部分構造合成法を用いた回転軸系の非線形振動解析に関する研究*

(摂動法による解析)

岩 壺 卓 三^{*1}, 新 保 賢 一^{*2}
河 村 庄 造^{*1}, 文 炳 暎^{*2}

Nonlinear Vibration Analysis of Rotor System Using Component Mode Synthesis Method (Analysis using The Perturbation Method)

Takuzo IWATSUBO^{*3}, Kenichi SHIMBO,
Shozo KAWAMURA and Byungyoung MOON

^{*3} Kobe University, Dept. of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering,
Rokkodai 1-1, Nada-ku, Kobe, 657-8501 Japan

In this paper, an effective method for the nonlinear vibration analysis of rotor system is proposed by using the Component Mode Synthesis method and the method of multiple scales. In that method, the system is divided into some components and a set of perturbed equation for every component is derived. The equation of motion for the whole system, then, is obtained by using the Component Mode Synthesis method. The dynamic analysis of rotor system is carried out by using the perturbation method. The distinguished feature of the proposed method is that the nonlinear restoring force term is represented by using modal coordinates in the convenient form. The order of the modal equation of motion and calculation time can, therefore, be reduced. In the numerical example, it is shown that the analysis method proposed in this paper is effective for the nonlinear vibration analysis of rotor system.

Key Words: Nonlinear Vibration, Substructure Synthesis Method, Modal Analysis, Perturbation Method, Forced Vibration, Multi-Degree-of-Freedom System

1 緒言

回転機械の振動は厳密には非線形振動であり、軸受の非線形特性を扱った研究は多いが、多くの場合線形振動に近似して解析が行われている。しかし現在運転されている回転機械でも、焼きばめによって作られたロータや、組立ロータのように運転中に遠心力によって非線形特性が現れることがある。また、近年ロータの軽量化の為に高分子材料を用いたロータなども使われるようになり、ロータ自身の非線形特性を考慮することも重要となってきた。

一方、大型で複雑な機械構造物を一体で解析すると、特性行列の自由度が非常に大きくなるため有限要素法を用いて解析することが困難になる。そのため部分構造合成法⁽¹⁾と総称される振動解析方法が研究されてきた。部分構造合成法は固有振動モードを結合するという考え方をを用いて解析を行うので、各分系の運動方程式が非線形特性を有すると適用できない。

また、非線形振動解析の手法に摂動法の一つである多重尺度法⁽²⁾がある。非線形運動方程式に多重尺度法を用いれば、非線形運動方程式をいくつかの線形の運動方程式で表現することができる。その為、運動方程式が非線形であっても部分構造合成法を適用できる。1自由度非線形振動系に多重尺度法を用いて解析した研究は多くあり、多自由度系への適用は文献(3)、(4)にみられる。しかし、非線形振動解析に多重尺度法と部分構造合成法を適用した研究はほとんど見あたらない。

一方著者の一部らは、ロータの非線形特性を考慮した場合の解析を部分構造合成法を用いて容易に行う手法を提案している⁽⁵⁾が、そこではロータの非線形復元力項をモード座標で近似して表現している。その近似法はモードの連成項を無視するものであり、解析精度を向上させるためには、非線形復元力項の表現に工夫が必要であると考えられる。

そこで本研究では、非線形特性を有する回転軸系の非線形振動解析を、部分構造合成法の一つである不拘束モード合成法と摂動法(多重尺度法)を組み合

* 原稿受付 1998年12月14日。

^{*1} 正員, 神戸大学工学部 (〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1)。

^{*2} 学生員, 神戸大学大学院。

E-mail: iwatsubo@mech.kobe-u.ac.jp

わせて行う手法を提案する。この時、非線形振動系の解析において興味のある主共振点付近の解析を行うこととし、その解析条件の下では非線形復元力項をモード座標変換できることを示す。それによって計算時間を大幅に短縮することができる。そして提案する解析手法を用いた数値シミュレーション結果と非線形運動方程式を直接積分した結果を比較し、本手法の有効性を検証する。

2 部分構造合成法による運動方程式の構築

本研究で解析の対象とする一般的なロータ系のモデルを図 1 に示す。そのモデルはロータ(以下分系 1)、軸受、軸受台(以下分系 2)の 3 つの部分構造から構成される。またロータに作用する外力はつりあい力のように回転数 Ω に同期した成分のみを扱うものとし $\varepsilon\{F\}\cos\Omega t$ で与えられるものとする。さらに軸受台に作用する外力は一般的に $\{F_p\}$ で与えられるものとする。

2.1 仮定と解析の考え方 定式化を行うにあたり、以下の仮定をおく。

1. ロータの非線形特性のみを考慮することとし、それは応力 (σ) とひずみ (ε_r) の非線形関係に帰因するとする。即ち、

$$\sigma = E(\varepsilon_r + \gamma\varepsilon_r^3) \quad (1)$$

の関係をもつとする。

2. 式(1)の非線形応力ひずみ関係に基づいて有限要素法で線形、非線形復元力項を構築すると、非線形復元力項は変位の 3 乗までの項を含む複雑なものとなるが、本研究では解析手法の第 1 段階として復元力項 $[R]$ を次式のように近似する。

$$[R] = [K_1]\{u_i\} + \varepsilon[K_N]\{u_i^3\} \quad (2)$$

ここで、 $[K_1]$ $[K_N]$ は線形及び非線形剛性マトリックス、 $\{u_i\}$ は変位ベクトルである。

次に解析の手順は以下の通りである。

- ロータ系を分系に分ける。
- 各分系に対し、線形振動モードを用いてモード座標に変換する。
- 各分系のモード方程式のモード変位のみを摂動展開し、摂動方程式とする。

Fig. 1 Model for analysis

- 結合条件を考慮して、各分系のモード座標で表された摂動方程式を、部分構造合成法を用いて合成し、全系の運動方程式を構築する。
- 合成後の全系の線形振動モードを用いて、構築した全系の運動方程式を非連成化する。

