静止非線形ばね特性をもつクラック軸の振動* (調和振動と 1/2 次分数調波振動)

石 田 幸 男^{*1}, 呂 峰^{*1}

Vibrations of a Cracked Rotor with Static Nonlinear Spring Characteristics (Harmonic Resonance and 1/2-Order Subharmonic Resonance)

Yukio ISHIDA and Feng LU

In order to detect a crack due to fatigue, most of the previous researches on cracked rotors investigated vibrations which appear due to the piecewise linear spring characteristics of cracked rotors. They assumed that the restoring force of the elastic shaft is linear in the state with no crack. However, in rotating machinery, there are various causes which induce nonlinearity, such as clearance in bearings and oil films. As the nonlinearity induce similar kinds of resonances, the diagnoses proposed hitherto cannot be applied. In this paper, we investigate vibration characteristics of a rotor which has both static nonlinearity due to a mechanical element and rotating nonlinearity due to a crack. Especially, a harmonic resonance and a 1/2-order subharmonic resonance are investigated in detail by theoretical analyses and numerical simulations.

Key Words: Cracked Rotor, Nonlinear Resonance, Static Nonlinearity, Rotating Nonlinearity, Vibration of Rotating Body, Harmonic Resonance, Subharmonic Resonance

1. ま え が き

回転機械に発生したクラックを振動特性の変化から見つけるこれまでの研究の多くは, もとの系が線形である場合を扱っている⁽¹⁾⁽²⁾. これまでの振動診断法は, クラックの発生によって, 回転軸系が線形系から非線形係数励振系に変化したとき発生する振動に注目している. 著者らもこのような系に発生する主危険速度付近の調和振動⁽³⁾⁽⁴⁾, 二次超調波振動⁽⁵⁾, 1/2 次分数調波振動と 3/2 次超分数調波振動⁽⁶⁾ について調べた.

実際の機械では, 軸受のクリアランス, 油膜, 摩擦などさまざまな原因によって復元力に非線形性が現れ, それにより各種の非線形共振現象が発生する. したがって, このような非線形系にクラックが発生した場合, 元の系の非線形性による共振現象と, クラックによる共振現象との区別が難しく, これまで提案されている振動診断法が適用できない.

本研究では, 各種機械要素によって作られる非線形性を静止した非線形性, クラックによって作られる非

線形性を回転する非線形性とよぶ. そして, クラックがない状態で系が非線形ばね特性をもつ場合にも適用可能な振動診断システム開発を目的として, クラックによって発生する各種の共振現象が, 静止した非線形性の存在によってどのように影響を受けるかを明らかにする. 本論文では, まず数値シミュレーションによって主危険速度の約 3 倍までの広い回転速度範囲で発生する変化を調べ, さらに代表例として主危険速度付近の調和振動と 1/2 次分数調波振動を取上げ, それについて理論解析も行い, 詳細に検討する.

2. ばね特性と運動方程式

図 1 に, クラックをもつ弾性軸の中央に 1 個の回転体を取付けた系を示す. この場合, たわみ振動と傾き振動は連成せず独立した二自由度系となるが, ジャイロモーメントの効果を考慮するため, ここでは二自由度傾き振動系を考える. 軸受にクリアランスがあるため, 軸の復元力是非線形となる. z 軸を軸受中心線に一致させた直交座標系 $O-xyz$ を考える. 円盤の取付位置での軸の傾き θ の xz , yz 平面上への投影を θ_x , θ_y とし, それらを用いて静止直交座標系 $O-\theta_x\theta_y$ を定義する. 同様に, その x' 軸をクラックの境界と一致させた回転座標系 $O-x'y'z$ を設け, 傾き θ の zx' 平

* 原稿受付 1998 年 8 月 14 日.

^{*1} 正員, 名古屋大学大学院工学研究科 (☎ 464-8603 名古屋千種区不老町 1).

