等価剛性は次式のように換算できる。

$$E_{xx} = \frac{1}{C_{11}} = \frac{D}{\bar{Q}_{22}\bar{Q}_{33} - \bar{Q}_{23}^2},$$

$$E_{yy} = \frac{1}{C_{22}} = \frac{D}{\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{33} - \bar{Q}_{13}^2},$$

$$E_{zz} = \frac{1}{C_{33}} = \frac{D}{\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{22} - \bar{Q}_{12}^2},$$

$$G_{yz} = \bar{Q}_{44}, G_{zx} = \bar{Q}_{55}, G_{xy} = \bar{Q}_{66},$$

$$v_{xy} = E_{xx} \frac{\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{33} - \bar{Q}_{23}\bar{Q}_{13}}{D},$$

$$v_{zy} = E_{zz} \frac{\bar{Q}_{22}\bar{Q}_{13} - \bar{Q}_{12}\bar{Q}_{23}}{D},$$

$$v_{zx} = E_{zz} \frac{\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{23} - \bar{Q}_{12}\bar{Q}_{13}}{D},$$

$$D = \bar{Q}_{11}\bar{Q}_{22}\bar{Q}_{33} + 2\bar{Q}_{13}\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{23} - \bar{Q}_{13}\bar{Q}_{22}\bar{Q}_{13} - \bar{Q}_{33}\bar{Q}_{12}^2 - \bar{Q}_{11}\bar{Q}_{23}^2$$

$$\dots\dots\dots (3)$$

この FW 単層材を円筒状に積層した円筒殻断面内の任意の一点 (x, θ, z, t) の x, θ, z 軸方向の変位成分 u, v, w は殻厚方向の伸縮ひずみ φ_z を考慮した一次せん断変形理論⁽⁴⁾に基づく次式で表される。ただし、 x と y の間には $y = R\theta$ の関係がある。

$$u(x, \theta, z, t) = u^0(x, \theta, t) + z\varphi_x(x, \theta, t),$$

$$v(x, \theta, z, t) = v^0(x, \theta, t) + z\varphi_\theta(x, \theta, t), \quad \dots\dots (4)$$

$$w(x, \theta, z, t) = w^0(x, \theta, t) + z\varphi_z(x, \theta, t)$$

ここで、 $\varphi_x, \varphi_\theta$ は中央面に垂直に立てた θz 面、 xz 面のそれぞれ θ 軸と x 軸まわりの曲げによって生ずる回転角である。また、記号 $()^0$ は中央面上の物理量、 t は時間を表す。式(4)の変位場の仮定の基に Flügge の円筒幾何学を用いると、微小変形時のひずみは、

$$(\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{zx}) = (\varepsilon_x^0, \varepsilon_z^0, \gamma_{zx}^0) + z(\Gamma_x, \Gamma_z, \Gamma_{zx}),$$

$$(\varepsilon_\theta, \gamma_{\theta z}, \gamma_{x\theta}) = \frac{1}{1+z/R} \{ (\varepsilon_\theta^0, \gamma_{\theta z}^0, \gamma_{x\theta}^0) + z(\Gamma_\theta, \Gamma_{\theta z}, \Gamma_{x\theta}) + z^2(0, 0, \beta_{x\theta}) \}$$

$$\dots\dots\dots (5)$$

で定義できる。ただし、

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x}, \varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v^0}{\partial \theta} + w^0 \right), \varepsilon_z^0 = \varphi_z,$$

$$\gamma_{\theta z}^0 = \varphi_\theta + \frac{1}{R} \left(-v^0 + \frac{\partial w^0}{\partial \theta} \right),$$

$$\gamma_{zx}^0 = \varphi_x + \frac{\partial w^0}{\partial x}, \gamma_{x\theta}^0 = \frac{1}{R} \frac{\partial u^0}{\partial \theta} + \frac{\partial v^0}{\partial x}, \quad \dots\dots (6)$$

$$\Gamma_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \Gamma_\theta = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \varphi_z \right), \Gamma_z = 0,$$

$$\Gamma_{\theta z} = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_z}{\partial \theta}, \Gamma_{zx} = \frac{\partial \varphi_z}{\partial x},$$

$$\Gamma_{x\theta} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \right) + \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x}, \beta_{x\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x}$$