2.2 分系 1(非線形特性を有するロータ)の定式化

式(2)の仮定より分系 1 の運動方程式は次式のようなる。

$$[M_1]\{\ddot{u}_i\} + [K_1]\{u_i\} + \varepsilon[K_N]\{u_i^3\} = \varepsilon\{F\}\cos\Omega t \quad (3)$$

ここで ε は微小変動量であり、式(1)の γ から得られる。式(3)をモード座標変換すると次式のようなる。

$$[m_i]\{\ddot{\xi}_i\} + [k_i]\{\xi_i\} + \varepsilon[\phi]^T[K_N]\{u_i^3\} = \varepsilon\{f\}\cos\Omega t \quad (4)$$

ここで $[\phi]$ は $[M_1]$ $[K_1]$ から得られるモード行列である。しかし式(4)において非線形項はモード座標に変換できていない。非線形項をモード座標で表すことができれば、モードの採用数を減らすほど計算時間を短縮することができるので、そのための方法を以下に示す。

式(4)の非線形項の変位を具体的に表すと、

$$\{u_i^3\} = \begin{Bmatrix} u_{i1}^3 \\ u_{i2}^3 \\ \vdots \\ u_{in}^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\phi_{11}\xi_{i1} + \phi_{12}\xi_{i2} + \cdots + \phi_{1n}\xi_{in})^3 \\ (\phi_{21}\xi_{i1} + \phi_{22}\xi_{i2} + \cdots + \phi_{2n}\xi_{in})^3 \\ \vdots \\ (\phi_{n1}\xi_{i1} + \phi_{n2}\xi_{i2} + \cdots + \phi_{nn}\xi_{in})^3 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

となる。式中で $\xi_{i1} \sim \xi_{in}$ が連成しており、 $\xi_{i1} \sim \xi_{in}$ のそれぞれの大きさの比率が分かれば、式(5)を扱いやすく変形できる。そこで、 $\xi_{i1} \sim \xi_{in}$ の大きさについて考える。

まず、事前に構造物全体を線形系として部分構造合成法を適用し、全系の $[M]$ $[K]$ から得られる全系の固有モード $[\Phi_z]$ を得ておく⁽⁶⁾。 $[\Phi_z]$ により、次式のように座標変換できる。

$$\{\xi\} = [\Phi_z]\{\eta\} \quad \text{ただし} \quad \{\xi\} = \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix}^T \quad (6)$$

そのため、全系の運動方程式は $\{\eta\}$ に関する式となる。

また、多重尺度法を適用する際に加振周波数 Ω を

$$\Omega = \omega_1 + \varepsilon\sigma \quad (7)$$

とおく。そして調和外力 $\cos\Omega t$ を考えると外力部は次式のようなる。

$$\exp i(\omega_1 + \varepsilon\sigma)t + cc = \exp i\omega_1 T_0 \exp i\sigma T_1 + cc \quad (8)$$

ここで $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$ また cc は前項の共役複素である。外力部の加振周波数は $\omega_1 + \varepsilon\sigma$ であるから、外力部が永年項に影響するモードは ω_1 を共振周波数とする一次モード η_1 のみである。即ち永年項を消す条件式には η_1 についての式にのみ $\exp i\sigma T_1$ が存在し、 $\eta_2 \sim \eta_{2n}$ の条件式には外力部は含まれない。その為、 η_1 については σ の関数となり、 $\eta_2 \sim \eta_{2n}$ については 0 となる。つまり、多重尺度法を用いて加振周波数を $\Omega = \omega_1 + \varepsilon\sigma$ と仮定する限りは η_1 のみ値を持ち $\eta_2 \sim \eta_{2n}$ については 0 となる。故に式(6)において $\eta_2 \sim \eta_{2n} = 0$ とすると、 $\xi_{i1} \sim \xi_{in}$ について次の関係が保たれる。

$$\xi_{i1} = \Phi_{z11}\eta_1, \xi_{i2} = \Phi_{z21}\eta_1, \cdots, \xi_{in} = \Phi_{zn1}\eta_1 \quad (9)$$

これより、

$$\xi_{12} = \frac{\Phi_{Z21}}{\Phi_{Z11}} \xi_{11}, \xi_{13} = \frac{\Phi_{Z31}}{\Phi_{Z11}} \xi_{11}, \dots, \xi_{1n} = \frac{\Phi_{Zn1}}{\Phi_{Z11}} \xi_{11} \quad (10)$$

となり、 ξ の大きさの比率は、事前に求めた $[\Phi_Z]$ 、もしくはどの周波数で加振するかという多重尺度法の仮定に依存している。

次に式(10)を用いて物理座標変位 u_i の 3 乗をモード座標の 3 乗成分に変換する。 u_{11}^3 について具体的に表すと次式ようになる。

$$\begin{aligned} u_{11}^3 = & \phi_{11}^3 \xi_{11}^3 + \phi_{12}^3 \xi_{12}^3 + \dots + \phi_{1n}^3 \xi_{1n}^3 \\ & + 3\phi_{11}^2 \left(\phi_{12} \frac{\Phi_{Z21}}{\Phi_{Z11}} + \phi_{13} \frac{\Phi_{Z31}}{\Phi_{Z11}} + \dots + \phi_{1n} \frac{\Phi_{Zn1}}{\Phi_{Z11}} \right) \xi_{11}^2 \\ & + 3\phi_{12}^2 \left(\phi_{11} \frac{\Phi_{Z11}}{\Phi_{Z21}} + \phi_{13} \frac{\Phi_{Z31}}{\Phi_{Z21}} + \dots + \phi_{1n} \frac{\Phi_{Zn1}}{\Phi_{Z21}} \right) \xi_{12}^2 \\ & \vdots \\ & + 3\phi_{1n}^2 \left(\phi_{11} \frac{\Phi_{Z11}}{\Phi_{Zn1}} + \phi_{12} \frac{\Phi_{Z21}}{\Phi_{Zn1}} + \dots + \phi_{1n-1} \frac{\Phi_{Zn-11}}{\Phi_{Zn1}} \right) \xi_{1n}^2 \\ & + \left(6\phi_{11}\phi_{12}\phi_{13} \frac{\Phi_{Z11}\Phi_{Z21}\Phi_{Z31}}{\Phi_{Z11}^3} + \dots \right. \\ & \quad \left. \dots + 6\phi_{1n-2}\phi_{1n-2}\phi_{1n} \frac{\Phi_{Zn-21}\Phi_{Zn-11}\Phi_{Zn1}}{\Phi_{Z11}^3} \right) \xi_{11}^2 \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)より、次式が成り立つ。