E-mail: ishida@ishidalab.nuem.nagoya-u.ac.jp

Fig. 1 Model of cracked rotor

面および zy' 平面への投影成分 θ'_x , θ'_y を用いて回転直交座標系 $O-\theta'_x\theta'_y$ を定義する。 $\theta'_y > 0$ のとき、クラックが開いて軸剛性が小さくなり、 $\theta'_y < 0$ のとき、閉じて軸剛性が大きくなるので、その結果、クラックは断片線形様式の非線形ばね特性をもつ。 θ'_x 方向についてはクラックによる影響は現れない。したがって、それぞれ zx' 平面と zy' 平面で働く復元モーメントの成分 M'_x , M'_y は次式のように表現できる。

$$\left. \begin{aligned} -M'_x &= k'_x \theta'_x \\ -M'_y &= (k'_y - \Delta k'_y) \theta'_y \quad (\theta'_y > 0) \\ -M'_y &= (k'_y + \Delta k'_y) \theta'_y \quad (\theta'_y < 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

このばね特性を、一般的に小さいと考えられる五乗以上の高次項を省略し、次式のようなべき級数の多項式で近似する。

$$\left. \begin{aligned} -M'_x &= k'_x \theta'_x \\ -M'_y &= k'_y \theta'_y + \varepsilon_2 \theta'^2_y + \beta_3 \theta'^3_y + \varepsilon_4 \theta'^4_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

さらに、既報⁽⁴⁾ で用いた実験装置の例について、クラック軸のばね特性を最小二乗法により近似してこれらの係数を求めた結果、3乗項の係数 β_3 が2乗項の係数 ε_2 と4乗項の係数 ε_4 の値に比べて小さいことが明らかとなったので、以下ではこれも省略する。式(1)の表現を用いるものを断片線形モデル、近似式(2)を用いるものをべき級数モデルとよぶ。軸受部が線形支持の場合のべき級数モデルの運動方程式は、既報⁽⁵⁾ に示されている。ここでは、軸受部に起因する静止非線形性がある場合に系にクラックが発生したときの運動方程式を示す。いま、回転軸の極慣性モーメントの直径に関する慣性モーメントに対する比を i_p 、軸回転速度を ω 、減衰係数を c 、動不釣り合いを τ 、 θ'_x 軸から測ったその角位置を α とする。また重力 mg に対応する M_0 と、遠心力に対応する $M = (1 - i_p)\tau\omega^2$ を考える。静止非線形性をもつべき級数モデルの運動方程式は、既報⁽⁵⁾ に静止非線形項 $n_{\theta x}$, $n_{\theta y}$ を付け加えて、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_x + i_p \omega \dot{\theta}_y + c \dot{\theta}_x + \theta_x + \Delta(\theta_x C_2 + \theta_y S_2) \\ + N_{\theta x} + n_{\theta x} &= M \cos(\omega t + \alpha) \\ \ddot{\theta}_y - i_p \omega \dot{\theta}_x + c \dot{\theta}_y + \theta_y + \Delta(\theta_x S_2 - \theta_y C_2) \\ + N_{\theta y} + n_{\theta y} &= M \sin(\omega t + \alpha) + M_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

ここに、簡単のため、 $S_n = \sin n\omega t$, $C_n = \cos n\omega t$ の記号を用いた。クラックによる回転する非線形項は静止座標系で表すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_{\theta x} &= (\varepsilon_2/4) \{ (-3S_1 + S_3)\theta_x^2 + 2(C_1 - C_3)\theta_x\theta_y \\ &\quad - (S_1 + S_3)\theta_y^2 \} + (\varepsilon_4/16) \{ -(10S_1 - 5S_3 \\ &\quad + S_5)\theta_x^4 + 4(2C_1 - 3C_3 + C_5)\theta_x^3\theta_y - 6(2S_1 \\ &\quad + S_3 - S_5)\theta_x^2\theta_y^2 + 4(2C_1 - C_3 - C_5)\theta_x\theta_y^3 \\ &\quad - (2S_1 + 3S_3 + S_5)\theta_y^4 \} \\ N_{\theta y} &= (\varepsilon_2/4) \{ (C_1 - C_3)\theta_x^2 - 2(S_1 + S_3)\theta_x\theta_y \\ &\quad + (3C_1 + C_3)\theta_y^2 \} + (\varepsilon_4/16) \{ (2C_1 - 3C_3 \\ &\quad + C_5)\theta_x^4 - 4(2S_1 + S_3 - S_5)\theta_x^3\theta_y + 6(2C_1 \\ &\quad - C_3 - C_5)\theta_x^2\theta_y^2 - 4(2S_1 + 3S_3 + S_5)\theta_x\theta_y^3 \\ &\quad + (10C_1 + 5C_3 + C_5)\theta_y^4 \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