ここで、全層にわたるひずみエネルギーと運動エネルギーを求め、Hamilton の原理を適用すると次のような積層円筒殻の自由振動の支配方程式、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} &= I \ddot{u}^0 + J \ddot{\varphi}_x, \\
\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{Q_\theta}{R} &= I \ddot{v}^0 + J \ddot{\varphi}_\theta, \\
\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{N_\theta}{R} &= I \ddot{w}^0 + J \ddot{\varphi}_z, \\
\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - Q_x &= J \ddot{u}^0 + K \ddot{\varphi}_x, \quad \dots (7) \\
\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} - Q_\theta &= J \ddot{v}^0 + K \ddot{\varphi}_\theta, \\
\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} - \frac{M_\theta}{R} - N_z &= J \ddot{w}^0 + K \ddot{\varphi}_z,
\end{aligned}$$

$$(I, J, K) = \sum_{i=1}^N \int_{h_{i-1}}^{h_i} \rho^{(i)} \left(1 + \frac{z}{R}\right) (1, z, z^2) dz$$

を導出できる⁽⁴⁾。ただし、上式中の N_x, M_x, Q_x 等は

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} N_x & M_x \\ N_{x\theta} & M_{x\theta} \\ Q_x & R_x \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^N \int_{h_{i-1}}^{h_i} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}_{(i)} \left(1 + \frac{z}{R}\right) (1, z) dz, \\
N_z &= \sum_{i=1}^N \int_{h_{i-1}}^{h_i} (\sigma_z)_{(i)} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \\
\begin{bmatrix} N_\theta & M_\theta \\ N_{\theta x} & M_{\theta x} \\ Q_\theta & R_\theta \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^N \int_{h_{i-1}}^{h_i} \begin{bmatrix} \sigma_\theta \\ \tau_{\theta x} \\ \tau_{\theta z} \end{bmatrix}_{(i)} (1, z) dz \quad \dots (8)
\end{aligned}$$

で定義される合応力、合モーメントである。また、式(7)、(8)において h_i は中央面から i 次ラミナ上面までの距離、 N は総積層数、 $\rho^{(i)}$ は i 次ラミナの密度、また $(\ddot{}) \equiv \partial^2()/\partial t^2$ 、 I, J, K はそれぞれ質量慣性、カップリング慣性、回転慣性である。

式(8)に式(1)を代入すると次式のように、合応力、合モーメントを中央面の変位と回転角を用いて表すことができる。 $\{\}^T$ は列ベクトルを表す。

$$\begin{aligned}
\{N_x, N_\theta, N_z, Q_\theta, Q_x, N_{x\theta}, N_{\theta x}, M_x, M_\theta, M_z, R_\theta, \\
R_x, M_{x\theta}, M_{\theta x}\}^T = [G] \{u^0, v^0, w^0, \varphi_x, \varphi_\theta, \varphi_z\}^T \quad \dots (9)
\end{aligned}$$

なお、 $[G]$ の成分の詳細は紙面の都合で省略する。

本計算では境界条件 (SS 2) として、

$$N_x = M_x = v^0 = w^0 = \varphi_\theta = \varphi_z = 0; x=0, L \quad (10)$$

を与え、この境界条件を満足する振動変位と回転角を次式で近似する。

$$\begin{aligned}
(u^0, \varphi_x) &= (A_{mn}, D_{mn}) \cos p_m x \cos n\theta e^{i\omega t} \\
(v^0, \varphi_\theta) &= (B_{mn}, E_{mn}) \sin p_m x \sin n\theta e^{i\omega t} \quad \dots (11) \\
(w^0, \varphi_z) &= (C_{mn}, F_{mn}) \sin p_m x \cos n\theta e^{i\omega t}
\end{aligned}$$