$$\{u_i^3\} = [\Phi_N] \{\xi^3\} \quad (12)$$

ここで、 $[\Phi_N]$ の各成分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Phi_{N11} = & \phi_{11}^3 + 3\phi_{11}^2 \left(\phi_{12} \frac{\Phi_{Z21}}{\Phi_{Z11}} + \phi_{13} \frac{\Phi_{Z31}}{\Phi_{Z11}} + \dots + \phi_{1n} \frac{\Phi_{Zn1}}{\Phi_{Z11}} \right) \\ & + 6\phi_{11}\phi_{12}\phi_{13} \frac{\Phi_{Z11}\Phi_{Z21}\Phi_{Z31}}{\Phi_{Z11}^3} + \dots \\ & \quad \dots + 6\phi_{1n-2}\phi_{1n-2}\phi_{1n} \frac{\Phi_{Zn-21}\Phi_{Zn-11}\Phi_{Zn1}}{\Phi_{Z11}^3} \\ \Phi_{Nij} = & \phi_{ij}^3 + 3\phi_{ij}^2 \left(\phi_{11} \frac{\Phi_{Z11}}{\Phi_{Zj1}} + \phi_{12} \frac{\Phi_{Z21}}{\Phi_{Zj1}} + \dots + \phi_{1n} \frac{\Phi_{Zn1}}{\Phi_{Zj1}} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

ただし、 $i=1 \sim n$ 、 $j=2 \sim n$ である。故に、非線形剛性マトリックスについて

$$[K_N] \{u^3\} = [\phi]^T [K_N] [\Phi_N] \{\xi^3\} = [k_N] \{\xi^3\} \quad (14)$$

と表せる。式(14)はモード座標上の式であるから、モードの採用数を減らすほど式(13)の項数が減り、効率のよい解析が行える。また、式(10)を用いればモード座標で表された非線形剛性マトリックスを対角化することも容易である。

式(14)によりモード座標で表されたロータの運動方程式は次式ようになる。

$$[\Lambda m_1] \{\ddot{\xi}_1\} + [\Lambda k_1] \{\xi_1\} + \varepsilon [k_N] \{\xi_1^3\} = \varepsilon \{f\} \cos \Omega t \quad (15)$$

モード変位 $\{\xi_1\}$ について次のように摂動展開する。

$$\{\xi_1\} = \{\xi_1^{(0)}\} + \varepsilon \{\xi_1^{(1)}\} + \varepsilon^2 \{\xi_1^{(2)}\} + \dots \quad (16)$$

式(16)を分系 1 の運動方程式に代入し微少変動量 ε について整理する。本研究では微少変動量に関する 2 次の摂動成分までの解析を行う。また合成したときの内力も考慮すれば、各摂動成分の運動方程式は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} [\Lambda m_1] \{\ddot{\xi}_1^{(0)}\} + [\Lambda k_1] \{\xi_1^{(0)}\} &= [\phi_{Ac1}] \{f_1^{(0)}\} \\ [\Lambda m_1] \{\ddot{\xi}_1^{(1)}\} + [\Lambda k_1] \{\xi_1^{(1)}\} &= -[k_N] \{\xi_1^{(0)3}\} + \{f\} \cos \Omega t \\ &\quad + [\phi_{Ac1}] \{f_1^{(1)}\} \\ [\Lambda m_1] \{\ddot{\xi}_1^{(2)}\} + [\Lambda k_1] \{\xi_1^{(2)}\} &= -3[k_N] \{\xi_1^{(0)2} \cdot \xi_1^{(1)}\} \\ &\quad + [\phi_{Ac1}] \{f_1^{(2)}\} \end{aligned} \quad (17)$$

ここで $\{f_i\}$ は内力、 $[\phi_{Ac}]$ は不拘束モード $[\phi_A]$ のうち結合領域の自由度だけを取り出したものを表す。

2.3 分系 2 (軸受台) の定式化 2 次の摂動成分まで解析すると分系 1 の運動方程式は 3 つの式になる。本研究では分系 1 にのみ非線形性があり、軸受、軸受台は線形であるとしている。その為、分系 1 の 2 次の摂動成分までの三つの運動方程式と、軸受及び分系 2 の 0 次の摂動成分である一つの運動方程式を部分構造合成法により合成しようとする、分系 1 の 1 次及び 2 次の摂動成分に対応する分系 2 の自由度が不足しているので合成できない。そこで線形である分系 2 についても摂動展開し、各分系に対する 2 次の摂動成分までの運動方程式を用いて合成し全系の運動方程式を導出する。

分系 2 は線形であるから運動方程式は次式のようになる。

$$[M_2] \{\ddot{u}_2\} + [K_2] \{u_2\} = \{F_p\} \quad (18)$$

式(18)をモード座標変換すると次式のようになる。

$$[\Lambda m_2] \{\ddot{\xi}_2\} + [\Lambda k_2] \{\xi_2\} = \{f_p\} \quad (19)$$

モード変位 $\{\xi_2\}$ について次のように摂動展開する。

$$\{\xi_2\} = \{\xi_2^{(0)}\} + \varepsilon \{\xi_2^{(1)}\} + \varepsilon^2 \{\xi_2^{(2)}\} + \dots \quad (20)$$

