コンケーブコニカルギヤ*

三 留 謙 一*1

Concave Conical Gear

Ken-ichi MITOME

Concave conical gear is a new type of conical gear. It has a new tooth surface called a "concave tooth surface". This new gear is based on conical involute gear. Its tooth surface is concave in comparison with the tooth surface of the conical involute gear. A new parameter, "C", is introduced to express the degree of concaveness; so the basic dimensions of Concave conical gear are the same as the basic dimensions of the conical involute gear, plus this parameter C. An allowable normal load for the tooth surface is obtained in terms of these basic dimensions and parameters of the gear material. The Concave conical gear can transmit a larger power than the conical involute gear. A design procedure for a pair of Concave conical gears is presented in this paper.

Key Words: Gear, Conical Gear, Concave Tooth Surface, Concave Conical Gear, Design, Allowable Normal Load

1. 緒 言

コンケーブコニカルギヤは、著者によって考案された新しいタイプのコニカルギヤである⁽¹⁾。コニカルギヤを、著者のこれまでの研究では、円すい形インボリュート歯車と呼んできたが、本報では、短くて呼びやすいコニカルギヤという名称を用いることにする。

図1にかみあっている一對の交差軸用コニカルギヤとピニオン歯面の歯当たりを示す。歯当たり幅は一般に小さい。これは、コニカルギヤ同士の歯面間の接触が、理論的に点接触であるためである。このため線接触してかみあう平歯車やカサ歯車に比べて、歯面強度も一般に低い。コンケーブコニカルギヤは、この弱点を克服するために発明されたものである。

本研究では、始めにヘルツの接触理論に基づき新しい歯面を得るための基礎理論を述べる。次にコンケーブ歯面の原理を示し、ついで設計について述べる。最後にコンケーブコニカルギヤの基本諸元を定義し、一對のコンケーブコニカルギヤの設計法を提示する。

2. 基 礎 理 論

2・1 ヘルツ応力 図2は、二つの弾性体が無荷重下では点Qで点接触し、その後荷重Pを受けた場合を示している。はじめに、この場合のヘルツの接触だ円とヘルツ応力を示す。なお、このことは周知のことであるが⁽²⁾、本研究の基礎となるので、以後の展開に適した表現で要約する。

物体1の表面を曲面1と呼び、これを図3に示す。この図で平面IおよびI'は、それぞれ点Qにおける

Fig.1 A pair of intersecting-axis conical involute gears and tooth bearing

* 1991年11月24日 MPT '91において講演，原稿受付1998年7月8日。

*1 正員，山形大学工学部(☎ 992-8510 米沢市城南4-3-16)。
E-mail: td079@diip.yz.yamagata-u.ac.jp

Fig. 2 General case of two bodies in contact under load P

Fig. 3 Curved surface 1

主曲率平面であり、半径 R_1 および R_1' はそれぞれ最小および最大の主曲率半径である。ベクトル $\mathbf{n}$ は点 Q における単位法線ベクトルである。

同じように物体2の表面を曲面2と呼び、これを図4に示す。平面IIおよびII'はそれぞれ主曲率平面であり、半径 R_2 および R_2' はそれぞれ最小および最大の主曲率半径である。ベクトル $\mathbf{n}$ は点 Q における単位法線ベクトルである。

図5は物体1と2の接触を、曲面1と2の接触で表したものである。この図で角 θ は、主曲率平面IとIIのなす角であり、曲面2に対する曲面1の相対位置を表すものである。この場合のヘルツの接触だ円の長半径 a 、短半径 b 、およびヘルツ応力 σ_H は次式として得られる⁽²⁾。

$$a = M \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{P}{H} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$b = N \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{P}{H} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\sigma_H = 3P / (2\pi ab) \quad \dots\dots\dots (3)$$

Fig. 4 Curved surface 2

Fig. 5 Contact between curved surface 1 and curved surface 2

なおここで用いる記号は次のとおりである。添字1および2はそれぞれ物体(または曲面)1および2を示している。

P = 全荷重 N

E_1, E_2 = ヤング率

ν_1, ν_2 = ポアソン比

R_1, R_1' = 曲面1の最小および最大主曲率半径

R_2, R_2' = 曲面2の最小および最大主曲率半径

相対平均曲率 H は

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'} \right) \quad \dots\dots\dots (4)$$

相対主ねじれ率 T は

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right) \cos 2\theta} \quad \dots\dots\dots (5)$$

相対主曲率 K_1 および K_2 は,

$$K_1 = H - T \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$K_2 = H + T \quad \dots\dots\dots (7)$$

相対全曲率 K は

$$K = K_1 K_2 = H^2 - T^2 \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(1)および(2)における係数 M および N は, T/H が与えられれば決まる⁽²⁾. これを図6に示す.