ただし、式中の $A_{mn} \sim F_{mn}$ は独立な未定係数、 m, n はそれぞれ振動モード形を表す軸方向半波数、円周方向全波数、 ω は固有円振動数 [rad/s]、また $p_m = m\pi/L$ である。式(11)を用いて合応力、合モーメントを導き、支配方程式(7)に代入すると $A_{mn} \sim F_{mn}$ を未知変位

ベクトル成分とする次の連立方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
([K] - \lambda[M])(\Delta) &= \{0\}; (\lambda = \omega^2), \\
\{\Delta\} &= \{A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}, E_{mn}, F_{mn}\}^T \quad \dots (12)
\end{aligned}$$

ここで、 $[K]$ は積層円筒殻の剛性行列、 $[M]$ は慣性行列でそれぞれ (6×6) 行列である。さらに、式(12)が有意な解をもつための条件から、

$$|[K] - \lambda[M]| = 0 \quad \dots (13)$$

となる振動数方程式が得られ、これを数値的に解き各モード (m, n) に対する固有円振動数 ω を決定した。

3. 解析結果および考察

式(13)から求まる軸方向第1次モード ($m=1$) の固有振動数を計算した。FW 積層する高強度グラファイト/エポキシ複合材の材料定数を表1に示す。円筒の曲率半径 R は 0.05 m とする。また、1層の厚みを 0.000 2 m、積層数 N を与えたときの厚みは $0.000 2 \times N$ m となるようにした。さらに、巻き角度の違いで層厚は変化しないと仮定する。なお、式(1)で用いるせん断修正係数の値は $\kappa_1 = \kappa_2 = 5/6$ とした。

3.1 FW 材の等価剛性 図2、3は式(3)から計算されるFW材の等価剛性である⁽⁵⁾。図2の実線、破線はそれぞれヤング率とポアソン比、図3の実線はせ

Table 1 Material properties for FW lamina

Graphite/Epoxy	
$E_{11} = 138 \text{ GPa}, E_{22} = E_{33} = 6.9 \text{ GPa}$	
$G_{12} = 0.6 E_{22}, G_{23} = 0.5 E_{22}$	
$\nu_{12} = \nu_{23} = 0.3, \rho = 1570 \text{ Kg/m}^3$

Fig. 2 Normal stiffness and poisson's ratio of FW materials for various winding angle

Fig. 3 Shear stiffness and shear stiffness ratio to normal stiffness E_{xx} of FW materials for various winding angle

Fig. 4 Circumferential nodal patterns

せん断剛性、一点鎖線はせん断剛性を E_{xx} で除したせん断剛性比である。面内の弾性係数 E_{xx} , G_{xy} , E_{yy} はそれぞれ巻き角度 α が 0° , 45° , 90° のときに極値をもつ曲線を描く。また、面外のせん断剛性 G_{yz} , G_{zx} はそれぞれ 0° , 90° で面内せん断剛性 G_{xy} と同じ値となる。しかし、 E_{zz} は巻き角度に依存せず一定値をとる。

この結果から、面内せん断剛性比を高めるには 55° 巻き、周方向伸張剛性と面外のせん断剛性比を高めるには 90° 巻きが適しているといえる。特に、巻き角度が小さい場合には面内と面外の双方のせん断剛性比が極端に小さくなることに注意しなければならない。以上のことから、FW 材では巻き角度を変えることで構造剛性のコントロールが可能になることがわかる。また、 $\alpha=25^\circ$ 近傍で面内ポアソン比 ν_{xy} は 1 を越えるが、これは文献(6)、(7)と同様の結果となっている。

3・2 固有振動数に対する円筒形状と巻き角度の影響 一般の円筒は軸方向だけでなく周方向にも振動モードが発生する。図 4 にその周方向モードを示す。

Fig. 5 Comparison of fundamental frequency to that obtained by beam theory; $m=1$, $n=1$, $h=0.0002$ m

Fig. 6 Comparison of fundamental frequency to that obtained by hoop winding forming; $m=1$, $n=1$, $h=0.0002$ m