式(20)を分系 2 の運動方程式に代入し微少変動量 ε について整理する。2 次の摂動成分までを考えれば分系 2 についての各摂動成分の運動方程式は次式のようになる。

$$\begin{aligned} [\Lambda m_2] \{\ddot{\xi}_2^{(0)}\} + [\Lambda k_2] \{\xi_2^{(0)}\} &= -[\phi_{Ac2}] \{f_1^{(0)}\} + \{f_p\} \\ [\Lambda m_2] \{\ddot{\xi}_2^{(n)}\} + [\Lambda k_2] \{\xi_2^{(n)}\} &= -[\phi_{Ac2}] \{f_1^{(n)}\} \quad (n=1, 2) \end{aligned} \quad (21)$$

2.4 結合部 (軸受) の結合条件式 結合部も線形であるが分系 2 の場合と同様に摂動展開する。結合部の結合条件式は次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} K_b & -K_b \\ -K_b & K_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_i \\ f_i \end{Bmatrix} \quad (22)$$

分系 1、分系 2 のモード座標変位 $\{\xi\}$ について式(16)、式(20)のように摂動展開したことより、物理座標結合部変位 $\{u_c\}$ について次式のように摂動展開できる。

$$\begin{aligned} \{u_{c1}\} &= [\phi_{Ac1}] \{\xi_1\} = [\phi_{Ac1}] \{\{\xi_1^{(0)}\} + \varepsilon \{\xi_1^{(1)}\} + \varepsilon^2 \{\xi_1^{(2)}\} + \dots\} \\ &= [\phi_{Ac1}] \{\xi_1^{(0)}\} + \varepsilon [\phi_{Ac1}] \{\xi_1^{(1)}\} + \varepsilon^2 [\phi_{Ac1}] \{\xi_1^{(2)}\} + \dots \\ &= \{u_{c1}^{(0)}\} + \varepsilon \{u_{c1}^{(1)}\} + \varepsilon^2 \{u_{c1}^{(2)}\} + \dots \\ \{u_{c2}\} &= [\phi_{Ac2}] \{\xi_2\} = [\phi_{Ac2}] \{\{\xi_2^{(0)}\} + \varepsilon \{\xi_2^{(1)}\} + \varepsilon^2 \{\xi_2^{(2)}\} + \dots\} \\ &= [\phi_{Ac2}] \{\xi_2^{(0)}\} + \varepsilon [\phi_{Ac2}] \{\xi_2^{(1)}\} + \varepsilon^2 [\phi_{Ac2}] \{\xi_2^{(2)}\} + \dots \\ &= \{u_{c2}^{(0)}\} + \varepsilon \{u_{c2}^{(1)}\} + \varepsilon^2 \{u_{c2}^{(2)}\} + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

式(23)を結合条件式に代入し微少変動量 ε について整理する。2 次の振動成分までを考えれば結合部についての各振動成分の結合条件式は次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} K_b & -K_b \\ -K_b & K_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{c1}^{(n)} \\ u_{c2}^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_1^{(n)} \\ f_1^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (n=0 \sim 2) \quad (24)$$

2.5 全系の運動方程式 以上で求めた各分系の各振動次数の運動方程式をまとめて部分構造合成法により合成する。

式(17), (21), (24)をまとめてマトリックス表示をする。また減衰は合成後に全系の減衰として運動方程式に加えると次式のようになる。

$$[M_z]\{\ddot{\xi}_z\} + [C_z]\{\dot{\xi}_z\} + [K_z]\{\xi_z\} = \{f_z\} \quad (25)$$

減衰は比例減衰を用いるものとする。ここで $\{\xi_z\}$ は

$$\{\xi_z\} = [\xi_1^{(n)} \ x_{c1}^{(n)} \ x_{c2}^{(n)} \ \xi_2^{(n)}]^T \quad (n=0 \sim 2) \quad (26)$$

である。式(26)の $\{\xi_z\}$ を次の $\{\xi\}$ へ座標変換する。

$$\begin{aligned} \{\xi_z\} &= \begin{Bmatrix} \xi_1^{(n)} \\ x_{c1}^{(n)} \\ x_{c2}^{(n)} \\ \xi_2^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & & \\ & \phi_{Ac1} & \\ & & \phi_{Ac2} \\ & & & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1^{(n)} \\ \xi_2^{(n)} \end{Bmatrix} \\ &= [T_p]\{\xi\} \quad (n=0 \sim 2) \end{aligned} \quad (27)$$

式(27)を式(25)に代入し前から $[T_p]^T$ をかけると、次式のようになる。

$$[M']\{\ddot{\xi}\} + [C']\{\dot{\xi}\} + [K']\{\xi\} = \{f\} \quad (28)$$

式(28)は 0 次, 1 次, 2 次の振動成分が互いに独立しているので, 結局, 部分構造合成法を用いて合成した全系の運動方程式は 0 次, 1 次, 2 次の振動成分について次式のように表される。

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{\xi}^{(0)}\} + [K]\{\xi^{(0)}\} &= \{0\} \\ [M]\{\ddot{\xi}^{(1)}\} + [K]\{\xi^{(1)}\} &= -2\mu\{\xi^{(0)}\} \\ &\quad - \begin{Bmatrix} [k_N]\{\xi_1^{(0)3}\} - \{f\}\cos\Omega t \\ 0 \end{Bmatrix} \\ [M]\{\ddot{\xi}^{(2)}\} + [K]\{\xi^{(2)}\} &= -2\mu\{\xi^{(1)}\} \\ &\quad - \begin{Bmatrix} 3[k_N]\{\xi_1^{(0)2} \cdot \xi_1^{(1)}\} \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

ここで,

$$\begin{aligned} [M] &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mu = \frac{1}{2\beta}(\alpha[M] + \beta[K]) \\ [K] &= \begin{bmatrix} k_{A1} + \phi_{Ac1}^T K_b \phi_{Ac1} & -\phi_{Ac1}^T K_b \phi_{Ac2} \\ -\phi_{Ac2}^T K_b \phi_{Ac1} & k_{A2} + \phi_{Ac2}^T K_b \phi_{Ac2} \end{bmatrix} \\ \{\xi^{(n)}\} &= \{\xi_1^{(n)} \ \xi_2^{(n)}\}^T \quad (n=0 \sim 2) \end{aligned} \quad (30)$$

