周辺固定されたクロスプライ積層偏平シェルの自由振動解析*

細川 健治^{*1}, 村山 峰弘^{*2}, 坂田 敏行^{*1}Free Vibration Analysis of Cross-ply Laminated Shallow Cylindrical Shell
with Clamped Edges

Kenji HOSOKAWA, Minehiro MURAYAMA and Toshiyuki SAKATA

For the free vibration of a laminated FRP (fiber reinforced plastic) composite plate, the authors proposed a numerical approach using the functions for a static bending problem. By this approach, one can accurately estimate the natural frequency and mode shape of plates with various shapes and boundary conditions. In the present paper, this approach is modified for application to a cross-ply laminated shallow cylindrical shell of rectangular planform. First, numerical calculations are carried out for a clamped symmetric cross-ply laminated shallow cylindrical shell of square plan-form. The convergence of natural frequency of the shell are discussed. The effects of the layer material and the number of layers on the natural frequencies and mode shapes of the shell are numerically investigated. Next, by the vibration tests of clamped symmetric cross-ply laminated shallow cylindrical shell of square planform, natural frequencies and mode shapes are obtained. From the comparison between experimental and numerical results, it follows that one can accurately estimate the natural frequency and mode shape using the numerical approach proposed by the authors.

Key Words: Free Vibration, Vibration of Continuous System, Composite Material, Symmetric Cross-ply Laminated Shallow Shell, Clamped Shallow Shell

1. 緒 言

近年、繊維強化プラスチック(FRP)を積層した複合材料は多くの分野で用いられている。FRPを用いた基本的な構造部材である積層板および積層シェルの自由振動問題も関心を集めており、自由の境界条件を有する積層シェルの自由振動に関する報告⁽¹⁾、2方向に曲率をもった積層偏平シェルの固有振動数に関する報告⁽²⁾⁽³⁾およびその振動モードに関する報告⁽⁴⁾がある。また、片持ち支持された積層シェルに関して、実験結果と有限要素法による数値計算結果とを比較した報告⁽⁵⁾がある。しかしながら、周辺固定された積層偏平シェルの自由振動に関する数値計算結果と実験結果を比較した報告は見受けられない。一方、著者らは、各種形状および境界条件を有するFRP積層板の自由振動問題を解析するため、板の静的曲げ問題の関数を用いる方法を提案した⁽⁶⁾⁽⁸⁾。また、提案した方法により求められた固有振動数および振動モードの数値解析結果と実験結果とを比較した結果、よく一致することが

明らかとなった⁽⁷⁾⁽⁸⁾。

本研究では、先に述べた積層板の自由振動問題の数値解析法を拡張し、周辺固定されたFRPクロスプライ積層偏平シェルの自由振動問題に適用する。計算例として、周辺固定されたFRP対称クロスプライ積層偏平シェル(全層数が偶数の場合)の自由振動問題を解析し、得られる解の収束性を検討する。また、周辺固定されたFRP対称クロスプライ積層偏平シェルの固有角振動数および振動モードはほとんど報告されていないので、代表的な2種類の積層材料より作られた周辺固定対称クロスプライ積層偏平シェルの積層数を変えて固有角振動数および振動モードを計算し、固有角振動数および振動モードに及ぼす積層数の影響を明らかにする。最後に、周辺固定されたCFRP対称クロスプライ積層偏平シェルに対して加振実験を行い、実験的モーダル解析法により固有振動数および振動モードを求める。得られた実験結果と提案した数値解析法により求められた解析結果とを比較し、数値解析法の妥当性を検討する。