次に軸受に起因する静止非線形ばね特性を考える。非線形項として座標の3乗まで考えると対応するポテンシャルエネルギー V と、それから導びかれる非線形項は次式で与えられる⁽⁷⁾⁽⁸⁾。

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{2}(\theta_x^2 + \theta_y^2) + V_N = \frac{1}{2}(\theta_x^2 + \theta_y^2) \\ &\quad + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=3}}^3 \varepsilon_{ij} \theta_x^i \theta_y^j + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=4}}^4 \beta_{ij} \theta_x^i \theta_y^j \\ n_{\theta x} &= -\frac{\partial V_N}{\partial \theta_x} = 3\varepsilon_{30}\theta_x^2 + 2\varepsilon_{21}\theta_x\theta_y + \varepsilon_{12}\theta_y^2 \\ &\quad + 4\beta_{40}\theta_x^3 + 3\beta_{31}\theta_x^2\theta_y + 2\beta_{22}\theta_x\theta_y^2 + \beta_{13}\theta_y^3 \\ n_{\theta y} &= -\frac{\partial V_N}{\partial \theta_y} = \varepsilon_{21}\theta_x^2 + 2\varepsilon_{12}\theta_x\theta_y + 3\varepsilon_{03}\theta_y^2 \\ &\quad + \beta_{31}\theta_x^3 + 2\beta_{22}\theta_x^2\theta_y + 3\beta_{13}\theta_x\theta_y^2 + 4\beta_{04}\theta_y^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

これを変換式

$$\theta_x = \theta \cos \varphi, \quad \theta_y = \theta \sin \varphi \quad \dots\dots\dots (6)$$

によって極座標表現に変換すると

$$\left. \begin{aligned} V &= (1/2)\theta^2 + (\varepsilon_c^{(1)} \cos \varphi + \varepsilon_s^{(1)} \sin \varphi \\ &\quad + \varepsilon_c^{(3)} \cos 3\varphi + \varepsilon_s^{(3)} \sin 3\varphi)\theta^3 \\ &\quad + (\beta_c^{(0)} + \beta_s^{(2)} \cos 2\varphi + \beta_s^{(2)} \sin 2\varphi \\ &\quad + \beta_c^{(4)} \cos 4\varphi + \beta_s^{(4)} \sin 4\varphi)\theta^4 \\ &= (1/2)\theta^2 + \{ (\varepsilon_c^{(1)} \cos(\varphi - \varphi_1) \\ &\quad + \varepsilon_s^{(3)} \sin 3(\varphi - \varphi_3))\theta^3 \\ &\quad + \{ (\beta_c^{(0)} + \beta_s^{(2)} \cos 2(\varphi - \varphi_2) \\ &\quad + \beta_s^{(4)} \cos 4(\varphi - \varphi_4))\theta^4 \} \end{aligned} \right\} \dots\dots (7)$$

となる。ここで式(5)と(7)の諸係数は既報⁽⁸⁾ で与えられている。

(a) $\varepsilon_s^{(1)}=0.05$

(b) $\varepsilon_s^{(1)}=0.04$

Fig. 2 Resonance curves of a rotor with no crack and with only static nonlinearity by numerical simulation

3. クラックロータのシミュレーション

本章では、解析に先立ち、運動方程式に断片線形モデルの表現を用いた数値シミュレーションを行い、クラックロータで発生する振動の種類と性質が、静止非線形性の有無によりどのように異なるかを明らかにする。