2.2 許容法線荷重 次に許容法線荷重 P_a を求める. 物体1および2の許容圧力の小さい方を σ_a とする. 式(3)の P, σ_H の代わりにそれぞれ P_a, σ_a とおき, 次式を得る.

$$\sigma_a = 3P_a / (2\pi ab)$$

式(1)および(2)をこの式に代入して整理すると,

$$P_a = \frac{\pi^3 \sigma_a^3}{6} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^2 \frac{(MN)^3}{H^2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで次式によって定義する新しいパラメータ κ を導入する.

$$(MN)^3 / H^2 = \kappa \quad \dots\dots\dots (10)$$

すると式(9)は次式となる.

$$P_a = \frac{\pi^3 \sigma_a^3}{6} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^2 \kappa \quad \dots\dots\dots (11)$$

この式で, パラメータ $\sigma_a, E_1, E_2, \nu_1, \nu_2$ は物体1と2の材質によって決定され, パラメータ κ は曲面1と2によって決定される. すなわち, 許容法線荷重 P_a を決定する幾何学的パラメータは κ であり, P_a をいかに増大させるかは κ をいかに大きくさせるかに帰着する.

本研究では, この原理に基づいて新しい歯面を開発する. コンケープコニカルギヤは, 従来のコニカルイ

ンボリュートギヤよりも大きな κ をもつ歯車である.

3. コンケープ歯面の原理

コニカルギヤの歯面はインボリュートヘリコイドである. 一對のコニカルギヤの歯面間の接触モデルを図7に示す. 歯車1の歯面はラック歯面を媒介して歯車2の歯面とかみあう. 図7において, 直線 l_1 および l_2 は, それぞれラック歯面 GR と歯車1および2の歯面との接触線である. 歯車1の歯面は, 直線 l_1 と l_2 の交点 Q において歯車2の歯面と接触する. この点 Q は歯面上を移動し, 一つの曲線を描く. この曲線をここでは, 歯面上の接触点の軌跡と呼ぶ⁽³⁾.

そこでもし新しい歯面がこの軌跡の近傍ではコニカルギヤの歯面と一致し, それ以外のところでは相手歯面と干渉しないならば, そのような歯面をもつ一對の歯車は, 正常にかみあうことができる.

図8にこの原理に基づいて考案した新しい歯面を示す. この歯面をコンケープ歯面と呼ぶ. コニカルギヤの歯面の創成母線を直線 l で示す. この直線 l 上で,

Fig.7 Contact between tooth surfaces of conical involute gears 1 and 2

Fig.8 Concave tooth surface compared with tooth surface of conical involute gear

Fig.6 M, N, MN versus (T/H)

コニカルギヤの歯面はラック歯面と接している。ここで、直線 l を通り、ラック歯面に垂直な平面を考える。この平面とコンケープ歯面との交線を曲線 l' で示す。直線 l と曲線 l' の間の距離は、歯面上の接触点の軌跡 v_0 においては零であり、 v_0 から離れるにつれて徐々に増加する。すなわち、コンケープ歯面の設計は、曲線 l' の設計に帰着する。

4. コンケープ歯面の設計

図7に示した一对のコニカルギヤの歯面間の接触は、二つの円筒同士の接触に近似される〔図9(a)〕。他方コンケープ歯面間の接触は、回転双曲面同士の接触に近似される〔図9(b)〕。さらにコニカルギヤの歯面を近似する円筒とコンケープコニカルギヤを近似する回転双曲面は、図10に示すように点Qで接している。ここに ρ および ρ' は回転双曲面の主曲率半径の絶対値である。

