非線形サポートを有する配管系の定常振動応答解析法*

青 木 繁^{*1}, 渡 辺 武^{*2}Analytical Method of Reponse of
Piping System with Nonlinear Support

Shigeru AOKI and Takeshi WATANABE

This paper deals with steady-state response of the continuous system with nonlinear support having hysteresis damping characteristics. Considering the energy loss for hysteresis of spring constant of support, an analytical method of approximate solution for the nonlinear response of the beam with quadrilateral hysteresis loop characteristics is presented. Some numerical results of the approximate solution for the response of the system and the mode shapes are shown. The objectives of this paper are to present the approximate steady-state solution of the continuous system with nonlinear support under harmonic excitation and to illustrate the numerical results of approximate solution.

Key Words: Nonlinear Vibration, Vibration of Continuous System, Forced Vibration, Hysteresis Damping, Steady-State Response, Approximate Solution

1. 緒 言

生産施設内の機器・配管系は非線形要素をもつ多くの連続体から成り立っていることはよく知られている。そして、このような連続体の振動を考える場合、解析が簡単なこともあり、支持部を理想的な剛体または線形減衰および線形ばねでモデル化することが一般に行われている⁽¹⁾⁽²⁾。一方、支持部の非線形特性が配管系の振動応答に影響を与えることが指摘され⁽³⁾⁽⁴⁾、支持部の非線形特性として、がたおよび摩擦を考慮した研究がなされている^{(5)~(7)}。また、支持部における非線形復元力特性を考慮した研究もある⁽⁸⁾。さらに、支持部におけるエネルギー吸収を履歴特性でモデル化した研究⁽⁹⁾、支持部の非線形特性要素により、振動応答を低減しようとする研究もなされている⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。

著者らは、配管系の連続体非線形振動を対象として、支持部におけるエネルギー吸収に着目し、これを三角形の履歴特性をもつ非線形ばねでモデル化できることを示した^{(12)~(14)}。

本論文では、支持部に履歴特性がある場合の配管系の定常振動応答を求めるための近似解法を示し、この方法を用いて支持部の履歴特性が配管系の定常振動応答に及ぼす影響を検討した。配管系の 1 スパンモデルとして、一端が固定支持され、他端が履歴特性をもつ非線形ばねで支持されたモデルを扱った。非線形ばねは三角形の場合に比べて適用範囲が広いと考えられる四角形の履歴特性⁽¹⁵⁾をもつものとした。まず、定常応答を求めるための実用的な近似解法を示し、この方法を用いて定常振動の特徴について検討した。

2. 運動方程式と境界条件

連続体のモデルとして、図 1 に示すような方向の調和振動入力を受ける一端を固定支持され、他端が非線形サポートで支持されたはり扱う。はりの断面や材質は一樣であるものとする。サポートの復元力が図 2 に示すような四角形の履歴特性をもち、エネルギーが吸収されるものとする。はりの断面積を A 、断面二次モーメントを I 、縦弾性係数を E 、単位体積当たりの質量を ρ とすると、運動方程式は、

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

入力に対するはりの相対変位を z とすると、

* 原稿受付 1998 年 6 月 4 日。

*¹ 正員, 東京都立工業高等専門学校 (〒140-0011 東京都品川区東大井 1-10-40)。*² 正員, 山梨大学教育人間科学部 (〒400-8510 甲府市武田 4-4-37)。

E-mail: aoki@tokyo-tmct.ac.jp

Fig. 1 Analytical model of continuous system

Fig. 2 Hysteresis loop characteristics

$$y = z + y_0 \cos \omega t \quad (2)$$

したがって、 z に関する運動方程式は、

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = y_0 \omega^2 \cos \omega t \quad (3)$$

ここで、式(1)の解として次式を仮定する。

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cos n\omega t \quad (4)$$

式(1)から、 z は形式的に次のようになる。

$$z = -y_0 \cos \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh \lambda_n x + B_n \sinh \lambda_n x + C_n \cos \lambda_n x + D_n \sin \lambda_n x) \cos n\omega t \quad (5)$$

ここに、 A_n, B_n, C_n および D_n は任意定数である。さらに、

$$\lambda_n^4 l^4 = Z_1^4 n^2 \Omega_1^2, \Omega_1 = \omega/\omega_1 \quad (6)$$

である。 ω_1 ははりの1次の固有円振動数であり、

$$\omega_1 = \frac{Z_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad Z_1 = 1.8751 \quad (7)$$

