円領域への極指定による柔軟構造物のロバスト制御*

大久保 博志^{*1}, 銭 谷 享^{*2}

Disc-Pole Assignment for Robust Control of Flexible Structures

Hiroshi OKUBO^{*3}, Susumu ZENIYA^{*3} Osaka Prefecture University Department of Aerospace Engineering,
Gakuen-cho 1-1, Sakai, Osaka, 599-8531 Japan

This paper presents a method of disc-pole assignment for the design of robust control of flexible structures. The proposed method achieves a pole assignment of the controlled modes to a specified circular region in the complex plane and simultaneously obtains robust stability of the closed-loop system for important residual modes. The inverse bilinear transformation is used to obtain the conditions for assigning the poles to a specified circular region in the complex plane, and the proposed robust control design problem is formulated as a nonlinear optimization problem subjected to these conditions. The feasibility of the design method is examined by numerical simulations.

Key Words: Flexible Structure, Vibration Control, Robust Control, Pole Assignment, Bilinear Transformation

1. はじめに

大形柔軟衛星などの柔軟宇宙構造物では、宇宙空間の外乱や重力による荷重が小さいことを利用して極度の軽量化が行われるため、そのダイナミクスは次のような特性をもっている。

(1) 低い固有振動数の弾性モードをもち、多数の振動モードが制御周波数帯域に存在する。

(2) 減衰が極度に小さく、わずかの外乱によって変形し、容易に振動が励起される。

(3) 地上では完全な形で動特性試験を行うことができず、比較的大きなモデル誤差が含まれる。

また、制御系の設計に際して、モデルの低次元化を必要とするため、切り捨てた剰余モードの影響によって誤差を生じる観測スピルオーバーと呼ばれる現象や、制御入力により、剰余モードを加振してしまう制御スピルオーバーによっても、極が正しく配置されなかったり、システムが不安定になる恐れがある。

一方で、宇宙構造物は高精度な位置・姿勢・振動制

御が要求されており、このため、センサ・アクチュエータ系を構造物上の複数の箇所に配置し、システムのパラメータ変動に不感であり、スピルオーバーを抑制するような能動的制御技術が必要とされている。著者らは、スピルオーバーを抑制するロバスト極配置法についての研究を行ってきた⁽¹⁾。本論文では、剰余モードのうちダイナミクスが既知である特に重要な剰余モードを選び、その減衰が低下するのを防ぐための制約条件を双一次変換を利用して定式化する。さらに、この制約条件の下でロバスト性の指標となる H_{∞} ノルムを最小化する手法を提案し、数値計算によりその有効性を確認する。

2. 円領域への極指定ロバスト制御

制御対象の制御モード、剰余モード、コントローラとの関係を図1のように表す。

$\Delta(s)$ を剰余モード、 $T_{zw}(s)$ を $w \rightarrow z$ の伝達関数とする。 $\Delta(s)$ が安定であるとき、図1のシステムが安定であるための条件は式(1)を満たすことである例えば⁽²⁾。

$$\|T_{zw}(s)\|_{\infty} < 1/\|\Delta(s)\|_{\infty} = \gamma \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

ここで、 $\|\cdot\|_{\infty}$ は $\cdot$ の最大特異値をあらわす。

$$\|F(s)\|_{\infty} = \bar{\sigma}(F(j\omega)) \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

* 原稿受付 1998年8月26日。

^{*1} 正員、大阪府立大学工学部(〒599-8531 堺市学園町1-1)。

^{*2} 三菱電機(株)姫路製作所(〒670-0993 姫路市千代田町840)。
E-mail: okubo@aero.osakafu-u.ac.jp

Fig.1 Flexible structure control with model uncertainty

Fig.2 Design objective of robust pole assignment

剰余モードがない(ノミナル)モデルにおいて制御モードの極を図2のように円1の内部に配置するとする。制御モードの極を指定円領域内に配置すると、剰余モードの極は不安定方向(図2では右側)に移動し、減衰が低下する可能性がある。そこで、制御モードと剰余モードの極を含むように円2を定める。制御入力を加えても極がこの円内に留まるような制約条件を双一次変換を利用して求め、コントローラを決定する際に課すことによって、剰余モードの安定性を保証し、減衰をある程度保つことができる。本論文では、まず指定円領域へのロバスト極配置法について述べ、次に双一次変換を利用して、主要な剰余モードの減衰低下を防止する方法を提案する。