わかりやすい実例として、同じ諸元をもつ二つのギヤ、すなわちマイタギヤがピッチ点で接触している場合を取扱う。この場合 $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $\rho'_1 = \rho'_2 = \rho'$ とおく。さらに

$$\rho' = C\rho \quad \dots\dots\dots (12)$$

として表すと、図9(a)の場合は

$$\rho' = \infty, C = \infty \quad \dots\dots\dots (13)$$

Fig. 9 Approximate view of tooth surface contact

Fig. 10 Hyperboloid in contact with cylinder at point of contact Q

図9(b)における回転双曲面1および2の主曲率半径 R_1, R'_1, R_2, R'_2 は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \rho \\ R'_1 &= -\rho' = -C\rho \\ R_2 &= \rho \\ R'_2 &= -\rho' = -C\rho \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

これらを式(4)~(7)に代入して、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{1}{C} \right) \\ T &= \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{1}{C} \right) \cos \theta \\ K_1 &= H - T \\ K_2 &= H + T \\ K &= H^2 - T^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$T/H = (C+1) \cos \theta / (C-1) \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで図9(a)の場合のパラメータ $\kappa, M, N, H, T, K_1, K_2$ および K を、それぞれ $\kappa_0, M_0, N_0, H_0, T_0, K_{10}, K_{20}$, および K_0 とする。式(13)を式(15)および(16)に代入して次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= 1/\rho \\ T_0 &= \cos \theta / \rho \\ K_{10} &= (1 - \cos \theta) / \rho \\ K_{20} &= (1 + \cos \theta) / \rho \\ K_0 &= \sin^2 \theta / \rho^2 \\ T_0/H_0 &= \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

さらに式(9), (15)および(17)より次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= (MN)^3 / H^2 \\ \kappa_0 &= (M_0 N_0)^3 / H_0^2 \\ H/H_0 &= C / (C-1) \\ \frac{\kappa}{\kappa_0} &= \left(\frac{MN}{M_0 N_0} \right)^3 \left(\frac{C}{C-1} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで図9(a)および(b)の場合の許容法線荷重をそれぞれ P_{a0}, P_a とおくと、式(11)より次式を得る。

$$P_a/P_{a0} = \kappa/\kappa_0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

さて図9において曲率半径 ρ および角 θ が初めに与えられていて、次に曲率半径 ρ' を与える場合、この ρ' をどこまで小さくできるのであろうか。式(12)に示すとおり、 $\rho' = C\rho$ であるので、 ρ' の限界は C の限界である。この C の限界は、二つの回転双曲面がそれぞれのどの部の点Qで接触するとき、他の部分が干渉を起こさない、という条件から求められる。干渉をさけるためには、相対全曲率 K が、

$$K \geq 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

でなければならない。 $K = K_1 K_2$, $K_2 \geq K_1$ であるから、この条件は次式となる。

$$K_1 \geq 0$$

式(15)をこれに代入し、次式を得る。

$$\therefore C \geq (1 + \cos \theta) / (1 - \cos \theta) \dots (21)$$

右辺を $C_{\min}$ とおく、 $C_{\min}$ は C の最小値である。

$$C_{\min} = (1 + \cos \theta) / (1 - \cos \theta) \dots (22)$$

図 11 に $C-(\kappa/\kappa_0)$ 曲線を示す。

例えば $\theta=90^\circ$ で $C_{\min}=1$ である。 $C=2$ を与えるなら、 $\kappa/\kappa_0=4$ 、 $P_a=4P_{a0}$ となる。

以上はマイタギヤの場合を論じたが、一般の場合も同様に論ずることができる。これについては 5 章で詳しく述べる。

5. コンケープコニカルギヤの設計

5.1 コンケープコニカルギヤの基本諸元

4 章で述べたように、コンケープ歯面の設計はパラメータ C を決定することに帰着する。しかしコンケープ歯面は無数の曲線 l' の線織面である。すなわち、コンケープ歯面には無数の曲線 l' が存在し、しかも各 l' はそれ自身の C をもっている。そこで本研究では無数にある曲線 l' の代表として、ピッチ点 Q を通る曲線 l' を考える。そしてピッチ点 Q における曲線 l' の曲率半径 ρ' を $\rho'=C\rho$ とおき、パラメータ C を与えることによってコンケープ歯面を決定する。

