カオスを利用した倒立振子の振り上げ制御*

田中 芳夫^{*1}, 川上 博^{*2}, 藤本 憲市^{*3}

Swing-Up Control of a Inverted Pendulum Using Chaotic Motion

Yoshio TANAKA, Hiroshi KAWAKAMI and Ken-ichi FUJIMOTO

The dynamics of an inverted pendulum system is generally described by nonlinear ordinary equations including trigonometric functions. Therefore, under certain conditions in the periodic motion of a cart, the pendulum exhibits chaotic motions. In this paper, we propose a new swing-up control method for a parallel-type double inverted pendulum using the chaotic motions that appear inherently in its dynamics. We calculate the bifurcation diagram in the control parameter plane, then design the swing-up controllers based on this diagram. One chosen pendulum or two pendulums can be swung up from lowest position to upper position. The experimental results demonstrate the effectiveness of this controller. We also compute the basins of attraction to understand the reason of effectiveness clearly.

Key Words: Inverted Pendulum, Swing-Up Control, Chaos, Manipulator, Passive Joint, Bifurcation Diagram, Nonlinear Phenomena

1. 緒 言

不安定な機械システムをフィードバック制御によって安定化させる例として、古くから倒立振子が用いられている。比較的容易にシステムの状態方程式の導出とパラメータの同定が行えることから、基本的な単独形に加え、XY平面型⁽³⁾、直列型⁽²⁾、並列型⁽⁴⁾⁽⁵⁾など現在でも制御教育、研究の観点から活発な報告がなされている⁽¹⁾⁻⁽⁹⁾。これらの報告のうち振子を安定平衡点である垂れ下がった状態から不安定平衡点である倒立点へ状態を移行させる振り上げ制御問題は、非線形性が強く、また動作範囲が広いため局所的な線形制御理論では解くことができない。このため、これまでに提案され実験での検証が行われている手法の多くは、数値シミュレーションによる振子の振り上げ軌道の決定後に微調整をして実験を行う⁽⁸⁾、振子の固有振動数付近で台車を Bang-Bang 形で制御する⁽¹⁾など、数値シミュレーションと経験的試行錯誤に基づくフィードフ

ォワード的入力を利用して倒立点近傍までの移行を行うというものであった。

一方、最近、非線形性と非ホロノミック性という系に本質的に内在する二つの力学的性質を積極的かつ効果的に利用した新しい機械システムを構築するための研究が注目され⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾、一つの例として自由関節を有するマニピュレータの制御が扱われている⁽¹²⁾⁽¹³⁾。倒立振子系は最も簡単な自由関節を有するマニピュレータの一つと見なすことができる。著者らは既報⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾において、倒立振子系と同じ力学的性質を有する天井走行型の1リンクマニピュレータの台車が繰返し運動を行う場合、繰返し運動の振幅などのある特定の制御パラメータ領域で、振子がカオス運動をはじめとする非線形系特有の多様な運動を行うことを報告した。

本論文では、非線形性という系に本質的に内在する力学的性質に起因した台車の周期運動によって発生する振子のカオスの挙動を利用して、振子を垂れ下がった状態から倒立点近傍まで振り上げる方法を検討する。すなわち、台車の繰返し運動の振幅と周波数という二つの可変な制御パラメータに関する分岐図を利用して、倒立点周りの線形化に基づくLQR制御等の線形フィードバック制御による安定化可能範囲まで、単純な台車の繰返し運動のみで容易に振子が振り上げ

* 原稿受付 1998年9月3日。

^{*1} 正員、工業技術院四国工業技術研究所 (〒761-0395 高松市林町2217-14)。^{*2} 徳島大学工学部 (〒770-8506 徳島市南常三島町2-1)。^{*3} 阿南工業高等専門学校 (〒774-0017 阿南市見能林町青木265)。

E-mail: yoshio@sniri.go.jp

可能であることを示す。なお、本手法の有効性をより明確に検証するため、並列型倒立振子を対象として、その二つの振子が適切な制御パラメータの設定により選択的に振り上げ可能であることを示す。