ただし、 l ははりの長さを表す。

そして、ここで取扱っている境界条件は、

$$(1) \quad x=0, z=0 \quad (8)$$

$$(2) \quad x=0, \frac{dz}{dx}=0 \quad (9)$$

$$(3) \quad x=l, \frac{d^2 z}{dx^2}=0 \quad (10)$$

$$(4) \quad x=l, EI \frac{d^3 z}{dx^3} = f(z_l, \dot{z}_l) \quad (11)$$

ここに、 z_l ははりの先端 $x=l$ における相対変位を表す。 $f(z_l, \dot{z}_l)$ は図2に示すサポートの復元力であり、次式で表される。

$$f(z_l, \dot{z}_l) = \begin{cases} = K_1 z_l & ; 0 \leq z_l \leq \delta_0, \dot{z}_l > 0 \quad \cdots \cdots (I) \\ = K_1 \delta_0 + K_2(z_l - \delta_0) & ; \delta_0 \leq z_l \leq z_{lmax}, \dot{z}_l \geq 0 \quad \cdots \cdots (II) \\ = K_3(z_l - z_{l3}) & ; z_{l3} \leq z_l \leq z_{lmax}, \dot{z}_l \leq 0 \quad \cdots \cdots (III) \\ = 0; 0 \leq z_l \leq z_{l3}, \dot{z}_l < 0 \quad \cdots \cdots (IV) \\ = K_1 z_l & ; -\delta_0 \leq z_l \leq 0, \dot{z}_l < 0 \quad \cdots \cdots (V) \\ = -K_1 \delta_0 + K_2(z_l + \delta_0) & ; -z_{lmax} \leq z_l \leq -\delta_0, \dot{z}_l \leq 0 \quad \cdots \cdots (VI) \\ = K_3(z_l + z_{l3}) & ; -z_{lmax} \leq z_l \leq -z_{l3}, \dot{z}_l \geq 0 \quad \cdots \cdots (VII) \\ = 0; -z_{l3} \leq z_l \leq 0, \dot{z}_l > 0 \quad \cdots \cdots (VIII) \end{cases} \quad (12)$$

ここに、 z_{lmax} は相対変位 z_l の最大変位を示し、 K_1, K_2 および K_3 は図2に示す非線形サポートのばね定数を表す。また、 δ_0 はばね定数 K_1 に対する最大変位である。サポートの復元力が零となる時の変位 z_{l3} は、

$$z_{l3} = \left(1 - \frac{K_2}{K_3}\right) z_{lmax} - \left(\frac{K_1}{K_3} - \frac{K_2}{K_3}\right) \delta_0 \quad (13)$$

定常振動を考えているので、位相遅れ角を α とし、自由端の変位 z_l が最大となる瞬間に位相角の原点をとって、

$$\theta = \omega t - \alpha \quad (14)$$

とし、独立変数を t から θ に変換すれば、 $f(z_l, \dot{z}_l)$ は θ に関して周期 2π の関数 $g(\theta)$ として、次式のように書くことができる。

$$f(z_l, \dot{z}_l) = \begin{cases} = g(\theta) = K_1 z_l & ; -(\theta_1 + \theta_2) \leq \theta \leq -\theta_2 \quad \cdots \cdots (I) \\ = g(\theta) = K_1 \delta_0 + K_2(z_l - \delta_0) & ; -\theta_2 \leq \theta \leq 0 \quad \cdots \cdots (II) \\ = g(\theta) = K_3(z_l - z_{l3}) & ; 0 \leq \theta \leq \theta_3 \quad \cdots \cdots (III) \\ = g(\theta) = 0 & ; \theta_3 \leq \theta \leq \pi - (\theta_1 + \theta_2) \quad \cdots \cdots (IV) \\ = g(\theta) = K_1 z_l & ; \pi - (\theta_1 + \theta_2) \leq \theta \leq \pi - \theta_2 \quad \cdots \cdots (V) \\ = g(\theta) = -K_1 \delta_0 + K_2(z_l + \delta_0) & ; \pi - \theta_2 \leq \theta \leq \pi \quad \cdots \cdots (VI) \\ = g(\theta) = K_3(z_l + z_{l3}) & ; \pi \leq \theta \leq \pi + \theta_3 \quad \cdots \cdots (VII) \\ = g(\theta) = 0 & ; \pi + \theta_3 \leq \theta \leq 2\pi - (\theta_1 + \theta_2) \quad \cdots \cdots (VIII) \end{cases} \quad (15)$$