2. 数 値 計 算 法

2・1 振動数方程式 積層偏平シェルの自由振動問題を解析する数値計算法の概要を簡単に説明する。

* 1997年7月25日 Dynamics Design Conference '97において講演、原稿受付 1998年9月25日。

^{*1} 正員、中部大学工学部(☎ 487-8501 春日井市松本町1200)。

^{*2} 学生員、中部大学大学院。

E-mail: hosokawa@isc.chubu.ac.jp

Donnell の殻理論および古典的な積層理論に基づき、さらには、面内慣性項を無視すれば、積層偏平シエルの自由振動の微分方程式は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} L_1(u, v, w) &= 0 \\ L_2(u, v, w) &= 0 \\ L_3(u, v, w) + \rho h \ddot{w} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $u(\xi, \lambda, t)$ 、 $v(\xi, \lambda, t)$ は、それぞれシエルの ξ 方向、 λ 方向の変位、 $w(\xi, \lambda, t)$ はシエルのたわみ、 ρ は密度、 h はシエルの厚さ、 $\ddot{w} = \partial^2 w / \partial t^2$ 、 t は時間変数、および $L_1(\) \sim L_3(\)$ は静的曲げ変形の微分演算子である。例えば、全層数が偶数の対称クロスプライ積層偏平シエルの場合には次式で与えられる。

$$L_1(u, v, w) = A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{A_{66}}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{R} (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \lambda} + \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} \dots\dots\dots (2)$$

$$L_2(u, v, w) = A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{A_{22}}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{R} (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \lambda} + \frac{A_{22}}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \lambda} \dots\dots\dots (3)$$

$$L_3(u, v, w) = D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{1}{R^2} (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \lambda^2} + \frac{D_{22}}{R^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \lambda^4} + \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{A_{22}}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda} + w \right) \dots\dots\dots (4)$$

上式に含まれる R は曲率半径である。また、 A_{ij} 、 D_{ij} ($i, j=1, 2, 6$) は、文献(9)に示されるように、それぞれ伸び剛性および曲げ剛性であり、各層の繊維方向の弾性係数 E_1 、繊維に対して直角方向の弾性係数 E_2 、せん断弾性係数 G_{12} 、ポアソン比 ν_{12} 、 ν_{21} 、および繊維配向角 θ より求められる〔図1(a)参照〕。式(1)の解は、

Fig. 1 Laminated shallow cylindrical shell of rectangular planform

$$\left. \begin{aligned} u &= - \iint \rho h \ddot{w}(\xi, \eta, t) G_1(\xi, \lambda, \xi, \eta) d\xi d\eta \\ v &= - \iint \rho h \ddot{w}(\xi, \eta, t) G_2(\xi, \lambda, \xi, \eta) d\xi d\eta \\ w &= - \iint \rho h \ddot{w}(\xi, \eta, t) G_3(\xi, \lambda, \xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ただし、上式に含まれる関数 $G_1(\xi, \lambda, \xi, \eta)$ 、 $G_2(\xi, \lambda, \xi, \eta)$ 、および $G_3(\xi, \lambda, \xi, \eta)$ はシエルの境界条件および微分方程式、

$$\left. \begin{aligned} L_1(G_1, G_2, G_3) &= 0 \\ L_2(G_1, G_2, G_3) &= 0 \\ L_3(G_1, G_2, G_3) &= \delta(\xi - \xi) \cdot \delta(\lambda - \eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

を満足する。ここで、 $\delta(\)$ は Dirac のデルタ関数である。式(5)を一般的に解くことは困難であるため、図1(b)に示すようにシエルを分割する(分割数を N とする)。式(5)の被積分関数が分割された微小領域内では一定であると仮定して近似積分を行い、シエルのたわみを $w(\xi, \lambda, t) = W(\xi, \lambda) \sin \omega t$ と仮定すれば、振動数方程式は式(5)の3番めの式から次のように求められる。

$$\det [\delta_{m,n} - \omega^2 \rho h G_3(\xi_m, \lambda_m, \xi_n, \lambda_n) \Delta S_n] = 0 \quad m, n=1, 2, 3, \dots, N \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 $\delta_{m,n}$ は Kronecker の δ 、 ΔS_n は図1(b)に示される微小領域の面積、および ω は角振動数である。

2.2 関数 G_1 、 G_2 、 G_3 の計算 関数 G_1 、 G_2 、および G_3 をそれぞれ次のように仮定する。

$$G_1(\xi, \lambda, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^l A_i(\xi, \eta) \phi_i(\xi, \lambda) \xi^k \lambda^l \dots\dots\dots (8)$$

$$G_2(\xi, \lambda, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^l B_i(\xi, \eta) \phi_i(\xi, \lambda) \xi^k \lambda^l \dots\dots\dots (9)$$

$$G_3(\xi, \lambda, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^l C_i(\xi, \eta) \phi_i(\xi, \lambda) \xi^k \lambda^l \dots\dots\dots (10)$$