$n=0$ は円筒殻が半径方向にふくらむ伸縮振動、 $n=1$ は断面が変化しないはり曲げ振動である。本論文では、 n が 2 以上の振動を殻振動と呼ぶ。ところで、曲率半径に対して長い円筒の場合ははり曲げ振動を示し固有振動数の計算に初等はり理論が使える⁽⁸⁾。しかし、極度に異方性を有する複合材で作られた円筒ではせん断変形が曲げ振動に及ぼす影響を無視できなくなり、長い円筒でも周方向波数 n は高次をとる⁽²⁾。その場合には円筒をはりでなく殻として取扱う必要がある。ここでは、円筒形状や巻き角度の違いが周方向モードとともに固有振動数に及ぼす影響については理

論と殻理論のそれぞれについて調べる。

3・2・1 はり曲げ振動の場合 図5, 6にはり曲げ振動の場合の固有円振動数（基本振動数）を巻き角度 α とともに示す。図5は Euler-Bernoulli の初等はり理論を基準にして Timoshenko のはり理論および殻理論（本解析に基づくもの）から求まる振動数を示したものである。ただし、Euler-Bernoulli のはり理論は式(14)、Timoshenko のはり理論は式(15)で表される⁽⁹⁾。ここで、 I_p は断面二次モーメント、 A は断面積、 ρ は密度である。

$$\omega_{beam} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{E_{xx} I_p}{\rho A}} \dots\dots\dots (14)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{E_{xx} I_p}{\rho A} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \left\{ 1 - \frac{I_p}{A} \left(1 + \frac{E_{xx}}{0.75 G_{xy}} \right) \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \right\}} \dots\dots\dots (15)$$

図からわかるように Timoshenko のはり理論および殻理論から求まる振動数比は L/R 比が小さいほど低下する。これは短い円筒ほどせん断変形の影響が大きいためである。ところで、Timoshenko のはり理論は面内せん断変形のみを、殻理論は面内と面外の両方のせん断変形を考慮している。したがって、極端に短いとき、例えば図5の $L/R=1$ の場合をみると、 $\alpha < 70^\circ$ では Timoshenko のはり理論から求まる振動数は殻理論の値より大きい。つまり、 $\alpha < 70^\circ$ では面外せん断効果が顕著に現れるが Timoshenko のはり理論ではそれを考慮していないので結果として振動数を大きく評価するのである。また、 L/R によらず $\alpha=40^\circ$

～ 70° で振動数比はピーク値を示す、これは面内せん断剛性比 G_{xy}/E_{xx} (図3) がこの範囲で大きくなることが原因である。

殻理論より求まる振動数に対して巻き角度の影響をさらに検討する。フープ巻き ($\alpha=90^\circ$) を基準に無次元化した基本振動数を図6に示す。振動数比のピーク値は L/R 比が小さい場合に 90° 寄りに現れる。これは、巻き角度を大きくすることで周方向に繊維が配向され面外せん断剛性比が高まるためである。ただし、 $L/R=1$ のとき 45° 以下に巻くと 90° 巻きの固有振動数より小さくなることは文献(6)でも指摘している。一方、 L/R 比が大きい場合はせん断変形が微小のため 0° 配向することで軸方向の伸張剛性強化を行って固有振動数を大きくできる。

3・2・2 一般殻振動の場合 一般に円筒殻を取り扱う場合、周方向波数 n のとり方によって固有振動数は変化する。図7に直交異方性円筒殻について周方向モードを許容する場合の固有振動数係数を示す。固有振動数係数（以下振動数係数）とは固有円振動数 ω を参照固有円振動数 ω_0 で除して無次元化したものである。ただし $\omega_0 = (1/R) \sqrt{E_{22}/\rho}$ とする。なお、振動数は整数値 n に対して離散化された値をとるがここでは連続な線で結んだ。