ここに、 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ はそれぞれ図3に示すように区間

Fig. 3 Wave form of force of restitution

(I), (II), (III)および(V), (VI), (VII)においてサポート端がサポートの非線形復元力を受ける時間を表す。また、区間(IV)および(VIII)では、 $\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ の間サポートの復元力が零となる。

3. 運動方程式の解

一般解の式(5)に境界条件(1)を用いると、

$$-y_0 \cos \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + C_n) \cos n\omega t = 0 \quad \cdots (16)$$

式(16)から、

$$C_1 = y_0 - A_1, \quad C_n = -A_n \quad (n=2, 3, 4, \cdots) \quad \cdots (17)$$

式(5)に境界条件(2)を用いると、

$$D_n = -B_n \quad (n=1, 2, 3, 4, \cdots) \quad \cdots (18)$$

式(17)および(18)を式(5)に代入すると、

$$\begin{aligned} z = & y_0 (\cos \lambda_1 x - 1) \cos(\theta + \alpha) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \{ A_n (\cosh \lambda_n x - \cos \lambda_n x) \\ & + B_n (\sinh \lambda_n x - \sin \lambda_n x) \} \cos n(\theta + \alpha) \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)と境界条件の式(3)から、

$$\begin{aligned} (\cosh \lambda_1 l + \cos \lambda_1 l) A_1 \\ + (\sinh \lambda_1 l + \sin \lambda_1 l) B_1 = y_0 \cos \lambda_1 l \quad (n=1) \end{aligned} \quad \cdots (20)$$

$$\begin{aligned} (\cosh \lambda_n l + \cos \lambda_n l) A_n \\ + (\sinh \lambda_n l + \sin \lambda_n l) B_n = 0 \quad (n=2, 3, 4, \cdots) \end{aligned} \quad \cdots (21)$$

反発力 $g(\theta)$ のフーリエ級数を仮定し、次式のよう

に展開する。

$$g(\theta) = \sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad \cdots (22)$$

式(11)および(19)から、

$$\begin{aligned} \frac{d^3 z}{dx^3} = & y_0 \lambda_1^3 \sin \lambda_1 l \cos(\theta + \alpha) \\ & + \sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty} \{ A_n \lambda_n^3 (\sinh \lambda_n l - \sin \lambda_n l) \\ & + B_n \lambda_n^3 (\cosh \lambda_n l + \cos \lambda_n l) \} \cos n(\theta + \alpha) \end{aligned} \quad \cdots (23)$$

であるから、境界条件の式(4)を用いて、

$$\begin{aligned} (\sinh \lambda_1 l - \sin \lambda_1 l) A_1 + (\cosh \lambda_1 l + \cos \lambda_1 l) B_1 \\ = \frac{a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta}{EI \lambda_1^3 \cos(\theta + \alpha)} - y_0 \sin \lambda_1 l \quad (n=1) \end{aligned} \quad \cdots (24)$$

$$\begin{aligned} (\sinh \lambda_n l - \sin \lambda_n l) A_n + (\cosh \lambda_n l + \cos \lambda_n l) B_n \\ = \frac{a_n \cos \theta + b_n \sin \theta}{EI \lambda_n^3 \cos n(\theta + \alpha)} \quad (n=3, 5, \cdots) \end{aligned} \quad \cdots (25)$$

式(20), (21), (24)および(25)から、 $n=1$ のとき、

$$\begin{aligned} A_1 = & y_0 (1 + \cosh \lambda_1 l \cos \lambda_1 l + \sinh \lambda_1 l \sin \lambda_1 l) / \Delta_1 \\ & - \frac{a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta}{EI \lambda_1^3 \Delta_1 \cos(\theta + \alpha)} (\sinh \lambda_1 l + \sin \lambda_1 l) \end{aligned} \quad \cdots (26)$$

$$\begin{aligned} B_1 = & -y_0 (\cosh \lambda_1 l \sin \lambda_1 l + \sinh \lambda_1 l \cos \lambda_1 l) / \Delta_1 \\ & + \frac{a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta}{EI \lambda_1^3 \Delta_1 \cos(\theta + \alpha)} (\cosh \lambda_1 l + \cos \lambda_1 l) \end{aligned} \quad \cdots (27)$$