2. 並列型倒立振子の力学系と制御原理

2.1 運動方程式の導出 対象とした並列型倒立振子のモデルを図1に示す。ここで、図中の記号の物理的意味は以下のとおりである。

- x : 原点からの台車の変位 m
- M : 台車の質量 kg
- m_i : 振子 i の質量 kg
- l_i : 振子 i の回転部から質量中心までの距離 m
- J_i : 振子 i の質量中心回りの慣性モーメント kgm^2
- θ_i : 振子 i の回転角度 rad
- D_x : 台車の粘性摩擦係数 kg/s
- D_{θ_i} : 振子 i の回転部の粘性摩擦係数 kgm^2/s
- F : 台車への制御入力 N

系全体の運動エネルギー K 、位置エネルギー P および損失 D は、文献(17)と同様の計算を図1に示した座標系に対して行うことにより次式となる。

$$K = \frac{1}{2} \left(M + \sum_{i=1}^2 m_i \right) \dot{x}^2 + \sum_{i=1}^2 m_i l_i \dot{x} \dot{\theta}_i \cos \theta_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (m_i l_i^2 + J_i) \dot{\theta}_i^2 \quad (1)$$

$$P = - \sum_{i=1}^2 m_i g l_i \cos \theta_i \quad (2)$$

$$D = \frac{1}{2} \left(D_x \dot{x}^2 + \sum_{i=1}^2 D_{\theta_i} \dot{\theta}_i^2 \right) \quad (3)$$

ここで、 g は重力加速度を表す。したがって、一般化座標として $q_1 = x$, $q_2 = \theta_1$, $q_3 = \theta_2$ をとり、振子の回転部は自由関節より $U_2 = U_3 = 0$ として、ラグランジュ

Fig.1 Schematic and coordinates of a parallel-type double inverted pendulum

の運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} + \frac{\partial P}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = U_j, \quad (j=1, 2, 3) \quad (4)$$

を用いることにより、台車と振子 i の運動方程式として次式を得る。

$$\begin{aligned} \left(M + \sum_{i=1}^2 m_i \right) \ddot{x} + \sum_{i=1}^2 m_i l_i (\ddot{\theta}_i \cos \theta_i - \dot{\theta}_i^2 \sin \theta_i) + D_x \dot{x} &= F \quad (5) \\ m_i l_i \ddot{x} \cos \theta_i + (m_i l_i^2 + J_i) \ddot{\theta}_i + m_i g l_i \sin \theta_i + D_{\theta_i} \dot{\theta}_i &= 0, \quad (i=1, 2) \quad (6) \end{aligned}$$

式(5)が台車の運動、式(6)が振子 i の運動を表す。式(6)よりわかるように、二つの振子の運動は台車の加速度 $\ddot{x}$ を介して相互に干渉を行う力学系になっている。なお、 n 本並列型の場合は式(1)～(6)において $\sum_{i=1}^2$ の代わりに $\sum_{i=1}^n$ となる。

2.2 振り上げ制御の原理 台車の速度 $\dot{x}$ は、変位 x に対する直結フィードバックによる1型のサーボ系の構成⁽¹⁸⁾あるいは適当な制御入力 F (付録参照)によって、

$$\dot{x} = A_0 + A \sin \nu t \quad (7)$$

と容易に制御できる。このとき二つの振子の運動を記述する式(6)は、次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta_i}{dt^2} + k_i \frac{d\theta_i}{dt} + a_i \sin \theta_i + b_i \nu A \cos \nu t \cos \theta_i &= 0, \quad (i=1, 2) \quad (8) \end{aligned}$$

ただし、

$$k_i = \frac{D_{\theta_i}}{m_i l_i^2 + J_i}, \quad a_i = \frac{m_i g l_i}{m_i l_i^2 + J_i}, \quad b_i = \frac{m_i l_i}{m_i l_i^2 + J_i} \quad (9)$$