ただし、 $A_i(\xi, \eta)$ 、 $B_i(\xi, \eta)$ 、および $C_i(\xi, \eta)$ は (ξ, η) により決まる定数、 k と l は零または正整数であり、 i により決められる。また、関数 $\phi_1(\xi, \lambda)$ は G_1 、 G_2 が関数 $\phi_2(\xi, \lambda)$ は G_3 がシエルの周辺での境界条件を満足するための関数である。したがって、シエルの境界条件が周辺固定の場合には、境界 $\xi=0$ および $\xi=a$ において、

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

境界 $\lambda=0$ および $\lambda=\beta$ において、

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial \lambda} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

関数 G_1 、 G_2 、および G_3 が境界条件、式(11)および(12)、を満足するためには、関数 G_1 、 G_2 、および G_3 に含まれる $\phi_1(\xi, \lambda)$ および $\phi_2(\xi, \lambda)$ は次の関数であればよい。

$$\phi_1(\zeta, \lambda) = \zeta(\zeta - a)\lambda(\lambda - \beta) \dots (13)$$

$$\phi_2(\zeta, \lambda) = \zeta^2(\zeta - a)^2\lambda^2(\lambda - \beta)^2 \dots (14)$$

ただし、 $\beta = 2 \sin^{-1}(b/2R)$ である。シェルの分割方法は図 1(b) に示すように ζ 方向、 λ 方向ともに等分割とした。ガラーキン法に従って係数 $A_i(\xi, \eta)$, $B_i(\xi, \eta)$, および $C_i(\xi, \eta)$ を決め、式(8)~(10)に代入することにより、関数 G_1 , G_2 , および G_3 が求められる。

3. 計 算 例

提案した数値計算法の収束性を検討するため、比較的異方性の度合いの強いグラファイト繊維強化エポキシ(Graphite/Epoxy)材からなる積層構成が $[0^\circ/90^\circ]_s$ の正方形形状 ($a=b$) シェルに本解析法を適用した。なお曲率比は $b/R=0.2$ とした。Graphite/Epoxy 材の材料定数を表 1⁽¹⁰⁾ に示す。固有角振動数は繊維方向の弾性係数 E_1 を基準とする曲げ剛さ $D_0 = E_1 h^3 / 12(1 - \nu_{12}\nu_{21})$ を用いて無次元化した。表 2 はガラーキ

Table 1 Mechanical properties of FRP

Material	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	ν_{12}
E-Glass/Epoxy	60.7	24.8	11.99	0.23
Graphite/Epoxy	138	8.96	7.1	0.30

Table 2 Convergence of natural radian frequencies, $\omega_s / \sqrt{D_0 / \rho h b^4}$, of clamped four layered shallow cylindrical shell of square planform; $[0^\circ/90^\circ]_s$, $b/R=0.2$, $a/h=100$, $N=15 \times 15$, Graphite/Epoxy

Number of terms I	$\omega_s / \sqrt{D_0 / \rho h b^4}$			
	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$
3	52.77	49.38	79.19	—
6	39.77	48.41	75.23	76.54
10	39.74	45.66	67.79	73.03
15	37.66	45.62	66.21	72.49
21	37.65	45.13	63.80	70.92
28	37.57	45.13	63.71	70.91
36	37.57	45.11	63.56	70.80
45	37.57	45.11	63.56	70.80
55	37.57	45.11	63.55	70.79
66	37.57	45.11	63.55	70.79

Table 3 Convergence of natural radian frequencies, $\omega_s / \sqrt{D_0 / \rho h b^4}$, of clamped four layered shallow cylindrical shell of square planform; $[0^\circ/90^\circ]_s$, $b/R=0.2$, $a/h=100$, $I=55$, Graphite/Epoxy