$n=3, 5, \cdots$ に対して、

$$A_n = -\frac{a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta}{EI \lambda_n^3 \Delta_n \cos n(\theta + \alpha)} (\sinh \lambda_n l + \sin \lambda_n l) \quad \cdots (28)$$

$$B_n = \frac{a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta}{EI \lambda_n^3 \Delta_n \cos n(\theta + \alpha)} (\cosh \lambda_n l + \cos \lambda_n l) \quad \cdots (29)$$

ここに、

$$\Delta_n = 2(1 + \cosh \lambda_n l \cos \lambda_n l) \quad \cdots (30)$$

したがって、

$$\begin{aligned} z = & y_0 N_x \cos(\theta + \alpha) + \sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty} \frac{1}{EI \lambda_n^3 \Delta_n} \{ (\cosh \lambda_n l + \cos \lambda_n l) (\sinh \lambda_n x - \sin \lambda_n x) - (\sinh \lambda_n l + \sin \lambda_n l) \\ & \times (\cosh \lambda_n x - \cos \lambda_n x) \} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \end{aligned} \quad \cdots (31)$$

ここに、

$$N_x = \frac{2(\cos \lambda_1 x - 1)(1 + \cosh \lambda_1 l \cos \lambda_1 l) + (1 + \cosh \lambda_1 l \cos \lambda_1 l + \sinh \lambda_1 l \sin \lambda_1 l) \times (\cosh \lambda_1 x - \cos \lambda_1 x) - (\cosh \lambda_1 l \sin \lambda_1 l + \sinh \lambda_1 l \cos \lambda_1 l) (\sinh \lambda_1 x - \sin \lambda_1 x)}{2(1 + \cosh \lambda_1 l \cos \lambda_1 l)} \quad \cdots (32)$$

サポート端における変位 z_l は、

$$z_l = y_0 N_l \cos(\theta + \alpha) + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{M_n}{k} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad \dots\dots (33)$$

ここに,

$$k = \frac{3EI}{l^3} \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$N_l = \frac{(1 - \cos \lambda_1 l)(\cosh \lambda_1 l - 1)}{1 + \cosh \lambda_1 l \cos \lambda_1 l} \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$M_n = \frac{3\lambda_n l}{Z_1^4 n^2 \Omega_1^2} \times \frac{(\cos \lambda_n l \sinh \lambda_n l - \cosh \lambda_n l \sin \lambda_n l)}{(1 + \cosh \lambda_n l \cos \lambda_n l)} \\ (n=1, 3, 5, \dots) \quad \dots\dots\dots (36)$$

各区間相互間の切替条件は,

$$\theta = -(\theta_1 + \theta_2), z_l = 0 \quad (\text{VIII} \rightarrow \text{I}) \quad \dots\dots (37)$$

$$\theta = -\theta_2, z_l = \delta_0 \quad (\text{I} \rightarrow \text{II}) \quad \dots\dots (38)$$

$$\theta = 0, \dot{z}_l = 0, z_l = z_{l\max} \quad (\text{II} \rightarrow \text{III}) \quad \dots\dots (39)$$

$$\theta = \theta_3, z_l = z_{l3} \quad (\text{III} \rightarrow \text{IV}) \quad \dots\dots (40)$$

$$\theta = \pi - (\theta_1 + \theta_2), z_l = 0 \quad (\text{IV} \rightarrow \text{V}) \quad \dots\dots (41)$$

$$\theta = \pi - \theta_2, z_l = -\delta_0 \quad (\text{V} \rightarrow \text{VI}) \quad \dots\dots (42)$$

$$\theta = \pi, \dot{z}_l = 0, z_l = -z_{l\max} \quad (\text{VI} \rightarrow \text{VII}) \quad \dots\dots (43)$$

$$\theta = \pi + \theta_3, z_l = -z_{l3} \quad (\text{VII} \rightarrow \text{VIII}) \quad \dots\dots (44)$$

式(38)および(39)を用い, $\cos$ 成分の基本波すなわち $\cos \theta$ の振幅を Γ とすると,

$$\Gamma = \left[\delta_0 - \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{M_n}{k} \{a_n \cos n\theta_2 - b_n(\sin n\theta_2 - n \sin \theta_2)\} \right] \frac{1}{\cos \theta_2} \quad \dots\dots (45)$$