とおいた。すなわち、式(7)で表される台車の速度制御によって、二つの振子はそれぞれ独立に式(8)の常微分方程式によって記述される運動を行うようになる。そして、その挙動はシステムパラメータ $\{k_i, a_i, b_i, \nu, A\}$ と初期値 $(\theta_i, \dot{\theta}_i)$ によってのみ規定され、既報⁽¹⁸⁾と同様の非線形力学系特有の多様な周期運動やカオス振動を有することになる。

式(8)のシステムパラメータのうち $\{k_i, a_i, b_i\}$ は振子の構造上決定される物理定数であるが、 $\{\nu, A\}$ は式(7)に対応する台車の繰返し運動の振幅 A/ν と周期 $T=2\pi/\nu$ を決める可変なパラメータである。したがって、安定平衡点である垂れ下がった状態に対応する初期値 $(\theta_i, \dot{\theta}_i) = (0, 0)$ に対して、二つの振子が様相の異なった挙動を示すような適当な $\{\nu, A\}$ を設定することで、二つの振子のうちの一方を選択的に、あるいは両方を倒立点近傍へ振り上げることが可能に

なる。このような $\{\nu, A\}$ を決定するために、本論文では $\{\nu, A\}$ に関する 2 パラメータ分岐図⁽¹⁹⁾ を利用する。

3. 分岐図と引力圏図

3・1 分岐図 定常状態において、式(8)で記述される振子の運動は、初期値 $(\theta_i, \dot{\theta}_i)$ によって異なった非線形力学系特有の多様な周期運動やカオス振動を共存する。その詳細な性質と分岐図の概略については、すでに既報⁽¹⁵⁾ において報告したとおりである。ここでは 4 章で述べる並列型倒立振子の実験装置のパラメータ(表 1 参照)に対して、振子を振り上げるのに有効と考えられる式(8)の安定な周期解について、可変な制御パラメータ $\{\nu, A\}$ 上における 2 パラメータ分岐図の計算を行った結果(図 2 参照)について示す。

図 2 において、記号 G, I, D はそれぞれ周期解の接線分岐、周期倍分岐、 D 型分岐の発生するパラメータを示す曲線を表している。右上付数字 m は曲線が

Table 1 Parameters of experimental system

M [kg]	3.76
m_1, m_2 [kg]	0.057, 0.041
l_1, l_2 [m]	0.175, 0.088
J_1, J_2 [kgm ²]	6.86×10^{-4} , 6.10×10^{-5}
D_x [kg/s]	44.6
$D_{\theta 1}, D_{\theta 2}$ [kgm ² /s]	1.37×10^{-4} , 3.61×10^{-5}
k_1, k_2	0.056, 0.097
a_1, a_2	40.2, 93.6
b_1, b_2	4.10, 9.56

Fig. 2 Bifurcation diagram of the parallel-type double inverted pendulum in the ν - A plane.

m -周期解に対応する分岐であることを示し、記号 R はその周期解が振子の回転運動に対応する第 2 種周期解であることを示している。左下付記号 $\{L, S\}$ はそれぞれ長振子、短振子に対応する曲線であることを示し、右下付数字は異なったグループの周期解を区別するために便宜上つけている。ただし、右下付数字が同じでも R の有無で異なったグループの周期解を表し、左下付記号 $\{L, S\}$ 以外は同じ場合はそれぞれ長振子、短振子の同じ性質の周期解の分岐を示していることに注意されたい。また、 ν_L, ν_S は各振子の固有振動数に相当する位置を示している。

2 パラメータ分岐図における同じ添字の G と I に囲まれた領域では、その右上付数字 m に対応した安定な m -周期解が存在する。例えば、図 2 における網目をつけた領域 $sG_3^3 - sI_3^3, sG_2^{2R} - sI_2^{2R}, L G_3^3 - L I_3^3$ においては、それぞれ短振子に 3-周期解、短振子に第 2 種 2-周期解、長振子に 3-周期解が少なくとも 1 個は存在する。