Division number N	$\omega_s / \sqrt{D_0 / \rho h b^4}$			
	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$
3×3	35.50	42.51	52.46	61.38
5×5	37.48	45.03	62.75	70.41
7×7	37.56	45.10	63.47	70.74
9×9	37.57	45.11	63.54	70.78
11×11	37.57	45.11	63.55	70.79
13×13	37.57	45.11	63.55	70.79
15×15	37.57	45.11	63.55	70.79

ン法に用いられる試行関数の項数 I が固有角振動数の収束性に及ぼす影響を示し、表 3 はシェルの分割数 N の影響を表す。表 2 および 3 より明らかなようにガラーキン法に用いる項数 I は 55 項、シェルの分割数 N は $15 \times 15 = 225$ とすれば、低次振動の場合には十分収束した値が得られる。計算例として、積層数を変えた場合の周辺固定された FRP 対称クロスプライ積層偏平シェル(正方形形状 ($a=b$)) の固有角振動数および振動モードを図 2 および 3 に示す。本論文で示す振動モード図は上辺と底辺が曲率をもった辺である。図 2 および 3 の積層構成は 4 層が $[0^\circ/90^\circ]_s$, 6 層が $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_s$, 8 層が $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$, および 10 層が $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]_s$ である。ラミナの材質は比較的異方性の度合いの弱い E-Glass/Epoxy 材(図 2) と先の収束性を検討するために用いた Graphite/Epoxy 材(図 3) である(材料定数は表 1 参照)。なお本計算では $I=55$, $N=15 \times 15 = 225$ とした。図 2 および 3 よ

Fig. 2 Natural radian frequencies, $\omega_s / \sqrt{D_0 / \rho h b^4}$, and nodal patterns of clamped symmetric cross-ply laminated shallow cylindrical shell of square planform; $b/R=0.2$, $a/h=100$, $N=15 \times 15$, $I=55$, E-Glass/Epoxy

Fig. 3 Natural radian frequencies, $\omega_s/\sqrt{D_0/\rho h^4}$, and nodal patterns of clamped symmetric cross-ply laminated shallow cylindrical shell of square planform; $b/R=0.2$, $a/h=100$, $N=15 \times 15$, $I=55$, Graphite/Epoxy

り以下のことが明らかとなった。ラミナの材質が異方性の度合いの弱い E-Glass/Epoxy 材の場合には、積層数が増加しても固有角振動数に顕著な影響は見られなく、振動モードもほとんど変化しない。一方、異方性の度合いの強い Graphite/Epoxy 材の場合には、積層数が増加するに従って、基本固有角振動数はわずかに増加する傾向にあるが、4 次の固有角振動数に関しては、積層数が増加してもほとんど変化が見られない。また、振動モードに大きな変化が見られるが、積層数が増えるに従って 3 次以上の振動モードの変化はほとんど見受けられなくなる。

4. 実験結果と解析結果の比較

数値解析法の妥当性を検討するため、周辺固定された CFRP 対称クロスプライ積層偏平シェルの加振実験を行った。実験のようすを図 4 に示す。試験片はプリプレグシートを 8 層、積層構成 $[0^\circ_2/90^\circ_2]_s$ でオート

Table 4 Layer material properties for symmetric cross-ply laminated shallow cylindrical shell (CFRP)

E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	ν_{12}	ρ [kg/m ³]
95.4	6.35	5.22	0.32	1495

Fig. 4 Clamped cross-ply laminated shallow cylindrical shell

クレーブ成形した対称クロスプライ積層偏平シェルである。その寸法は $a=b=0.2$ m, $R=0.4$ m, またシェルの厚さ h は 1.60×10^{-3} m, である。

ラミナ材料定数の測定には数種類の長さの異なる繊維配向角が 0° , 45° , 90° のはりをラミナと同じ材質の一方積層板(プリプレグシートが 2 層)から切断して用いた。弾性係数 E_1 , E_2 は片持ち支持されたはりの加振実験によって得られた基本振動数から算出した。ポアソン比 ν_{12} は繊維配向角 0° のはりにひずみゲージを繊維方向および繊維に対して直角方向に接着し、引張試験を行い算出した。せん断弾性係数 G_{12} は、各種繊維配向角のはりの曲げ剛性およびポアソン比 ν_{12} より算出した。得られた材料定数の実測値を表 4 に示す。