3.1 クラックのない非線形系 ここでは、式(7)の非線形成分のうち、通常実機で最も大きく現れやすい非対称性の非線形成分 $\varepsilon_c^{(1)}$, $\varepsilon_s^{(1)}$ のみを考える。そのシミュレーション結果を図2(a), (b)に示す。既報⁽⁶⁾で示したように、この非線形成分が存在するときは、各種の分数調波振動と和差調波振動のうち、前向き $1/2$ 次分数調波振動 $[+1/2\omega]$ と和差調波振動 $[p_f - p_b = \omega]$ だけが発生している。ただし、重力が作用するこの水平軸系では、非線形成分の存在する方向と重力との位置関係が、それらの発生に強さに影響している。なお、 $\varepsilon_c^{(1)}$, $\varepsilon_s^{(1)}$ の存在により後向きの調和振動も発生している。

以下の数値シミュレーションと理論解析では、この図2(b)の場合を例にとり調べる。

3.2 静止非線形性をもたないクラック軸 これはこれまで数多くの論文で取り扱われているクラック軸であるが、比較のため、線形系にクラックが発生した場合のシミュレーションの結果を図3に示す。この

Fig. 3 Resonance curves of a cracked rotor with no static nonlinearity by numerical simulation

(a) $\varepsilon_s^{(1)}=0.03$

(b) $\varepsilon_s^{(1)}=0.04$

Fig. 4 Resonance curves with only static and rotating nonlinearity by numerical simulation

場合、次の振動が発生している。

- 前向きの調和振動 $[+\omega]$
- 後向きの調和振動 $[-\omega]$
- 前向きの2次超調波振動 $[+2\omega]$
- 前向きの3次超調波振動 $[+3\omega]$
- 前向きの $3/2$ 次超分数調波振動 $[+3/2\omega]$
- 前向きの $1/2$ 次分数調波振動 $[+1/2\omega]$
- 和差調波振動 $[p_f - p_b = \omega]$

ここに、記号 $[ ]$ には、その発生振動数、あるいはそれが発生する共振点で成立する関係を示してある。符号の“+”は前向き、“-”は後向き振れ回り運動を示す。

クラックがなければ、主危険速度付近の共振のみが発生するので、これまでの振動診断システムではそのほかの共振の発生をクラックの検出に利用している。

3.3 静止非線形性とクラックが共存する場合

クラック軸に静止非線形性が加わった場合、共振現象がどのように変化するかを図4に示す。各共振が受ける影響は大きく三つに分かれる。(1)後向き $1/2$ 次分数調波振動 $[-1/2\omega]$ 、後向き 2 次超調波振動 $[-2\omega]$ 、後向き 3 次超調波振動 $[-3\omega]$ が新たに発生する。(2)後向き調和振動 $[-\omega]$ と前向き 2 次超調波振動 $[+2\omega]$ は振幅が大きくなる。(3)前向き調和振動 $[+\omega]$ と前向き $1/2$ 次分数調波振動 $[+1/2\omega]$ は振幅が小さくなり、特に前向き $1/2$ 次分数調波振動 $[+1/2\omega]$ は消える。

このように静止非線形性の存在はクラックによる共振に大きな影響を及ぼし、また、その影響のし方は共振の種類によってさまざまである。したがって、これらの共振現象を診断システムに利用する際には注意が必要である。

図3からわかるように、元の系が線形の場合、クラックの発生は共振 $[+1/2\omega]$ 、 $[+3/2\omega]$ 、 $[p_f - p_b = \omega]$ 、 $[+2\omega]$ 、 $[+3\omega]$ の発生により検出できる。これに対して、元の系が非線形で図2(b)の状態の場合、図4を参考にすると、このうち $[+1/2\omega]$ はクラックがあっても、発生しないことがあり得るので、それに注目することは避けたほうがよい。逆に元の線形の場合にはクラックによって発生しなかった共振 $[-1/2\omega]$ 、 $[-2\omega]$ 、 $[-3\omega]$ が発生するので、それらにも注目することができる。なお、この回転軸のパラメータの数は非常に多いので、 $[+1/2\omega]$ 以外の振動についても静止非線形性とクラックの共存により振動が発生し難くなることがあり得るので、クラックの発生の検知は個々の共振だけに注目するのではなく、総合的に判断す