3・2 制御パラメータの選択と引力圏図 式(7)の速度制御あるいは加速度制御⁽¹⁴⁾ により台車が正弦波状の周期運動を行う場合、振幅 A/ν の若干の増加で安定な周期解が周期倍分岐の連鎖によりカオスに進展するパラメータ領域が存在する。例えば、図 2 点 b においては短振子は sI_2^{2R} で発生する周期倍分岐後の連鎖によりカオス状態が発生する。一方、長振子も $L I_3^3$ で発生する周期倍分岐後の連鎖によりカオス状態になる。また、点 c においても短振子は sI_3^3 で発生する周期倍分岐後の連鎖によりカオス状態となる。ただし、周期倍分岐後の連鎖によりカオスに至るパラメータ領域において安定な周期解が共存する場合、振子は過渡現象としてカオス状の運動を行った後、定常状態では安定な周期解に対応する振動状態になることも多い。しかし、振子を倒立点近傍まで振り上げるという目的に関しては、過渡現象として振子がカオス状の運動を十数秒程度行うパラメータ領域の選択で十分である。

以上、周期倍分岐の連鎖によるカオス状運動の発生するパラメータ領域の内、安定して長時間カオス状運動が見られ、かつ少ない台車の移動量(すなわち、小さい振幅 A/ν)という観点から、二つの振子を選択的に振り上げ可能なパラメータを分岐図利用して選択する。図 2 における点 $a(A=0.7, \nu=6.5)$, $b(A=1.2, \nu=7.5)$, $c(A=0.6, \nu=11.0)$ は、このようなパラメータの位置を示す。初期値 $(\theta_i, \dot{\theta}_i)=(0, 0)$ に対して、点 a, b は長振子がカオス状の運動を発生し、点 b, c は短振子がカオス状の運動を発生するパラメータであ

Fig. 3 Basins of attraction of the parallel-type double inverted pendulum for different points in the ν - A plane.

る。したがって、点 a においては長振子のみ、点 b では両方、点 c では短振子のみが振り上げ可能となる。

次に、選択した各点における安定な周期解の共存状態について考察する。図 3 は点 a, b, c における各振子の初期値に対するアトラクタの引力圏図である。黒丸 S^1 は、振子の垂れ下がった状態である安定な平衡点が台車が周期運動をすることにより安定な周期解へ移行したことに対応する、1-周期解のポワソナレ写像上の位置を示している。

振子の垂れ下がった状態である初期値 $(\theta_i, \dot{\theta}_i)=(0, 0)$ がフラクタル状のぼやけた境界の複雑な引力圏上にある場合 [図 3(a), (b), (b'), (c')], 振子の挙動はカオス的になり倒立点近傍まで振り上がる。一方、初期値 $(\theta_i, \dot{\theta}_i)=(0, 0)$ が単純なはっきりした境界の引力圏の内部にある場合 [図 3(c), (a')], 振子は速やかに安定な 1-周期解 S^1 に対応する定常振動状態になるため、振子が倒立点近傍まで振り上がることはない。以上の結果から、先に述べた点 a, b, c に対応する制御パラメータ値 $\{\nu, A\}$ の設定が、振子の選択的振り上げに有効であることが数値的に検証できた。

Fig. 4 An overview of the experimental system

4. 実験

4.1 実験装置 これまでに述べた選択的振り上げ制御の原理を検証するために実験装置を試作した。2本の振子を式(5), (6)の倒立点における線形化モ

Fig. 5 Block diagram of the control system

Fig. 6 Results of swing-up control ($A=0.7$, $\nu=6.5$, $\bullet$: Long pendulum, $\circ$: Short pendulum).