柔軟構造物のダイナミックスは、制御系設計のための重要な低周波数領域の振動モード(制御モード)と、制御系設計において省略される高周波数領域の剰余モ

ードに分割して、以下のような線形システムとして表すことができる。制御モードと剰余モードの状態方程式を添字 c と r を用いてそれぞれ式(3), (4)のように表す。

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c(t) + B_c u(t) \\ y_c = C_c x_c(t) \end{cases} \quad (3)$$

$$x_c(t) \in R^n, u(t) \in R^m, \text{rank}(B_c) = m, y_c \in n.$$

$$\begin{cases} \dot{x}_r = A_r x_r(t) + B_r u(t) \\ y_r = C_r x_r(t) \end{cases} \quad (4)$$

$$x_r(t) \in R^{nr}, u(t) \in R^m, \text{rank}(B_r) = m,$$

$$x_r(0) = x_{r0}, y_r \in p$$

ベクトル・マトリックス形式で表すと以下ようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_c \\ B_r \end{bmatrix} u \quad (5)$$

$$y = [C_c \ C_r] \begin{bmatrix} x_c \\ x_r \end{bmatrix} \quad (6)$$

次のフィードバック制御則

$$u = K y_c = K C_c x_c. \quad (7)$$

を用いるとき閉ループ系は次式となる。

$$\dot{x}_c = (A_c + B_c K C_c) x_c \quad (8)$$

剰余モードによるノミナルプラントの変動に対するロバスト安定性をできる限り保証し、かつ制御モードの極を複素平面上の中心 $(-\alpha, 0)$, 半径 β の円領域の内部に配置する問題を、ここではロバスト極配置問題と呼ぶことにする。

指定された円領域に閉ループ極を配置する問題は、文献(3)～(5)を参照して、制御ゲインに対する以下のような不等式拘束条件として定式化することができる。まず、以下の条件を満たすパラメータマトリックス $X(n \times n)$ および $Y(m \times n)$ を導入する。

$$K C_c = Y X^{-1}, \quad (9)$$

$$X^T = X. \quad (10)$$

このとき、閉ループ系 $(A_c + B_c K C_c)$ の極が、中心 $(-\alpha_1, 0)$, 半径 β_1 の円領域に存在するための必要十分条件は次式で表される。

$$S = \begin{bmatrix} \beta_1 X & -(A_c + \alpha_1 I)X - B_c Y \\ -X^T(A_c + \alpha_1 I)^T - Y^T B_c^T & \beta_1 X \end{bmatrix} > 0 \quad (11)$$

$$X > 0 \quad (12)$$

ここで正方行列 P にたいする不等式 $P > 0$ は、任意のベクトル x について

$$x^T P x > 0 \quad (13)$$

が成立することを表す。特に対称行列 $P = P^T$ の場合には、 P の固有値 $\lambda(P)$ に対して

$$\min \{\lambda(P)\} > 0 \quad (14)$$

が成立する。したがって、式(11), (12)の条件は以下のように表すこともできる。

$$J = \min \{ \min (\lambda(S)) \min (\lambda(X)) \} > 0 \quad \cdots (15)$$

このとき、伝達関数 $T_{zw}(s)$ は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} T_{zw}(s) &= \begin{Bmatrix} A_c + B_c K C_c & B_c K \\ K C_c & K \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} A_c + B_c Y X^{-1} C_c & B_c Y X^{-1} \\ Y X^{-1} C_c & Y X^{-1} \end{Bmatrix} \quad \cdots (16) \end{aligned}$$

したがって、式(15)の拘束条件のもとで、 X, Y を設計パラメータとして、 $\|T_{zw}(s)\|_\infty$ を最小化する非線形最適化問題を解き、式(9)からゲイン K を求めることで、指定円領域へのロバスト極配置問題に対する解を得ることができる。