式(33)から,

$$\sin \alpha = \frac{1}{y_0 N_l} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{n b_n}{k} M_n \quad \dots\dots\dots (46)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{y_0 N_l} \left(\Gamma - \frac{M_1}{k} a_1 \right) \quad \dots\dots\dots (47)$$

さらに, 無次元のフーリエ係数を

$$x_n = \frac{a_n}{k\Gamma}, y_n = \frac{b_n}{k\Gamma} \quad (n=1, 3, 5, \dots) \quad \dots\dots (48)$$

とすれば,

$$z_l = \Gamma \left[\cos \theta + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} M_n x_n \cos n\theta + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} M_n y_n (\sin n\theta - n \sin \theta) \right] \quad \dots\dots (49)$$

式(46)から,

$$y_0 N_l \sin \alpha = \Gamma \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} n M_n y_n \quad \dots\dots\dots (50)$$

式(47)から,

$$y_0 N_l \cos \alpha = \Gamma (1 - M_1 x_1) \quad \dots\dots\dots (51)$$

したがって, 位相遅れ角 α は,

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} n M_n y_n}{1 - M_1 x_1} \right) \quad \dots\dots\dots (52)$$

式(45), (48), (49)および(37)~(44)から, Γ および y_0 は,

$$\frac{\Gamma}{\delta_0} = \frac{y_0}{\delta_0} \frac{N_l}{\sqrt{(1 - M_1 x_1)^2 + \left(\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} n M_n y_n \right)^2}} \quad \dots (53)$$

$$\frac{y_0}{\delta_0} = \frac{\sqrt{(1 - M_1 x_1)^2 + \left(\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} n M_n y_n \right)^2}}{N_l \left[\cos \theta_2 + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} M_n \{x_n \cos n\theta_2 - y_n(\sin n\theta_2 - n \sin \theta_2)\} \right]} \quad \dots\dots\dots (54)$$

固定支持端から x の位置における変位は,

$$z_x = \Gamma \left\{ N_x \sqrt{(1 - M_1 x_1)^2 + \left(\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} n M_n y_n \right)^2} \times \cos(\theta + \alpha) / N_l + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{3\lambda_n l}{Z_1^4 n^2 \Omega_1^2} \frac{I_x}{A_n} (x_n \cos n\theta + y_n \sin n\theta) \right\} \quad \dots\dots\dots (55)$$

ここに,

$$I_x = (\cosh \lambda_n l + \cos \lambda_n l)(\sinh \lambda_n x - \sin \lambda_n x) - (\sinh \lambda_n l + \sin \lambda_n l)(\cosh \lambda_n x - \cos \lambda_n x) \quad \dots\dots\dots (56)$$

式(37)および(40)から,

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} M_n y_n \{ \sin n(\theta_1 + \theta_2) - n \sin(\theta_1 + \theta_2) \} - \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} M_n x_n \cos n(\theta_1 + \theta_2) \quad \dots\dots\dots (57)$$

$$1 - \cos \theta_3 + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} M_n x_n (1 - \cos n\theta_3) - \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} M_n y_n (\sin n\theta_3 - n \sin \theta_3) = \frac{K_2}{K_3} \left\{ 1 - \cos \theta_2 + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} M_n x_n (1 - \cos n\theta_2) + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} M_n y_n (\sin n\theta_2 - n \sin \theta_2) \right\} + \frac{K_1}{K_3} \left\{ \cos \theta_2 + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} M_n x_n \cos n\theta_2 - \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} M_n y_n (\sin n\theta_2 - n \sin \theta_2) \right\} \quad \dots\dots\dots (58)$$