であり, α, β は比例減衰係数である。本研究では分系 2 には外力が加わらないものとした。

事前に線形系として部分構造合成法を適用し, 全系の $[M]$ $[K]$ から得られる全系の固有モード $[\Phi_z]$ を得ておいた。 $[\Phi_z]$ により, 次式のように座標変換できる。

$$\{\xi\} = [\Phi_z]\{\eta\} \quad (31)$$

式(31)を用いれば全系の質量, 剛性マトリックスを対角化できる。ここで, ξ^3 を η で表すことを考える。式(9)より次式が成り立つ。

$$\xi_{11}^3 = \Phi_{z11}^3 \eta_1^3, \xi_{12}^3 = \Phi_{z21}^3 \eta_1^3, \dots, \xi_{in}^3 = \Phi_{zni}^3 \eta_1^3 \quad (32)$$

式(29)において, 非線形復元力項は右辺の上半分のみ存在するので, $\{\eta\}$ に座標変換するために全系の固有モード $[\Phi_z]$ を次式のように分けて表現する。

$$[\Phi_z]^T = [\Phi_{zm} \ \Phi_{zu}] \quad (33)$$

式(32)と $\eta_2 \sim \eta_{2n} = 0$ であることから ξ^3 は, 式(33)より次式で表される。

$$\{\xi^3\} = [\Phi_{zm}^T]\{\eta^3\} = [\Phi_{zm}]\{\eta^3\} \quad (34)$$

故に全系の 0 次, 1 次, 2 次の振動成分の運動方程式は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \{\ddot{\eta}^{(0)}\} + [\omega_z^2]\{\eta^{(0)}\} &= 0 \\ \{\ddot{\eta}^{(1)}\} + [\omega_z^2]\{\eta^{(1)}\} &= -2[Q]\{\eta^{(0)}\} \\ &\quad + \{G\}\cos\Omega t - [P]\{\eta^{(0)3}\} \\ \{\ddot{\eta}^{(2)}\} + [\omega_z^2]\{\eta^{(2)}\} &= -2[Q]\{\eta^{(1)}\} \\ &\quad - 3[P]\{\eta^{(0)2} \cdot \eta^{(1)}\} \end{aligned} \quad (35)$$

ここで式(35)の左辺は連成していない。ただし,

$$\begin{aligned} [Q] &= [\Phi_z]\mu[\Phi_z]^T, \quad \{G\} = [\Phi_{zm}]\{f\} \\ [P] &= [\Phi_{zm}][k_N][\Phi_{zu}] \end{aligned} \quad (36)$$

である。

3 多重尺度法による応答解析

全系の振動方程式(35)に多重尺度法を適用し, 応答解析を行う。そのため, 次のようなタイムスケールを導入する。

$$\begin{aligned} T_n &= \varepsilon^n t, \\ \frac{d}{dt} &= \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \frac{dT_2}{dt} \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \\ &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{aligned} \quad (37)$$

式(37)を式(35)に代入し整理すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} D_0^2\{\eta^{(0)}\} + [\omega_z^2]\{\eta^{(0)}\} &= 0 \\ D_0^2\{\eta^{(1)}\} + [\omega_z^2]\{\eta^{(1)}\} &= -2D_0 D_1\{\eta^{(0)}\} \\ &\quad - 2[Q]D_0\{\eta^{(0)}\} - [P]\{\eta^{(0)3}\} \\ &\quad + [\phi_{zm}]\{f\}\cos\Omega T_0 \\ D_0^2\{\eta^{(2)}\} + [\omega_z^2]\{\eta^{(2)}\} &= -2D_0 D_1\{\eta^{(1)}\} \\ &\quad - (D_1^2 + 2D_0 D_2)\{\eta^{(0)}\} - 2[Q]D_1\{\eta^{(0)}\} \\ &\quad - 2[Q]D_0\{\eta^{(1)}\} - [P]\{\eta^{(0)2} \cdot \eta^{(1)}\} \end{aligned} \quad (38)$$

ここで, 加振周波数 Ω が 1 次固有振動数 ω_1 に近い場合を考える。Detuning parameter σ を用いて加振周波数を次のように記述する。

$$\Omega = \omega_1 + \varepsilon \sigma \quad (39)$$

式(38)の第 1 式の解は次式で表される。

$$\{\eta^{(0)}\} = \{A\}\exp(i\omega_0 T_0) + \{\bar{A}\}\exp(-i\omega_0 T_0) \quad (40)$$

式(39), (40)を式(38)の第 2 式に代入する。ここで 1 自由度成分についてのみ考えると次式のようになる。

$$D_0^2 \eta_1^{(1)} + \omega_1^2 \eta_1^{(1)} = \left\{ -2i\omega_1 (A_1' + Q_{11}A_1) - 3P_{11}A_1^2 \bar{A}_1 \right. \\ \left. + \frac{1}{2}G_1 \exp(i\sigma T_1) \right\} \exp(i\omega_1 T_0) \\ + \left(-2i \sum_{k=2}^n \omega_k Q_{1k} A_k - 3 \sum_{k=2}^n P_{1k} A_k^2 \bar{A}_k \right) \exp(i\omega_k T_0) \\ - \sum_{k=1}^n P_{1k} A_k^3 \exp(3i\omega_k T_0) + cc \quad (41)$$

ここで、 A を次のように選べば1自由度成分の式(41)より永年項を除くことができる。

$$-2i\omega_1 (D_1 A_1 + Q_{11}A_1) - 3P_{11}A_1^2 \bar{A}_1 \\ + \frac{1}{2}G_1 \exp(i\sigma T_1) + cc = 0 \quad (42)$$