デルと LQR 制御により倒立状態に安定化しているときの外観を図 4 に示す。並列型倒立振子の物理パラメータは先に示した表 1 のとおりである。図 5 は制御・計測部の構成を示している。振子の角度 θ_i をレーザーエンコーダにより 1.55×10^{-4} rad/pulse という極めて高精度に検出するため、角速度 $\dot{\theta}_i$ は 1 ms 以内の高速なサンプリングに対して検出分解能 0.019 rad/s という低速度まで検出できる。コントローラの速度制御モードを利用する場合、振り上げ制御の指令は式 (7) に対応する速度指令をパーソナルコンピュータにより逐次与えるだけでよい。また、力指令モードを利用する場合は各振子の角度、角速度を逐次検出し、式 (13) (付録参照) に基づく力指令を逐次与えればよい。以下の実験では何れの方法を用いても同じ結果を得ること

Fig. 7 Results of swing up control ($A=0.6$, $\nu=11.0$, $\bullet$: Long pendulum, $\circ$: Short pendulum). Fig. 8 Results of swing up control ($A=1.2$, $\nu=7.5$, $\bullet$: Long pendulum, $\circ$: Short pendulum).

ができる。

4・2 実験結果 図6～8は、おのおの式(7)の制御パラメータ $\{\nu, A\}$ を図2の分岐図の点 a, b, c に設定し、実験装置の速度指令モードを利用して、台車を繰返し運動させた場合における長短2本の振子の角度と角速度の計測結果を示している。

点 a に対応する図6の場合、長振子●はカオス状の運動により12s後に倒立点近傍に振れ角が達する挙動(すなわち振れ角が3radを越える挙動)が発生しているが、短振子○は振れ角1.8rad以下の振動を繰返すのみである。一方、点 c に対応する図7の場合、長振子は振れ角0.6rad以下の振動を繰返すのみであるが、短振子はカオス状の運動により4s以降に倒立点近傍に振れ角が達する挙動が発生している。

図8は点 b に対応し、2本の振子がカオス状の運動により倒立点近傍まで振り上がる場合の例である。短振子は制御直後の0.7s後に倒立点近傍に達する挙動が発生し、長振子は2.5s後に初めて倒立点近傍に達する挙動が発生している。その後、3sには2本の振子が同時に倒立点近傍に達する挙動も発生していることがわかる。この3s後の長短2本の振子が同時に振り上がる機会を利用して、図4のようなLQR制御に制御の切り替えを行い、並列型倒立振子の振り上げ安定化を試みたが、LQR制御の安定化できる初期値の条件が本装置では厳しいためうまくゆかなかった。なお、いずれか1本の振子の場合には、カオス的運動による振り上げ後、LQR制御への制御モード切り替えによる倒立振子の安定化は容易に実現できた。

5. 結 言

古くから発振回路やアンテナ等電気システムにおいては、共振現象は望ましい現象として利用されてきた。一方、機械システムにおいては、振動現象は騒音や故障の原因とされ、その積極的利用法についてあまり検討されていなかったように思われる。本論文では、台車の繰返し運動の振幅と周波数という二つの制御パラメータに関する分岐図より明らかになった振子系の力学的性質の応用の一つとして、カオスを利用した並列型倒立振子の選択的振り上げの結果を示した。本論文が、機械システムにおいて、共振現象やカオス振動を積極的かつ効果的に利用する新規なシステム設計・構築の参考になれば幸いである。

また、本論文で得られた結果は、系に本質的に内在する力学的性質の一つである非線形性の利用としての側面も有している。本システムに本質的に内在するもう一つの力学的性質である非ホロノミック性と、カオ

スや複数の安定な状態の共存等、非線形力学系特有の性質を利用すれば、より広範囲の応用可能性も開けてくると思われる。将来、系に内在する二つの本質的力学的性質を積極的に利用した新規な機械制御システムの構成原理が提案されることに期待したい。

付 録

式(7)の速度制御を実現する制御入力 F 式(6)より

$$\ddot{\theta}_i = -\frac{1}{Q_i}(m_i l_i \ddot{x} \cos \theta_i + m_i g l_i \sin \theta_i + D_{\theta_i} \dot{\theta}_i) \quad \dots\dots\dots (10)$$