式(15)の復元力は式(37), 式(40)および(49)から,

$$\left. \begin{aligned} \frac{g(\theta)}{k\Gamma} &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (x_n \cos n\theta + y_n \sin n\theta) \\ &= \frac{K_1}{k} \left[\cos \theta + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} M_n x_n \cos n\theta + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} M_n y_n (\sin n\theta - n \sin \theta) \right] \\ &\quad ; -(\theta_1 + \theta_2) \leq \theta \leq -\theta_2 \\ \frac{g(\theta)}{k\Gamma} &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (x_n \cos n\theta + y_n \sin n\theta) \\ &= \frac{K_1}{k} \left[\cos \theta_2 + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} M_n x_n \cos n\theta_2 \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} M_n y_n (\sin n\theta_2 - n \sin \theta_2) \Bigg] \\
& + \frac{K_2}{k} [\cos \theta - \cos \theta_2 \\
& + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} M_n x_n (\cos n\theta - \cos n\theta_2) \\
& + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} M_n y_n \{ \sin n\theta + \sin n\theta_2 \\
& - n(\sin \theta + \sin \theta_2) \}] \\
& \quad ; -\theta_2 \leq \theta \leq 0 \\
& \frac{g(\theta)}{k\Gamma} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (x_n \cos n\theta + y_n \sin n\theta) \\
& = \frac{K_3}{k} [\cos \theta - \cos \theta_3 \\
& + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} M_n x_n (\cos n\theta - \cos n\theta_3) \\
& + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} M_n y_n \{ \sin n\theta - \sin n\theta_3 \\
& - n(\sin \theta - \sin \theta_3) \}] \\
& \quad ; 0 \leq \theta \leq \theta_3 \\
& \frac{g(\theta)}{k\Gamma} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (x_n \cos n\theta + y_n \sin n\theta) \\
& = 0 \quad ; \theta_3 \leq \theta \leq \pi - (\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned} \tag{59}$$

式(22)で与えられる $g(\theta)$ を次のように近似する.

$$g(\theta) = a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta \tag{60}$$

式(49)は次のように表される.

$$z_l = \Gamma \cos \theta \tag{61}$$

式(52)～(54)は次のように表される.

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{M_1 y_1}{1 - M_1 x_1} \right) \tag{62}$$

$$\frac{\Gamma}{\delta_0} = \frac{y_0}{\delta_0} \frac{N_l}{\sqrt{(1 - M_1 x_1)^2 + (M_1 y_1)^2}} \tag{63}$$

$$\frac{y_0}{\delta_0} = \frac{\sqrt{(1 - M_1 x_1)^2 + (M_1 y_1)^2}}{N_l \cos \theta_2} \tag{64}$$

ここに,

$$M_1 = \frac{3\lambda_1 l}{Z_1^4 \Omega_1^2} \frac{(\cos \lambda_1 l \sinh \lambda_1 l - \cosh \lambda_1 l \sin \lambda_1 l)}{(1 + \cosh \lambda_1 l \cos \lambda_1 l)} \tag{65}$$

式(63)および(64)から,

$$\frac{\Gamma}{\delta_0} = \frac{1}{\cos \theta_2} \tag{66}$$

式(59)で $n=1$ とし, $\cos \theta$ および $\sin \theta$ を乗じて θ に関して零から 2π まで積分すると, 無次元フーリエ係数 x_1 および y_1 は次式から求まる.

$$\begin{aligned}
x_1 = & \frac{2}{\pi} \left[\frac{K_1}{k} \left\{ \frac{\theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_2}{2} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right\} \right. \\
& + \left. \frac{K_2}{k} \left(\frac{\theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_2}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{K_3}{k} \left(\frac{\theta_3 - \sin \theta_3 \cos \theta_3}{2} \right) \Bigg] \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
y_1 = & \frac{2}{\pi} \left[\frac{K_1}{k} \left\{ \frac{\cos 2(\theta_1 + \theta_2)}{4} + \frac{1}{4} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\cos^2 \theta_2}{2} - \cos \theta_2 \right\} \right. \\
& + \frac{K_2}{k} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta_2 - 1 + \cos \theta_2 \right) \\
& - \left. \frac{K_3}{k} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta_3 - 1 + \cos \theta_3 \right) \right] \tag{68}
\end{aligned}$$

式(57)および(58)から,

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \cos(\theta_1 + \theta_2) = 0 \tag{69}$$

$$\cos \theta_3 = 1 - \frac{K_2}{K_3} - \left(\frac{K_1}{K_3} - \frac{K_2}{K_3} \right) \cos \theta_2 \tag{70}$$

式(67)および(68)から,

$$\begin{aligned}
x_1 = & \frac{2}{\pi} \left[\frac{K_1}{k} \left(\frac{\theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_2}{2} \right) \right. \\
& + \frac{K_2}{k} \left(\frac{\theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_2}{2} \right) \\
& + \left. \frac{K_3}{k} \left(\frac{\theta_3 - \sin \theta_3 \cos \theta_3}{2} \right) \right] \tag{71}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1 = & \frac{2}{\pi} \left[\frac{K_1}{k} \left(\frac{\cos^2 \theta_2}{2} - \cos \theta_2 \right) \right. \\
& + \frac{K_2}{k} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta_2 - 1 + \cos \theta_2 \right) \\
& - \left. \frac{K_3}{k} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta_3 - 1 + \cos \theta_3 \right) \right] \tag{72}
\end{aligned}$$