る必要がある。

4. $1/2$ 次分数調波振動

4.1 運動方程式と解の仮定 図5の固有振動数線図において、前向きふれまわり運動の固有振動数 p_f と回転速度 ω との間に $p_f = (1/2)\omega$ の関係が成り立つ回転速度 ω_0 付近で前向き $1/2$ 次分数調波振動が発生する。その近似解を $O(\varepsilon)$ 精度で次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= R \cos \theta_f + P \cos(\omega t + \beta) \\ &\quad + \varepsilon(a \cos \theta_f + b \sin \theta_f) + A_x \\ \theta_y &= R \sin \theta_f + P \sin(\omega t + \beta) \\ &\quad + \varepsilon(a' \sin \theta_f + b' \cos \theta_f) + A_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここに $\omega_f = (1/2)\omega$ 、 $\theta_f = \omega_f t + \delta$ であり、微小量パラメータ ε が掛かった項は非線形性による軌道のわずかなずれを表している。

上式をべき級数モデルの運動方程式(3)に代入し、 $O(\varepsilon)$ 精度で調和バランスをとると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} A_f \dot{R} &= -c\omega_f R - 0.5\varepsilon_2 M_0 R \sin 2\delta \\ &\quad - 0.25\varepsilon_4 \{M_0(2R^3 + 6P^2 R + 3M_0^2 R) \sin 2\delta \\ &\quad - 6P_{c2} M_0 R \sin 2\delta\} \\ &\quad + 2\varepsilon_s^{(1)} PR \sin(2\delta - \alpha) - 2\varepsilon_s^{(1)} PR \cos(2\delta - \alpha) \\ &\quad - M_0 PR(8\beta^{(0)} - 6\beta_c^{(2)}) \cos(2\delta - \alpha) \\ &\quad + 6\beta_s^{(2)} M_0 PR \sin(2\delta - \alpha) \\ A_f R \dot{\delta} &= G_f R + \varepsilon_2 \{PR \sin \alpha - 0.5M_0 R \cos 2\delta\} \\ &\quad + 0.25\varepsilon_4 \{-M_0(4R^3 + 6P^2 R + 3M_0^2 R) \cos 2\delta \\ &\quad + 6P_{c2} M_0 R \cos 2\delta \\ &\quad - 2P_{s3} R + 6P_{s1}(R^3 + P^2 R + 2M_0^2 R)\} \\ &\quad + 2\varepsilon_c^{(1)} PR \cos(2\delta - \alpha) + 4\varepsilon_s^{(1)} M_0 R \\ &\quad + 2\varepsilon_s^{(1)} PR \sin(2\delta - \alpha) \\ &\quad + 4\beta^{(0)}(R^3 + 2P^2 R) + (8\beta^{(0)} - 6\beta_c^{(2)})M_0^2 R \\ &\quad + (8\beta^{(0)} - 6\beta_c^{(2)})M_0 PR \sin(2\delta - \alpha) \\ &\quad + 6\beta_s^{(2)} M_0 PR \cos(2\delta - \alpha) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

Fig. 5 p - ω diagram

Fig. 6 Subharmonic resonance $[+1/2\omega]$ in a cracked rotor with no static nonlinearity

ただし、簡単のため、 $P_{cn}=P^n \cos n\alpha$, $P_{sn}=P^n \sin n\alpha$ とおいた。また、調和振動解としては $O(\varepsilon^0)$ の精度の解 $P=-M/G(\omega)$, $\beta=\alpha+\pi$, 定数項としては $O(\varepsilon^0)$ の精度の解 $A_x=0$, $A_y=M_0$ を用いる。定常解 $R=R_0$, $\delta=\delta_0$ は、式(9)で時間微分の項を零とおいて得られる非線形連立方程式の解として与えられる。上式より、定常解として自明解 $R_0=0$ と、 $R_0 \neq 0$ の解が得られる。また、その定常解からの微小ずれを考えることによって解の安定判別を行うことができる。