図7から n が高次になると巻き角度が定まれば円筒形状 L/R 比によらず振動数係数は一定値に収束する。また、 $n=1$ をみた場合、 90° 巻きは円筒長さが長くなるとともに急に振動数係数が低下することが認められる。

さらに、巻き角度をパラメータとした場合の振動数係数を図8に詳しく示す。 L/R 比によらず、高次モードでは巻き角度を大きくすれば振動数係数が増す。特に短い円筒(a)では $\alpha=60^\circ \sim 90^\circ$ で巻けばすべてのモードで振動数係数を大きくできる。ところが、(b)、(c)からわかるように円筒が長くなるとともに低次モードの振動数係数が低下する。その低下の割合は 90° 巻きに近いほど大きい傾向がみられる。

3・3 最低固有振動数に対する積層形態の影響

一般殻振動の場合、振動によって生ずる面内と面外のひずみエネルギーの和が極小となる n の値が存在し振動数は最小となる⁽¹⁰⁾。その最小値が最低固有振動数である。ここでは最低固有振動数係数（以下最低振動数係数）に着目して、その振動数の向上と積層形態との関係について検討する⁽¹¹⁾⁽¹²⁾⁽¹³⁾。

3・3・1 単層積層の場合 図8からも最低振動数係数を示す周方向モードは円筒が長くなるとともに低

Fig. 7 Frequency ratios of orthotropic cylindrical shell for various circumferential mode n ; $m=1$, $h=0.0002$ m

Fig. 8 Frequency ratios of angle-ply cylindrical shell for various circumferential mode n ; $m=1$, $h=0.0002$ m

次に移行することがわかる。 $L/R=10$ では巻き角度の選択で最低振動数係数は変わらない。しかし、最低振動数係数を示す n は巻き角度が大きくなるほど小さい値となるので、巻き角度の選択で断面の形状（周方向モード）制御が可能になるといえる。さらに、 $L/R=100$ では $n=1$ のはり曲げ振動のときの振動数が最低振動数係数となることが再確認される。

図9は単層巻き円筒についての最低振動数係数を巻き角度に対して連ねた曲線である。図9中の数値は対応する n を表す。 $L/R=1$ では $\alpha=30^\circ$ 近傍に、 $L/R=10$ では $\alpha=30^\circ$ と $\alpha=50^\circ$ の2点近傍に、 $L/R=100$ では $\alpha=0^\circ$ に極点をもつ曲線を描く。したがって、最低振動数係数の最大値は短い円筒では巻き角度 30° 近

傍、長い円筒では巻き角度 0° 近傍に存在することがわかる。

3.3.2 三層対称積層の場合 図10に三層対称積層の場合を示す。図中の破線は巻き角度が三層とも同じ積層構成 $[\theta/\theta/\theta]$ の場合である。 $L/R=1$ では $\theta=30^\circ$ 、 $L/R=10$ では $\theta=35^\circ$ で最大値を取り、単層積層の場合と同様の傾向を示す。よって、各ラミナの巻き角度が同一の場合は $\theta=30^\circ$ 近傍で最低固有振動数を最大にできる。

さて、対称積層で各層の巻き角度が異なる構成は $[\theta/\alpha/\theta]$ である。そこで、 α と θ を変化させて計算したところ、 $L/R=1$ では $[55^\circ/0^\circ/55^\circ] \sim [55^\circ/10^\circ/55^\circ]$ 構成のときに $[30^\circ/30^\circ/30^\circ]$ と比べて最低振動数係数

(a) $L/R=1, 2, 3$ and 4 (a) $L/R=1$ (b) $L/R=10, 20, 30, 50$ and 100 (b) $L/R=10$ Fig.9 Minimum frequency ratios of single layered cylindrical shell; $m=1$, $h=0.0002$ m