この方法を用いて、制御モードのすべての極を指定円領域内に配置し、剰余モードによるプラントの変動に対するロバスト安定性を最大化する定数ゲインコントローラを設計することができる。ただし、得られた解がロバスト安定性条件を満たすとは限らないので、適切な指定円領域の中心と半径を、試行錯誤によって設定しなければならない。また、剰余モードを含む閉ループ系の安定性が保証されたとしても、主要な剰余モードの減衰が低下し、そのため振動的な過渡応答が誘起される恐れもある。そこで本論文では、双一次変換を用いて、主要な剰余モードの減衰低下を防止するのに有効な方法を次に提案する。

3. 双一次変換を利用した極配置法

双一次変換は

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} \quad \cdots (17)$$

で表される変換で複素平面上の左半面にある任意の点 w を原点中心の単位円内部に移す⁽⁴⁾(図3)。

逆変換は

$$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad \cdots (18)$$

で表される。ここで、任意の正方行列 A の固有値が中心 $(-\alpha, 0)$ 、半径 β の円の内部にあるとする。

$$A' = (A + \alpha I) / \beta \quad \cdots (19)$$

とすると A' の固有値は原点中心の単位円内部にある。さらに A' を逆双一次変換すると

$$A'' = \frac{2}{T} (A' - I) (A' + I)^{-1} \quad \cdots (20)$$

となり、 A'' の固有値は左半平面内に存在する。ここで、 A から A'' までの一連の変換を

$$A'' = \text{Bilin}^{-1}(A, \alpha, \beta) \quad \cdots (21)$$

で表すことにする(図4)。

Fig. 3 Bilinear transformation

Fig. 4 Transformation $\text{Bilin}^{-1}(A, \alpha, \beta)$

コントローラを

$$K(s) = C_K(sI - A_K)B_K + D_K \quad \cdots (22)$$

とする。ただし、 A_K, B_K, C_K, D_K はそれぞれ $n \times n$, $n \times p$, $m \times n$, $m \times p$ である。このとき

$$\|T_{zw}(s)\|_\infty = [D_K C_c \ C_K] (sI - \bar{A}_1) \begin{bmatrix} B_c D_K \\ B_K \end{bmatrix} + D_K \quad \cdots (23)$$

となる。ただし

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} A_c + B_c D_K C_c & B_c C_K \\ B_K C_c & A_K \end{bmatrix} \quad \cdots (24)$$

とする。制御モードの極が円1(中心 $(-\alpha_1, 0)$ 、半径 β_1 とする)の円内部にあるための制約条件は

$$P_1 = P_1^T > 0 \quad \cdots (25)$$

をみたす $P_1(2n \times 2n)$ が存在することである。ただし、

$$A_1'' = \text{Bilin}^{-1}(\bar{A}_1, \alpha_1, \beta_1) \quad \cdots (26)$$

$$(A_1'')^T P_1 + P_1 A_1'' = -Q_1 \quad \cdots (27)$$

(Q_1 は任意の正定対称行列)

である。また、主要な剰余モードを含む閉ループ系の極が円2[中心 $(-\alpha_2, 0)$ 、半径 β_2 とする]の内部にあるための制約条件は

$$P_2 = P_2^T > 0 \quad \cdots (28)$$

をみたす $P_2((2n + nr) \times (2n + nr))$ が存在することである。ただし、

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_c \\ B_r \end{bmatrix} D_K [C_c \ C_r] & \begin{bmatrix} B_c \\ B_r \end{bmatrix} C_K \\ B_K C_c & A_K \end{bmatrix} \quad \cdots (29)$$

$$A_2'' = \text{Bilin}^{-1}(\bar{A}_2, \alpha_2, \beta_2) \quad \cdots (30)$$

$$(A_2'')^T P_2 + P_2 A_2'' = -Q_2 \quad \cdots (31)$$

(Q_2 は任意の正定対称行列)

よって

$$J = \min \{ \min (\lambda(P_1)) \min (\lambda(P_2)) \} \quad \cdots \cdots (32)$$

とすると次の非線形計画問題となる。

$$\left[\begin{array}{ll} \text{最小化} & \|T_{zw}(s)\|_{\infty} \quad \cdots \cdots \cdots (33) \\ \text{制約条件} & J > 0 \quad \cdots \cdots \cdots (34) \end{array} \right.$$

この非線形計画問題は直接 A_K, B_K, C_K, D_K をパラメータとしてもよいが、前述したようなパラメータ化を用いることもできる。また定数ゲイン D_K のみのコントローラの場合やモードフィルタなどのオブザーバを用いた状態推定を行う場合にも同様の計算ができる。