4.2 共振曲線とその特徴

4.2.1 静止非線形性をもたないクラック軸 この系については既報⁽⁶⁾で調べたが、その代表的な断片線形モデルのシミュレーション結果と冪級数モデルの理論解析結果を図6に示す。共振曲線の形状に関してシミュレーション結果と理論解析結果が多少異なるが、その理由については既報⁽⁶⁾で述べた。この場合、クラックのない軸では1/2次分数調波振動は発生しないが、クラックが生じると1/2次分数調波振動が図6のように発生する。運動方程式は係数励振系であるが、クラックによる非線形性のため、この振動の振幅は無限に発散することなく、係数励振でよくみられる不安定領域は存在しない。

4.2.2 静止非線形ばね特性をもつクラック軸

Fig. 7 Effect of static unsymmetrical nonlinearity on subharmonic resonance in a cracked rotor

Fig. 8 Effect of static symmetrical nonlinearity on subharmonic resonance in a cracked rotor

静止非対称非線形ばね特性をもつ回転軸にクラックが発生したとき、断片線形モデルのシミュレーション結果とべき級数モデルの理論解析結果を比較して図7に示す。図6のようなクラックにより発生する1/2次分数調波振動の振幅が、静止非対称非線形成分 $\varepsilon_s^{(1)}$ が大きくなるとともに小さくなり、ついには消えることがわかる。したがって、元の系が線形系の場合にクラックの発生兆候として用いられるこの1/2次分数調波振動の共振は、もとの系が非線系の場合には利用できないことがあり得る。図8に、静止対称非線形成分の影響を示す。この成分より共振曲線は傾き、 $\beta_0 > 0$ のときに漸硬形、 $\beta_0 < 0$ のときに漸軟形になる。

5. 主危険速度付近の調和振動

5.1 運動方程式と解の仮定 図5において、 $p_f = +\omega$ となる主危険速度付近で、振動数 ω の前向きふれまわりの調和振動が大きく発生する。このときの解を $O(\varepsilon)$ 精度で次のように仮定する。

$$\begin{aligned} \theta_x &= P \cos \theta_\omega + \varepsilon(a \cos \theta_\omega + b \sin \theta_\omega) + A_x \\ \theta_y &= P \sin \theta_\omega + \varepsilon(a' \sin \theta_\omega + b' \cos \theta_\omega) + A_y \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $\theta_\omega = \omega t + \beta$ である。また、 $O(\varepsilon^0)$ 精度の解 $A_x=0$, $A_y=M_0$ を用いる。4章と同様に、式(10)を運動方程式(3)に代入し、 $O(\varepsilon)$ 精度で振動数 ω の成分について両辺を比較すると次式を得る。

$$\begin{aligned} A_f \dot{P} &= -c\omega P + \Delta P \sin 2\beta \\ &\quad - \varepsilon_2(P_s^2 + 0.5M_0^2) \cos \beta - \varepsilon_4(P_s^4 + 3M_0^2 P_s^2 \\ &\quad + 0.375M_0^4) \cos \beta + M \sin(\alpha - \beta) \\ A_f P \dot{\beta} &= GP + \Delta P \cos 2\beta \\ &\quad + \varepsilon_2(P_s^2 + 0.5M_0^2) \sin \beta + \varepsilon_4(P_s^4 + 3M_0^2 P_s^2 \\ &\quad + 0.375M_0^4) \sin \beta + 4\varepsilon_s^{(1)} M_0 P + 4\beta^{(0)} P^3 \\ &\quad + (8\beta^{(0)} - 6\beta_c^{(2)}) M_0^2 P - M \cos(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $P_s = P \sin \beta$ である。調和振動に関する定常解 $P=P_0$, $\beta=\beta_0$ は、式(11)で時間微分の項を零とおいて得られる非線形連立方程式の解として与えられる。また、その定常解からの微小ずれを考えることによって解の安定判別を行うことができる。