θ_2 を与えると, 式(69)および(70)から θ_1 および θ_3 が求まる. 次に, 式(71)および(72)から得られる x_1 および y_1 を用いて式(64)から y_0/δ_0 を求めることによって, 式(66)から Γ/δ_0 が求まる. したがって, 与えられた y_0/δ_0 に対する Γ/δ_0 を用いて共振曲線を求めることができる.

振動モード Z_x は式(55)を用いて求めることができる. 式(55)に $n=1$ および $\theta=0$ を代入すると,

$$\begin{aligned}
Z_x = & \Gamma \left\{ \frac{N_x \sqrt{(1 - M_1 x_1)^2 + (M_1 y_1)^2}}{N_l} \cos \alpha \right. \\
& + \left. \frac{3\lambda_1 l}{Z_1^4 \Omega_1^2} \frac{I_x}{A_1} x_1 \right\} \tag{73}
\end{aligned}$$

式(6)から,

$$\lambda_1^4 x^4 = Z_1^4 \Omega_1^2 x^4 / l^4 \tag{74}$$

式(51)および(63)を用いると, 式(73)は,

$$Z_x = \Gamma \left\{ \frac{N_x}{N_l} (1 - M_1 x_1) + \frac{3\lambda_1 l}{Z_1^4 \Omega_1^2} \frac{I_x}{A_1} x_1 \right\} \tag{75}$$

$\Gamma/\delta_0 < 1$ のとき, 区間(II)および(VI)は存在しない. すなわち, $\theta_2=0, K_2=0$ である. この場合, 式(69)および式(70)は,

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \cos \theta_1 = 0 \tag{76}$$

$$\cos \theta_3 = 1 - \frac{K_1}{K_3} \dots\dots\dots (77)$$

式(71)および(72)は,

$$x_1 = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{K_1}{k} \frac{\pi}{4} + \frac{K_3}{k} \left(\frac{\theta_3 - \sin \theta_3 \cos \theta_3}{2} \right) \right\} \dots\dots (78)$$

$$y_1 = \frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{K_1}{k} - \frac{K_3}{k} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta_3 - 1 + \cos \theta_3 \right) \right\} \dots\dots\dots (79)$$

式(64)から,

$$\frac{y_0}{\delta_0} = \frac{\sqrt{(1 - M_1 x_1)^2 + (M_1 y_1)^2}}{N_1 \cos \theta_2} \dots\dots\dots (80)$$

式(76)および(77)から θ_1 および θ_3 が求まる。また、式(78)および(79)から x_1 および y_1 が求まる。これらの値を式(80)に代入すると、式(63)から Γ/δ_0 が得られる。

4. 数 値 計 算 例

図4および5に非線形サポートで支持されたはりの端部(サポート端)の変位に関する共振曲線を示す。図4(a)および(b)はそれぞれ $y_0/\delta_0=1.0$ および 0.5 で比較的非線形性が弱い $K_1/k=4, K_2/k=2, K_3/k=10$ とした場合の共振曲線を示す。図5は比較的非線形性が強い $K_1/k=40, K_2/k=20, K_3/k=100$ とした場合の共振曲線を示す。

これらの図から、入力振幅 y_0/δ_0 が小さくなるにつれて、応答振幅 Γ/δ_0 は小さくなること、また非線形パラメータ ($K_1/k, K_2/k, K_3/k$) が大きくなるにつれて、共振点での振幅が小さくなっていることがわかる。さらに、 y_0/δ_0 が小さくなると共振振動数が高くなり、振

(a) $y_0/\delta_0=1.0$

(b) $y_0/\delta_0=0.5$

Fig. 4 Resonance curve of continuous system ($K_1/k=4, K_2/k=2, K_3/k=10$)

(a) $y_0/\delta_0=1.0$

(b) $y_0/\delta_0=0.5$

Fig. 5 Resonance curve of continuous system ($K_1/k=40, K_2/k=20, K_3/k=100$)

Fig. 6 Mode shapes of continuous system
($K_1/k=4$, $K_2/k=2$, $K_3/k=10$, $y_0/d_0=1.0$)