1自由度成分と同様にして $m = 2 \sim 2n$ までの自由度成分についての永年項の消去条件は次式のようになる。

$$-2i\omega_m (D_1 A_m + Q_{mm}A_m) - 3P_{mm}A_m^2 \bar{A}_m + cc = 0 \quad (43)$$

ここで、 A を次のようにおく。

$$\{A\} = \frac{1}{2}\{a\} \exp(i\beta), \quad \{\bar{A}\} = \frac{1}{2}\{a\} \exp(-i\beta) \quad (44)$$

式(44)を式(42)に代入し、実部と虚部に分け、 $\gamma = \sigma T_1 - \beta_1$ とすると次式のようになる。

$$D_1 a_1 = a_1' = -Q_{11}a_1 + \frac{1}{2\omega_1}G_1 \sin \gamma \\ a_1 D_1 \beta_1 = a_1 \beta_1' = \frac{3}{8\omega_1}P_{11}a_1^3 - \frac{1}{2\omega_1}G_1 \cos \gamma \quad (45)$$

同様にして式(43)は次式のようになる。

$$a_m' = -Q_{mm}a_m \\ a_m \beta_m' = \frac{3}{8\omega_m}P_{mm}a_m^3 \quad (46)$$

定常状態では $a' = \gamma' = 0$ であるから式(46)より

$$a_m = 0, \quad (m = 2 \sim 2n) \quad (47)$$

であることがわかる。この結果は非線形復元力項をモード座標変換した際に $\eta_2 \sim \eta_{2n} = 0$ としたことに対応している。

式(45)をそれぞれ2乗して加え、式(47)を考慮すると次式が成り立つ。

$$(Q_{11}a_1)^2 + \left(\alpha_1 - \frac{3}{8\omega_1}P_{11}a_1^3 \right)^2 = \frac{1}{4\omega_1^2}G_1^2 \\ a_m = 0 \quad (m = 2 \sim 2n) \quad (48)$$

式(48)を解き物理座標に変換することにより1次近似までの周波数応答を求めることができる。

次に、摂動2次までの定式化について述べる。

式(38)の第2式において永年項を除去し、特解を求めると1自由度成分について次式のようになる。

$$\eta_1^{(1)} = \frac{1}{\omega_k^2 - \omega_1^2} \left(2i \sum_{k=2}^n \omega_k Q_{1k} A_k + 3 \sum_{k=2}^n P_{1k} A_k^2 \bar{A}_k \right) \exp(i\omega_k T_0) \\ + \frac{1}{9\omega_k^2 - \omega_1^2} \sum_{k=1}^n P_{1k} A_k^3 \exp(3i\omega_k T_0) + cc \quad (49)$$

同様にして $m = 2 \sim 2n$ までの自由度成分の特解は次式のようになる。

$$\eta_m^{(1)} = \frac{1}{\omega_k^2 - \omega_m^2} \left(2i \sum_{k=2}^n \omega_k Q_{mk} A_k + 3 \sum_{k=2}^n P_{mk} A_k^2 \bar{A}_k \right) \exp(i\omega_k T_0) \\ + \frac{1}{9\omega_k^2 - \omega_m^2} \sum_{k=1}^n P_{mk} A_k^3 \exp(3i\omega_k T_0) \\ + \frac{1}{2(\omega_m^2 - \omega_1^2)} G_m \exp(i\sigma T_1) \exp(i\omega_1 T_0) + cc \quad (k \neq m) \quad (50)$$

式(40)、式(50)を式(38)の第3式に代入すると、 $m = 2 \sim 2n$ までの自由度成分における永年項を消去する条件式は次式のようになる。

$$-2i\omega_m D_2 A_m + Q_{mm}^2 A_m + \frac{3}{\omega_m} i Q_{mm} P_{mm} A_m^2 \bar{A}_m \\ + \frac{9}{4\omega_m^2} P_{mm}^2 A_m^3 \bar{A}_m + cc = 0 \quad (51)$$

定常状態では

$$\frac{dA}{dt} = \varepsilon \frac{dA}{dT_1} + \varepsilon^2 \frac{dA}{dT_2} = 0 \quad (52)$$

であるから、式(43)、式(51)を式(52)に代入し式(44)を考慮し、実部と虚部に分けて整理すると次式のようになる。

$$a_m \dot{\beta}_m = \frac{3}{8\omega_m} \varepsilon P_{mm} a_m^3 - \frac{\varepsilon^2}{2\omega_m} Q_{mm}^2 a_m - \frac{9\varepsilon^2}{128\omega_m^2} P_{mm}^2 a_m^5 \\ \dot{a}_m = -\varepsilon Q_{mm} a_m + \frac{3\varepsilon^2}{8\omega_m^2} Q_{mm} P_{mm} a_m^3 \quad (53)$$

定常状態では $\dot{a} = \dot{\beta} = 0$ であるから、式(53)より

$$a_m = 0, \quad (m = 2 \sim 2n) \quad (54)$$

であることがわかる。この結果は摂動1次までの定式化のときと同様に、非線形復元力項をモード座標変換した際に $\eta_2 \sim \eta_{2n} = 0$ としたことに対応している。

式(54)より、1自由度成分の特解である式(49)は

$$\eta_1^{(1)} = \frac{1}{8\omega_1^2} P_{11} A_1^3 \exp(3i\omega_1 T_0) + cc \quad (55)$$

となる。式(40)、式(55)を式(38)の第3式に代入する。1自由度成分についてのみ考えると、1自由度成分について永年項の消去条件は次式のようになる。

$$-2i\omega_1 D_2 A_1 + Q_{11}^2 A_1 + \frac{3}{\omega_1} i P_{11} Q_{11} A_1^2 \bar{A}_1 + \frac{9}{4\omega_1^2} P_{11}^2 A_1^3 \bar{A}_1^2 \\ + \frac{G_1}{4\omega_1} \left(i Q_{11} - \frac{3}{\omega_1} P_{11} A_1 \bar{A}_1 - \sigma \right) \exp(i\sigma T_1) \\ + \frac{3}{8\omega_1^2} P_{11} G_1 A_1^2 \exp(-i\sigma T_1) + cc = 0 \quad (56)$$