5.2 共振曲線とその特徴

5.2.1 静止非線形性をもたないクラック軸 この場合については既報⁽⁶⁾で取扱ったが、その代表例を図9に示す。不釣合いの方向によって共振曲線の形状が異なる。不釣合いがクラックと同じ側にあるときは図9(a)のように、大振幅の部分で曲線が広がり、不安定領域が現れる。一方、不釣合いの方向がクラックと反対側にあるときは図9(b)のように、大振幅の部

(a) Case of the unbalance located on the crack side

(a) Case of the unbalance located on the crack side

(b) Case of the unbalance located on the opposite side to the crack

(b) Case of the unbalance located on the opposite side to the crack

Fig. 9 Resonance curve at the major critical speed of a cracked rotor with no static nonlinearity

Fig. 10 Resonance curve at the major critical speed of a cracked rotor with static nonlinearity

分で閉じて定常振動のみとなる。

5・2・2 静止非線形性をもつクラック軸 この場合の結果を図10に示す。これは $\beta^{(0)} > 0$ の場合であるが、静止対称非線形項の影響により共振曲線が高速側に傾くため、不安定領域が消える。

6. 結 論

(1) 広い回転速度範囲に対する数値シミュレーション結果から、以下のことが明らかとなった。(a) 静止非対称非線形成分があると、クラック軸に発生する後向き調和振動 $[-\omega]$ 、前向きの二次超調波振動 $[+2\omega]$ は振幅が大きくなる。(b) 前向き調和振動 $[+\omega]$ 、 $1/2$ 次分数調波振動 $[+1/2\omega]$ は小さくなる。(c) 後向きの超調波振動 $[-2\omega]$ 、 $[-3\omega]$ 、後向きの分数調波振動 $[-1/2\omega]$ が新しく発生する。このように静止非線形性による影響はさまざまである。

(2) $1/2$ 次分数調波振動について理論解析と数値シミュレーションにより以下のことを明らかにした。クラックが発生したとき、静止非対称非線形パラメータ $\varepsilon_s^{(1)}$ の値が大きくなるとともに振幅が小さくなり、ついには消える。静止対称非線形パラメータ $\beta^{(0)}$ の影響については、 $\beta^{(0)} > 0$ のとき漸硬形、 $\beta^{(0)} < 0$ のとき

き漸軟形に傾く。

(3) 主危険速度について理論解析と数値シミュレーションにより以下のことを明らかにした。静止対称非線形性をもつ場合には、静止対称非線形項の影響により共振曲線が $\beta^{(0)} > 0$ のとき漸硬形、 $\beta^{(0)} < 0$ のとき漸軟形に傾く。その結果、静止非線形ばね特性をもたないクラック軸に存在していた不安定領域が消える。

(4) $1/2$ 次分数調波振動と主危険速度についてはべき級数モデルの理論解析結果と断片線形モデルの数値シミュレーション結果はよく一致している。

(5) クラックを検出する診断システムの構築においては、クラックのない状態で非線形性をもつ場合、注目する共振現象の種類に関して、線形系の場合とは異なる注意が必要である。

文 献

- (1) Wauer, J., *Appl. Mech. Rev.*, **43**-1 (1990), 13-17.
- (2) Gasch, R., *Proc. Int. Mech. Eng. Conf.*, (1976), 123-128.
- (3) Ishida, Y., Ikeda, T., Yamamoto, T. and Masuda, N., *JSME Int. J. Series III*, **31**-11 (1988), 22-29.
- (4) 石田幸男・ほか2名, 機論, **58**-551, C (1992), 2032-2039.
- (5) 石田幸男・山本敏男, 機論, **57**-538, C (1991), 1791-1798.
- (6) 石田幸男・ほか2名, 機論, **60**-579, C (1994), 3689-3696.
- (7) 山本敏男・ほか2名, 機論, **41**-341, (1975), 133-142.

(8) 山本敏男・石田幸男, 機論, **41**-345, (1975), 1374-1384.

(9) 石田幸男・広川一晴, 機論, **61**-586, C (1995), 2223-2231.