ただし、

$$Q_i = m_i l_i^2 + J_i \quad \dots\dots\dots (11)$$

とおいた。また、式(7)を微分して

$$\dot{x} = A\nu \cos \nu t \quad \dots\dots\dots (12)$$

これら式(10)～(12)と式(7)を式(5)に代入して、 $\{\dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\theta}\}$ を消去することにより、式(7)の速度制御を実現するための時間関数である制御入力 $F(t)$ に関する一般式

$$F(t) = f(A_0, A, \nu, t, \theta_1(t), \theta_2(t), \dot{\theta}_1(t), \dot{\theta}_2(t)) \quad \dots\dots\dots (13)$$

を得る。したがって、式(13)より振子の回転角と角速度を計測することで、式(7)の制御に必要な入力 F を求められることがわかる。

文 献

- (1) 森正三・西原裕善・古田勝久, 倒立振子制御用ハイブリッド制御系, 計測自動制御学会論文集, **12-4**(1976), 482-487.
- (2) 梶原宏之・小菅一弘・古田勝久, 傾斜されたレール上の二重倒立振子の位置制御, 計測自動制御学会論文集, **15-7**(1979), 873-879.
- (3) 辻澤隆彦・余湖静也・田川遼三郎, 2次元倒立振子の制御, 計測自動制御学会論文集, **19-12**(1983), 964-969.
- (4) 川谷亮治・山口尊志, 並列型2重倒立振子系の解析とその安定化, 計測自動制御学会論文集, **29-5**(1993), 572-580.
- (5) 杉江俊治・岡田昌史, 並列型倒立振子システムの H_∞ 制御, システム制御情報学会論文誌, **6-12**(1993), 543-551.
- (6) 結城則尚・猪岡光・小林博巳, トルクに制限がある場合の振り子の制御, 機論, **52-475**, C(1986), 1026-1029.
- (7) 橋元皓・猪岡光, 未知パラメータを有する振り子の振り上げ制御, 機論, **57-533**, C(1991), 82-87.
- (8) 小島宏行・小山清・根津紀久雄・坂本賢治, ロボットによる振り子の振り上げ制御, 機論, **57-535**, C(1991), 543-551.
- (9) 西田真幸・兼重明宏・寺嶋一彦, 倒立振子の振り上げ非線形プロセスの制御, 計測自動制御学会論文集, **31-9**(1995), 1452-1461.
- (10) 中村仁彦, 非ホロノミック系制御研究の展望, 計測と制御, **36-6**(1997), 384-389.
- (11) ミニ特集: カオスとロボット, 日本ロボット学会誌, **15-8**(1997), 1097-1125.
- (12) 中村仁彦・濃沼雅史・鈴木高宏, 自由関節を持つ平面ア

- ームのカオス的挙動と非線形制御, 日本ロボット学会誌, **14**-4(1996), 602-611.
- (13) 荒井裕彦・谷江和雄・城間直司, 非駆動関節を有する水平3軸マニピュレータの非ホロノミック拘束下におけるフィードバック制御, 日本ロボット学会誌, **15**-6(1997), 943-952.
- (14) 田中芳夫・川上博, 天井走行形1リンクマニピュレータに見られる非線形現象, 機論, **61**-583, C(1995), 791-798.
- (15) 田中芳夫・川上博・上田哲史, 速度制御された繰り返し運動を行う天井走行形1リンクマニピュレータに見られる非線形現象, 機論, **63**-611, C(1997), 2360-2367.
- (16) 佐伯正美, 倒立振子の非線形コントローラ設計と厳密な線形化法, 計測自動制御学会論文集, **29**-4(1993), 491-493.
- (17) 平井一正・新堂尚紀, 複合システムの協調動作(n 本倒立振子系の場合), 電子情報通信学会論文誌 A, **J 74**-A(1991), 1748-1754.
- (18) 古田勝久・川路茂保・美多勉・原辰次, メカニカルシステム制御, (1984), 78-104, オーム社.
- (19) Kawakami, H., Bifurcation of Periodic Responses in Forced Dynamic Nonlinear Circuits: Computation of Bifurcation Values of the System Parameters, *IEEE Trans. Circuits Systems*, CAS-31-3(1984), 248-260.
-