ここで、 $A_1 = \frac{1}{2}a_1 \exp(i\beta_1)$ を式(56)に代入し、実部と虚部に分けて整理すると次式のようになる。

$$\omega_1 a_1 D_2 \beta_1 + \frac{1}{2} a_1 Q_{11}^2 + \frac{9}{128\omega_1^2} P_{11}^2 a_1^5 \\ + \frac{G_1}{4\omega_1} \left(-\sigma - \frac{3}{8\omega_1} P_{11} a_1^2 \right) \cos \gamma - \frac{G_1}{4\omega_1} Q_{11} \sin \gamma = 0 \\ \omega_1 D_2 a_1 - \frac{3}{8\omega_1} P_{11} Q_{11} a_1^3 \\ + \frac{G_1}{4\omega_1} \left(\sigma + \frac{9}{8\omega_1} P_{11} a_1^2 \right) \sin \gamma - \frac{G_1}{4\omega_1} Q_{11} \cos \gamma = 0 \quad (57)$$

また式(42)に $A_i = \frac{1}{2}a_i \exp(i\beta_i)$ を代入し、実部と虚部に
分けて整理すると次式ようになる。

$$\begin{aligned} D_1 a_1 &= -Q_{11} a_1 + \frac{1}{2\omega_1} G_1 \sin \gamma \\ a_1 D_1 \beta_1 &= \frac{3}{8\omega_1} P_{11} a_1^3 - \frac{1}{2\omega_1} G_1 \cos \gamma \end{aligned} \quad (58)$$

ここで、定常状態では、 $\frac{dA}{dt} = \varepsilon D_1 A + \varepsilon^2 D_2 A = 0$ より

$$\begin{aligned} D_1 A &= -\varepsilon D_2 A, & D_1 \gamma &= -\varepsilon D_2 \gamma, \\ D_2 \beta_1 &= -D_2 \gamma \end{aligned} \quad (59)$$

の関係があることがわかる。式(59)を利用して式(57)、
式(58)を式変形すると1自由度成分について以下のよ
うな a と γ の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} A_c \cos \gamma + B_c \sin \gamma &= C_c \\ D_c \cos \gamma + E_c \sin \gamma &= F_c \end{aligned} \quad (60)$$

ここで、

$$\begin{aligned} A_c &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon \sigma}{4\omega_1} - \frac{3\varepsilon P_{11}}{32\omega_1^2} a_1^2 \right) G_1 \\ B_c &= -\frac{G_1 \varepsilon}{4\omega_1} Q_{11} & D_c &= -B_c \\ C_c &= a_1 \left(-\frac{\varepsilon}{2} Q_{11}^2 - \omega_1 \sigma + \frac{3}{8} P_{11} a_1^2 - \frac{9\varepsilon}{128\omega_1^2} P_{11}^2 a_1^4 \right) \\ E_c &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon \sigma}{4\omega_1} - \frac{9\varepsilon P_{11}}{32\omega_1^2} a_1^2 \right) G_1 \\ F_c &= \omega_1 Q_{11} a_1 - \frac{3\varepsilon}{8\omega_1} Q_{11} P_{11} a_1^3 \end{aligned} \quad (61)$$

Fig.2 Model for calculation

Fig.3 Frequency response by using first order approximation

である。式(60)から γ を消去すると、次のような a^2 に
関する多項式となる。

$$\sum_{n=0}^7 C_n(\varepsilon, \sigma, \omega_1, P_{11}, Q_{11}, G_1) a^{2n} = 0 \quad (62)$$

式(62)を解き物理座標に変換することにより2次近
似までの周波数応答を求めることができる。式(62)に
より $\{\eta\}$ を求めることができ1自由度成分について次
のように表される。

$$\begin{aligned} \eta_1 &= a_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1) \\ &+ \varepsilon \left\{ \frac{1}{32\omega_1^2} P_{11} a_1^3 \cos(3\omega_1 t + 3\beta_1) \right\} \\ &= a_1 \cos(\Omega t - \gamma) \\ &+ \varepsilon \left\{ \frac{1}{32\omega_1^2} P_{11} a_1^3 \cos(3\Omega t - 3\gamma) \right\} \end{aligned} \quad (63)$$

γ は式(60)より求められる。式(63)を物理座標に変換す
ることにより時間応答を求めることができる⁽⁷⁾。

4 数値例

計算モデルを図2に示し、モデルの諸元を表1に示
す。解析において外力は $\varepsilon F = 50 \cos \Omega t$ で分系1の節
点5に作用するものとする。また $\varepsilon = 0.1$ とする。各分
系の全モード数はともに18である。

式(48)を解くことにより得られた1次近似までの周
波数応答について、以下の二つの場合を比較する。即
ち各分系の18モードすべてを採用し、全系を36自由
度とした場合、及び各分系の18モードのうち1~5次
モードを採用して全系を10自由度とし、さらにモー
ド展開を行って1~5次モードを採用した場合である。
分系1の節点5についての結果を図3に示す。

Table1 Specification of example model

Rotor, Pedestal length	(mm)	1.6×10^3
Rotor diameter	(mm)	3.0×10^1
Pedestal diameter	(mm)	1.0×10^2
Young's modules	(N/m ²)	2.1×10^{11}
Density	(Kg/m ³)	7.81×10^3
Bearing coefficient	(N/m)	6.69×10^5
Constrain coefficient	(N/m)	1.0×10^{10}

Fig.4 Frequency response by using second order approximation

Fig.5 Comparison of Frequency response by using first order approximation

Fig.6 Comparison of Frequency response by using second order approximation

(a) Displacement at Node1 in Substructure 1

(b) Displacement at Node5 in Substructure 1

Fig.7 Comparison of time history. ($\Omega = 140 \text{ rad/sec}$)
[—, Presented method in case of adopting 5 modes;
- - -, Numerical integration.]