一般に制御モードの極をより左に配置すると、剰余モードの極は右側(不安定側)に移動する場合が多く、剰余モードの不安定化によってかえって振動特性が劣化することになる。したがって、有効な振動制御系を設計するためには、実際にはこの二つの条件のトレードオフを考慮しなければならない。もし条件を満たすコントローラが見つければ主要な剰余モードの極は円2の内部にあり、原点から円2へ引いた接線より左側にあることから剰余モードに対して設定した減衰が保証される。コントローラが見つからなければ、円1を少し右側に指定するか、半径を小さくして最適化を行う。これをコントローラが見つかるまで繰り返す。円1は制御モードに与える減衰の大きさ、円2は主要な剰余モードの最低限の減衰の大きさを表す。以上の手順を繰り返すことにより最もよい振動特性となる円1、円2およびコントローラを決定する。

制御モードの極の制約条件はノミナル(剰余モードが存在しない)モデルに対する条件であり、剰余モードが存在する実システムでは極の位置は移動する。円領域を指定しても配置した極がその内部に留まる保証はないが、制御モードに与える減衰のおおよその指標として考えることができる。

4. 柔軟構造物の振動制御

構造物の運動方程式が次のように与えられたとする。

$$\bar{M}\ddot{x}(t) + \bar{C}\dot{x}(t) + \bar{K}x(t) = \bar{D}u(t) \quad x(t) \in n \quad \cdots \cdots (35)$$

ただし、 C は比例減衰であるとする。モード行列 Φ を用いて座標変換、

$$x(t) = \Phi \eta(t) \quad \cdots \cdots (36)$$

を施すと、

$$\bar{M}\ddot{\eta}(t) + \bar{C}\dot{\eta}(t) + \bar{K}\eta(t) = \bar{D}u(t) \quad \cdots \cdots (37)$$

となる。ここで、

$$\bar{M} = \Phi^T \bar{M} \Phi = I \quad \cdots \cdots (38)$$

$$\bar{C} = \Phi^T \bar{C} \Phi = \text{diag}\{2\zeta_1\omega_1, \dots, 2\zeta_n\omega_n\} \quad \cdots \cdots (39)$$

$$\bar{K} = \Phi^T \bar{K} \Phi = \text{diag}\{\omega_1^2, \dots, \omega_n^2\} \quad \cdots \cdots (40)$$

$$\bar{D} = \Phi^T \bar{D} \quad \cdots \cdots (41)$$

Φ は $\bar{M}^{-1}\bar{K}$ の固有ベクトル行列。

次に、

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_c \\ \eta_r \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots (42)$$

と分割し、 η_c を制御するモード、 η_r を切り捨てるモード(剰余モード)とすると、式(37)は

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_c & 0 \\ 0 & \bar{M}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_c \\ \ddot{\eta}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}_c & 0 \\ 0 & \bar{C}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_c \\ \dot{\eta}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{K}_c & 0 \\ 0 & \bar{K}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_c \\ \eta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_c \\ \bar{D}_r \end{bmatrix} \cdot u \quad \cdots \cdots (43)$$

となる。

$$x_c = \begin{bmatrix} \eta_c \\ \dot{\eta}_c \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots (44)$$

と置くと制御モードの状態方程式は

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c u \quad \cdots \cdots (45)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\bar{M}_c^{-1}\bar{K}_c & -\bar{M}_c^{-1}\bar{C}_c \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots (46)$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{M}_c^{-1}\bar{D}_c \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots (47)$$

となる。剰余モードについても同様に求められる。

5. 数 値 計 算 例

提案する設計法の有効性を検証することを目的として、簡単な振動制御系についての数値シミュレーションを行った。図5に示すような3自由度のばね・質量系を定数ゲインのコントローラによって制御する問題について検討する。

質量を1、ばね定数を20とする。運動方程式は次のようになる。

$$\bar{M}\ddot{x} + \bar{C}\dot{x} + \bar{K}x = \bar{D}u \quad \cdots \cdots (48)$$