幅依存性がみられる。

図6に、サポート端の変位の共振曲線図4(a)で●印をつけた Ω_1 に対する振動モードを示す。この結果より、共振振動数に近い振動数領域ではそれぞれの共振振動数に対応する振動モードが卓越して現れていることがわかる。

5. 結 言

配管系の支持部に履歴特性がある場合の定常応答について検討するために、1スパンモデルとして、一端が固定支持され、他端が四角形の履歴減衰のある非線形サポートで支持されたはりを用い、このモデルの定常応答の近似解法を示した。そして、この方法を用いて種々の入力振幅、非線形パラメータ(K_1/k , K_2/k , K_3/k)に対するサポート端の共振曲線を求め、非線形サポートが定常応答に与える影響を明らかにした。すなわち、入力振幅が小さくなるほど、非線形パラメータが大きくなるほど共振曲線のピークが小さくなる傾向があること、振幅依存性があること、また振動モードを求めることにより、共振振動数近傍ではそれぞれの共振振動数に対応する振動モードが卓越して現れることなどを明らかにした。

文 献

- (1) Yang, B., Distributed Transfer Function Analysis of

- Complex Distributed Parameter Systems, *Trans. ASME Journal of Applied Mechanics*, **61**-1(1994), 84-92.
- (2) Gau, J. S., Scavuzzo, R. J. and Lam, P. C., Dynamic Behavior of Elastic-Plastic Simply Supported Pipes, *Trans. ASME J. Pressure Vessel Technology*, **116**-3(1994), 306-311.
- (3) Johnson, E. R., Nonlinear Structural Behavior of Components, *ASME Seismic Eng. : 1989 PVP Conf.*, PVP-Vol. 182(1989), 151-163.
- (4) Worner, J. D., Determination of Ultimate Aseismic Strength of Equipment and Piping, *ASME Seismic Eng. : 1989 PVP Conf.*, PVP-Vol. 182(1989), 155-158.
- (5) Watanabe, T., Forced Vibration of Continuous System with Nonlinear Boundary Conditions, *Trans. ASME J. Mec. Design*, Vol. 100(1978), 487-491.
- (6) Hess, D. P. and Wagh, N. J., Chaotic Normal Vibrations and Friction at Mechanical Joints with Nonlinear Elastic Properties, *Trans. ASME J. Vib. Acoustics*, **116**-4(1994), 474-479.
- (7) 渡邊鉄也・鈴木浩平・三森友彦・清水信行, 支持部にかた・摩擦特性を有するプラント配管系の地震応答, 機論, **62**-595, C(1996), 873-878.
- (8) King, M. E. and Vakakis, A. F., An Energy-Based Formulation for Computing Nonlinear Normal Modes in Undamped Continuous Systems, *Trans. ASME J. Vib. Acoustics*, **116**-3(1994), 332-340.
- (9) Igusa, T. and Sinha, R., Response Analysis of Secondary Systems with Nonlinear Supports, *Trans. ASME J. Pressure Vessel Tech.*, **113**-4(1991), 524-531.
- (10) Pinelli, J. -P., Craig, J. I. and Goodno, B. J., Energy-Based Seismic Design of Ductile Cladding Systems, *Proc. ASCE J. Structural Eng.*, **121**-3(1995), 567-578.
- (11) 浪田芳郎・川畑淳一・市橋一郎・福田俊彦, 弾塑性ダンパ支持配管系の耐震設計手法の開発(第4報, 時刻歴解析で用いるダンパの荷重-変位モデルの検討), 機論, **62**-594, C(1996), 494-501.
- (12) 渡辺武, 連続体の定常衝突振動の解析(半周期に1回の衝突をする場合), 機論, **46**-405, C(1980), 519-527.
- (13) Watanabe, T. and Shibata, H., On Nonlinear Vibration of a Beam-Response of a Beam with a Gap at One End-, *Report of the Institute of Industrial Science*, **36**-1(1991), 1-25, The University of Tokyo.
- (14) 青木繁・渡辺武, 非対称履歴特性を有する連続体の強制振動, 機論, **63**-610, C(1997), 1855-1860.
- (15) 前澤成一郎・渡辺武, 履歴特性を持つ物体の定常衝突振動の解析(第2報, 反発力が四角形の履歴特性をもつ場合), 機論, **41**-352(1975), 3458-3469.