が15.5%向上する。また、 $L/R=10$ では $[75^\circ/0^\circ/75^\circ] \sim [75^\circ/10^\circ/75^\circ]$ 構成のとき $[35^\circ/35^\circ/35^\circ]$ と比べて29.2%向上する。しかしながら、 $L/R=100$ の場合は $[0^\circ/0^\circ/0^\circ]$ の構成のときに最大であり、巻き角度の変化で最低固有振動数を高めることはできない。したがって、三層積層の場合、長くない円筒では中央層が $0^\circ \sim 10^\circ$ 巻き、内外層が $55^\circ \sim 75^\circ$ 巻きのときに最大の最低固有振動数を与える。

3・3・3 多層対称積層の場合 一例として図11に L/R が1と10について1～5層積層した場合の最低振動数係数を示す。太線は各層の巻き角度が同一構成のときの値である。それを積層数を N とする記号 $[]_N$ で表記する。また $L/R=1$ は $\theta=30^\circ$ 近傍に極点をもつ曲線、 $L/R=10$ は $\theta=30^\circ$ 近傍と $\theta=70^\circ \sim 90^\circ$ の2点に極点をもつ曲線となり単層巻きの場合と同様の傾向を示す。どちらの場合も最大値は $\theta=25^\circ$

(c) $L/R=100$ Fig.10 Effect of lamination and winding angle for three layered shell on minimum frequencies; $m=1$, $h=0.0002 \times 3$ m

(a) $L/R=1$ (b) $L/R=10$

Fig. 11 Effect of lamination and winding angles for multilayered shell on minimum frequencies; $m=1$, $h=0.0002 \times N$ m

～35°に存在し、層数 N によらない。

ところで、各層の巻き角度を変える場合、三層では中央層に0°～10°巻きを施す構成が最も有効であったが、これを多層積層の場合で確かめてみる。ただし、

実際のFW成形では0°巻きが困難であるので、中央層を30°巻きにした場合の値も同時にプロットしてある（破線、一点鎖線）。四層では、図11(a), (b)とも中央層に0°巻きを施す $[\theta/0^\circ/0^\circ/\theta]$ 構成は有効である。また、五層においては対称積層構成として $[\theta/\alpha/\alpha/\theta]$ と $[\theta/\theta/\alpha/\theta/\theta]$ 構成の2とおりを考えることとし、 $L/R=1$ のとき $[\theta/0^\circ/0^\circ/\theta]$ 、 $L/R=10$ のとき $[\theta/0^\circ/0^\circ/0^\circ/\theta]$ が有効であった。具体的には、中央層に0°巻き、内外層に55°～75°巻きを施すと振動数は向上するが、円筒が長い場合は0°巻きの層を厚めに、短い場合には55°～75°巻きの層を厚めに施す形態が望ましいといえる。これは、せん断剛性および軸方向伸張剛性を強化する割合が形状によって異なるからである。また、中央層を30°にする場合も同様の結果を示し、むしろ $L/R=1$ では中央層を0°にする場合より振動数を大きくする効果が認められた。

4. 結 言

両端単純支持されたFW対称積層円筒殻の円筒形状と積層形態の違いが軸方向一次モード($m=1$)の固有振動数に及ぼす影響について論じ次の結果を得た。

(1) FW材の三次元等価剛性を計算し、面内せん断剛性比を高めるには55°巻き、面外せん断剛性比を高めるには90°巻きが適していることがわかった。したがって、巻き角度を変えることで、FW材の剛性をコントロールすることが可能になるといえる。

(2) 単層ではり曲げ振動($n=1$)の場合、短い円筒($L/R=1$)では70°、長い円筒($L/R=100$)では0°巻きすることで基本振動数を最大化できる。また、固有振動数の計算式の選択には巻き角度が小さい場合には長い円筒であっても面内と面外のせん断剛性が極端に低くなるのでは理論は使えず殻理論の採用が望ましい。

(3) 単層で周方向振動を許容する一般殻振動の場合、最低固有振動数の最大値は短い円筒では30°近傍、長い円筒では0°に存在する。また、最低固有振動数を示す周方向モード n は円筒が長くなるとともに低次に移行する。

(4) 多層積層することで最低固有振動数を最大化する積層形態は円筒形状によっても変わるが、巻き角度を中央層に小さく(0°～10°)、内外層に巻き角度を大きく(55°～75°)すると効果がある。さらに、円筒が短くなるとともに全厚に対する55°～75°層の厚みの割合を大きくとることが望ましい。

付 録

円筒殻は巻き角 $+\alpha^\circ$ の層と $-\alpha^\circ$ 層が同一ラミナ内で織り合された状態 (図 12) で巻き上がり, 成形後は一種のバイアス構成となる. このことから, 以下の仮定を設けることができる.