ただし

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \quad u = [u_1 \ u_2]^T$$

Fig. 5 Dynamics model for numerical simulation

Table 1 Eigenvalues for open-loop system

No.	Eigenvalues	Damping	Freq. (rad/sec)
(controlled modes)			
1	$-0.5990 \pm 1.8980i$	0.3010	1.9903
2	$-1.2775 \pm 5.4284i$	0.2291	5.5767
(residual modes)			
3	$-2.1235 \pm 7.7737i$	0.2635	8.0585

Fig. 6 Poles of open-loop system

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 40 & -20 & 0 \\ -20 & 40 & -20 \\ 0 & -20 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \bar{M} + 0.05\bar{K} \quad (\text{比例減衰})$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。

1~2次を制御モード、3次モードを剰余モードとして扱う。非制御システムの固有値(極)を表1および図6に示す。ここでは制御モードとセンサによる出力の数が等しく、モードフィルタによる状態推定により、ノミナルモデルでは任意の位置に極配置ができるものとする。また、本計算例の場合には

$$\|T_{zw}(s)\|_{\infty} < 7.8$$

であれば剰余モードに対する安定性は保証される。

制御モードの極を中心(-50, 0)、半径48.5の円領域内部に配置し、かつ剰余モードを含めた実システムの極が中心(-50, 0)半径49.7の円領域内部に留まるように制約条件を定めた(図6)。その際、剰余モードに対する制約円領域は、剰余モードに対する許容減衰

Table 2 Closed-loop eigenvalues (present method)

No.	Eigenvalues	Damping	Freq. (rad/sec)
(controlled modes)			
1	$-1.9842 \pm 0.2160i$	0.9941	1.9960
2	$-2.3304 \pm 4.8311i$	0.4345	5.3639
(residual modes)			
3	$-1.3214 \pm 8.2177i$	0.1588	8.3233

Table 3 Closed-loop eigenvalues (IMSC)

No.	Eigenvalues	Damping	Freq. (rad/sec)
(controlled modes)			
1	$-2.4680 \pm 1.8346i$	0.8026	3.0752
2	$-2.9629 \pm 5.1402i$	0.4994	5.9330
(residual modes)			
3	$-0.5541 \pm 8.6016i$	0.0643	8.6194

Fig. 7 Robust pole assignment via present method

Fig. 8 Ordinal pole assignment (IMSC)

係数を満たすように定め、制御モードに対する制約円領域は、安定条件を満たすゲインが求まるまで次第に円の半径を大きくした。また、比較のため IMSC (Independent Modal Space Control) 法⁽⁶⁾による極配置も行った。

Fig. 9 Impulse response of the closed-loop system

剰余モード(3次モード)を含む閉ループ系の極を表2, 3および図7, 8に示す。IMSC法では剰余モードの極が不安定側に大きく動いてしまったのに対し、双一次変換を応用した極配置では指定した円領域内部に留まっており、剰余モードの不安定化が抑制されていることがわかる。また $\|T_{zw}(s)\|_{\infty}$ の値はIMSC法では19.4であるのに対し、双一次変換を応用した極配置では4.24となり安定性も保証されている。

図9は図5のアクチュエータ(u_2)にインパルス入力を与えた時の変位応答(x_1)を示している。双一次

変換を利用した極配置ではIMSC法に比べ剰余モードの振動が抑制されていることがわかる。

6. 結 論

双一次変換を応用し、主要な剰余モードの減衰が低下しないような出力フィードバックコントローラの設計法を示した。また、提案する制御則の有効性を数値計算により確認した。

文 献

- (1) 大久保博志・小松信雄・錢谷享, ロバスト極配置法による適応宇宙構造物の制御系設計, 機講論, **96-1**(IV), (1996), 637-638.
- (2) 細江繁幸・荒木光彦, 制御系設計, (1995), 48, 朝倉書店.
- (3) 増淵泉・小原敦美・須田信英, LMIを満たすコントローラの統一的構成法, 計測自動制御学会論文集, **31-10** (1995), 1586-1594.
- (4) Furuta, K. and Kim, S. B., Pole Assignment in a Specified Disk, *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC32-5** (1987), 423-427.
- (5) Saeki, M., H Infinity Control with Pole Assignment in a Specified Disk, *Int. J. Control*, **56-3** (1992), 725-731.
- (6) Meirovitch, L., *Dynamics and Control of Structures*, (1990), 366-368, John Wiley & Sons, New York.