コンケープコニカルギヤの土台はコニカルギヤにある。コニカルギヤの基本諸元は、ラック歯直角モジュール m 、ラック歯直角圧力角 α 、ラック中心面のねじれ角 ψ 、ラック創成円すい角 δ および歯数 z である。そこで、これら $m, \alpha, \psi, \delta, z$ およびパラメータ C をコンケープコニカルギヤの基本諸元と定める。

コニカルギヤの基本諸元が与えられると、コニカルギヤの歯面であるインボリュートヘリコイドの創成母線 l に垂直な、点 Q における主曲率半径 ρ は以下のように求められる⁽⁴⁾ (図 12)。

$$r = mz / (2 \cos \psi) \dots (23)$$

Fig. 11 κ/κ_0 versus C

$$\tan \alpha_{sr} = \tan \alpha_{0r} \cos \delta \sec \psi + \sin \delta \tan \psi$$

$$\dots (24)$$

$$\cos \gamma_{gr1} = \sin \alpha_0 \sin \delta_1$$

$$-\cos \alpha_0 \sin \phi_1 \cos \delta_1 (-\pi < \gamma_{gr1} < 0) \dots (25)$$

$$\rho = r \sin \alpha_{sr} / |\sin \gamma_{gr}| \dots (26)$$

なおここではコニカルギヤの右歯面の ρ を求めているが、左歯面の ρ も同じように求めることができる。

次に曲率半径 ρ' はパラメータ C を与えることによって、得られる。

$$\rho' = C\rho \dots (27)$$

5.2 一对のコンケープコニカルギヤの設計

一对のコンケープコニカルギヤの基本諸元は、 $m, \alpha, \psi_1, \psi_2, \delta_1, \delta_2, z_1, z_2, C_1$ および C_2 である。ここに C_1 および C_2 以外の諸元は一对のコニカルギヤの基本諸元で

Fig. 12 Principal radius of curvature normal to generating line l , $\rho = QQ_1$

Fig. 13 Procedure of determining C_1, C_2 , and P_a

あり、これらが与えられると、図7に示した角 θ は次式によって求められる⁽⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} & \cos \theta (\sin \gamma_{gr1} \sin \gamma_{gr2}) \\ & = -\cos^2 \alpha_0 \sin \delta_1 \sin \delta_2 \\ & + (\cos^2 \alpha_0 \cos^2 \phi_1 + \sin^2 \alpha_0) \cos \delta_1 \cos \delta_2 \\ & - \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 \sin \phi_1 \sin(\delta_2 - \delta_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

ここに角 γ_{gr1} は式(25)によって、また角 γ_{gr2} は式(25)に ϕ_1 の代わり ϕ_2 を代入して求められる。最後にパラメータ C_1 および C_2 、および許容法線荷重 P_a を決定するための設計手順を図13に示す。

6. 結 論

(1) 新しいタイプのコニカルギヤとしてコンケープコニカルギヤを提案した。これはコニカルギヤに土台をおき、しかもコニカルギヤの弱点を克服した歯車である。

(2) コンケープコニカルギヤの歯面は、コニカル

ギヤの歯面に対し、凹形状に形成されている。このためヘルツの接触だ円を大きくでき、歯面許容法線荷重をもコニカルギヤのそれよりもはるかに大きくできる。

(3) コンケープコニカルギヤの基本諸元を定義した。さらに一對のこのギヤの設計手順をも提示した。

(4) コンケープコニカルギヤは、そのホブ切りや研削が可能であるため、実用性が高い。

文 献

- (1) 三留謙一, コンケープ円すい形歯車, 日本特許第2003073号, 特許公報, 特公平7-33863. 日本国特許庁.
- (2) Roark, R. J., *Formulas for Stress and Strain*, 4th ed., (1965), 319-323, McGraw-Hill.
- (3) 三留謙一, 円すい形インポリュート歯車の研究 (第1報, 設計および製作法), 機論, 48-430, C(1982), 852-859.
- (4) 三留謙一, 円すい形インポリュート歯車の研究 (第3報, 一對の歯車のかみあいについて), 機論, 51-463, C(1985), 624-631.