①繊維と樹脂はそれぞれ均質な弾性体である.

② $+\alpha$, $-\alpha$ 層は同質で同じ層厚をもち, 層間にく離やずれはないとすると, 両層のひずみはつねに同じである.

③負荷は $+\alpha$, $-\alpha$ 層のそれぞれが均等に受ける.

以上の仮定から, FW 単層材の $o-xyz$ 系の構成式は次式のようにになる.

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{FW} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_a + \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{-\alpha} \\
 &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ & & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ & & & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ & & & & \bar{Q}_{55} & 0 \\ & & & & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_a \\
 &\quad + \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ & & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ & & & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ & & & & \bar{Q}_{55} & 0 \\ & & & & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_{-\alpha} \\
 &\quad \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{FW} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \bar{Q}_{44} & 0 & 0 \\ & & & & \bar{Q}_{55} & 0 \\ & & & & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_{FW} \\
 &\quad \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{FW}
 \end{aligned}$$

Fig. 12 Model for FW-lamina

したがって, $\bar{Q}_{16}$, $\bar{Q}_{26}$, $\bar{Q}_{36}$ および $\bar{Q}_{45}$ が剛性行列から消え, 垂直ひずみとせん断ひずみのカップリングがなくなる. 上式にせん断修正係数 κ_1 , κ_2 をほどこしまとめると式 (1) を得る.

文 献

- (1) Noor, A.K. and Burton, W.S., Assessment of Computational Models for Multilayered Composite Shells, *Appl. Mech. Rev.*, **43**-4 (1990), 67-97.
- (2) 成沢哲也・川原正言・鈴木浩平, 積層複合円筒殻の振動特性に関する研究 (材料異方性および円筒形状が固有振動数に及ぼす影響), 機論, **64**-621, C (1998), 1479-1484.
- (3) 成沢哲也・川原正言・鈴木浩平, FW 積層複合厚肉円筒殻の振動特性に関する研究 (第2報), 機講論, No. **96**-5, I-A (1996), 99-102.
- (4) 成沢哲也, 積層複合円筒殻の自由振動解析に用いる曲げ理論と殻理論について, 東京都立工業高等専門学校研究報告, **33** (1998), 31-36.
- (5) 植村益次・山脇弘一・阿部慎蔵・井山向史, フィラメント・ワインディング材の剛性について, 東京大学宇宙航空研究所報告, **4**-3 B (1968), 448-463.
- (6) 植村益次, 積層複合円筒殻の振動, 日本航空宇宙学会誌, **27**-307 (1979), 382-388.
- (7) 植村益次・山田直樹, 炭素繊維強化プラスチック材の弾性係数, 材料, **24**-257 (1975), 156-163.
- (8) 前川善一郎, 複合材料工学入門 (7), 成形加工, **7**-2 (1995), 119-125.
- (9) 中川憲治・室津義定・岩壺卓三, 工業振動学 (第2版), (1994), 111-124, 森北出版.
- (10) 小林繁夫, 振動学, (1994), 210-221, 丸善.
- (11) 小林繁夫・長島利夫, CFRP 積層円筒殻の振動特性, 日本航空宇宙学会誌, **34**-389 (1986), 332-339.
- (12) 太田佳樹・成田吉弘・小林幸徳・山田元, アングルブライ積層厚肉円筒殻の自由振動, 機論, **57**-538, C (1991), 1815-1823.
- (13) 太田佳樹, 積層複合円筒殻の固有振動数の最大化について, 北海道工業大学研究紀要, **20** (1992), 31-39.