周辺固定の境界条件を満足するため、図 4 に示す頑強なアルミニウムの周辺固定用治具を用いて積層偏平シェルの挟み、ボルトで締付けた。締付けはトルクレンチで均一に締め、締付力による固有振動数の収束性についても検討した。実験方法は試験片にひずみゲージを接着し、インパクト・ハンマにて加振した(図 4 参照)。その結果得られた伝達関数を用いて実験的モデル解析を行い、固有振動数および振動モードを求めた。

実験により得られた対称クロスプライ積層偏平シェルの 1~4 次の固有振動数および振動モードと数値計算により求められた固有振動数および振動モードを図 5 に示す。図 5 中の細線は実験的モデル解析により得られた節線を示し、太線は数値解析により求められ

Fig. 5 Natural frequencies and nodal patterns of clamped symmetric cross-ply laminated shallow cylindrical shell of square planform

た節線を表す。図5より明らかなように、実験結果と数値解析結果との誤差は最大で約9%と、よい一致を示している。また、振動モード図についても両者がよい一致を示していることがわかる。

5. 結 論

すでに提案された静的曲げ問題の関数を用いて積層板の自由振動問題を解析する方法を拡張し、周辺固定されたクロスプライ積層偏平シェルの自由振動問題に適用した。

周辺固定された対称クロスプライ積層偏平シェルの自由振動問題を解析し、得られる固有角振動数の収束性を検討した結果、十分収束した値が求められることが明らかになった。また、周辺固定されたFRP対称クロスプライ積層偏平シェルの積層材料および積層数を変化させた場合の固有角振動数および振動モードを計算し、その影響を検討した。その結果、ラミナの材質の異方性の度合いが強い場合には、積層数の増加に従って基本固有角振動数はわずかであるが増加する傾向にあること、低次の振動モードに大きな変化が見られること、等が明らかになった。さらに、提案したクロスプライ積層偏平シェルの自由振動問題の数値解析法の妥当性を検討するため、周辺固定されたCFRP対称クロスプライ積層偏平シェルの加振実験を行った。その結果、固有振動数および振動モードともに数値解析結果と実験結果はよく一致し、提案した数値解

析法の妥当性が明らかになった。

本研究では、周辺固定された対称クロスプライ積層偏平シェルの適用したが、関数 G_1 , G_2 , および G_3 の計算方法を考慮すれば、本解析法は各種境界条件を有するクロスプライ積層偏平シェルの解析することができる有用な解析法であると考えられる。

文 献

- (1) Rath, B. K. and Das, Y. C., Vibration of Layered Shells, *J. Sound Vib.*, 28-4 (1973), 737-757.
- (2) Qatu, M. S. and Leissa, A. W., Free Vibrations of Completely Free Doubly Curved Laminated Composite Shallow Shells, *J. Sound Vib.*, 151-1 (1991), 9-29.
- (3) Qatu, M. S. and Leissa, A. W., Natural Frequencies for Cantilevered Doubly-Curved Laminated Composite Shallow Shells, *Compos. Struc.*, 17-3 (1991), 227-256.
- (4) Qatu, M. S., Mode Shape Analysis of Angle-Ply Laminated Composite Shallow Shells, *J. Acoust. Soc. Am.*, 92-3 (1992), 1509-1520.
- (5) Crawley, E. F., The Natural Modes of Graphite/Epoxy Cantilever Plates and Shells, *J. Comp. Mater.*, 13 (1979), 195-205.
- (6) 細川健治・矢田貴嗣・坂田敏行, FRP 対称積層板の自由振動, 機論, 57-543, C (1991), 3413-3416.
- (7) 細川健治・矢田貴嗣・坂田敏行, 周辺固定された対称積層板の自由振動解析(数値解析結果と実験結果の比較), 機論, 58-555, C (1992), 3184-3188.
- (8) 細川健治・山田康孝・坂田敏行, FRP 非対称積層板の自由振動解析, 機論, 60-574, C (1994), 1904-1908.
- (9) Vinson, J. R. and Sierakowski, R. L., *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, (1986), 54-55, Martinus Nijhoff Pub.
- (10) 文献(9)の303ページ.