(a) Displacement at Node1 in Substructure 1

(b) Displacement at Node5 in Substructure 1

Fig.8 Comparison of time history. ($\Omega = 159 \text{ rad/sec}$)
[—, Presented method in case of adopting 5 modes;
- - -, Numerical integration.]

また式(62)を解くことにより得られた 2 次近似までの周波数応答について、5 次モードまで採用した場合と全モードを採用した場合についての比較を分系 1 の節点 5 について図 4 に示す。文献(8)や(9)に示されているように 2 次近似までの多重尺度法による解は直接

(a) Node1 in Substructure 1

(b) Node5 in Substructure 1

Fig.9 Comparison of Frequency Spectra.
[—, Presented method in case of adopting 5 modes;
- - -, Numerical integration.]

数値積分では存在しない“incorrect solutions”⁽⁹⁾が現れる。図 4 の周波数応答曲線の 0.03m 以上の大振幅領域では“incorrect solutions”が現れているが実質上は関係ないのでここでは示していない。図 3, 4 から分かるように本研究の数値例の場合、5 次モードまで採用すれば周波数応答については精度よく解析できていることがわかる。このことより非線形復元力項をモード変換する際の作業が非常に楽になり、しかも精度も確保できることがわかる。

式(48)を解くことにより得られた 1 次近似までの周波数応答結果と、直接数値積分による結果を分系 1 の節点 5 について図 5 に示す。この場合も採用モード数は 5 次までとした。図より多重尺度法による結果は直接数値積分による解析結果と比べると大振幅の領域での誤差はあるものの比較的精度よく解析できていることがわかる。

式(62)による周波数応答結果と直接数値積分による結果を分系 1 の節点 5 について図 6 に示す。ここでも、直接積分の結果とは明らかに違う大振幅領域の“incorrect solutions”部については示していない。図より、2 次近似までの周波数応答についても、1 次近

似までの結果と同様に直接数値積分の解析結果と比べると比較的精度よく解析できていることがわかる。

このように、提案した手法を用いることにより直接数値積分では簡単には求めることのできない周波数応答を求めることができる。

なお本研究では、定常解の存在のみを解析しており安定判別は行っていない。しかし全系の支配方程式が得られているので通常の方法で行うことができる。

次に時刻歴応答について述べる。式(63)による、5次モードまで採用した場合の変位の時刻歴応答と、直接数値積分による時刻歴応答の比較を分系1の節点1と節点5について図7、図8に示す。図7は全系の1次固有振動数140rad/secで加振し、図8は、直接数値積分で最大変位を示した1次固有振動数より少し大きな159rad/secで加振したときの時刻歴応答である。図7、8共に多重尺度法と直接数値積分による結果の振幅の大きさを比べると、分系1の節点1で少し誤差があるが、位相も一致しており比較的精度よく非線形振動解析ができていることがわかる。

図7では1次固有振動数で加振しているにもかかわらず、節点1、節点5共に図8と比べて変位が小さくなっている。これは図5、6からもわかるように、非線形性の影響で、加振周波数が1次固有振動数を越えても変位が大きくなっていくためである。

次に、図8の多重尺度法と直接数値積分の時刻歴応答を、周波数分析した結果を分系1の節点1と節点5について図9に示す。ここでは加振周波数の3倍成分を確認しやすいように縦軸を対数表示とした。図を見ると両者とも非線形成分である加振周波数の3倍成分が現れており比較的良好に一致しているが、分系1の節点1については多重尺度法の方が直接数値積分の結果よりも3倍成分が弱いことがわかる。また、直接数値積分による結果は加振周波数の5倍成分も現れているが、多重尺度法では振動の1次成分までの解しか求めているので5倍成分は現れない。

計算時間について提案した手法の有効性を示す。一例として図8を求めるための計算時間について比べてみると、3.5秒までの時刻歴応答を求めるのに、直接数値積分の場合、23分50秒17かかったのに対し、提案した手法の場合、1秒26で計算することができた。使用した計算機はワークステーション、Sun製Ultra 1 (Creator 3D Model 170e)である。

結果として、提案した手法を用いれば本研究で扱った範囲では、周波数応答、時刻歴応答共に5次モードまで採用すれば精度を保つことができた。5次モードまで採用することにより、非線形復元力項をモード変換する際の作業が非常に楽になり、変位や、位相について精度よく計算することができる。また、提案した手法は、直接数値積分法と比べ、計算時間を大幅に短

縮することができた。

一般に不拘束モード合成法の場合、多くの分系採用モード数あるいは剰余剛性の導入が必要であると言われているが、本研究の場合は主共振点付近の解析を行っているため、5次モードまでの採用でも精度の良い解が得られたものと考えられる。必要な採用モード数などについては今後の検討課題である。

また本研究では主共振点付近の解析を行ったが、それ以外の加振周波数の場合は文献(5)の手法を用いることができる。

5 結言

本研究では、回転軸系の回転軸に非線形性が含まれる場合に、部分構造合成法と摂動法(多重尺度法)を組み合わせて簡便に非線形振動解析を行う手法を提案した。特に主共振点付近の解析を行うこととし、非線形復元力項をモード座標変換する手法を示した。数値例によって提案した手法の有効性を調べたところ、解析精度を確保しつつ、計算時間を大幅に短縮できることがわかった。

文献

- (1) 長松昭男・大熊政明, 部分構造合成法, (1991), 培風館
- (2) Nayfeh, A.H. and Mook, D.T., *Nonlinear Oscillations*, (1979), 163, John Wiley and Sons.
- (3) Haquang, N. and Mook, D.T., *Non-linear Structural Vibration under Combined Parametric and External Excitation*, *Journal of Sound and Vibration*, **118-2** (1987), 291-306.
- (4) Mook, D.T., *The Influence of An Internal Resonance Conditions*, *Journal of Sound and Vibration*, **102-4** (1987), 473-492.
- (5) T.IWATSUBO, et al., *Non-Linear Vibration Analysis of Rotor System using Substructure Synthesis Method (Analysis with consideration of non-linearity of rotor)*, *JSME International Journal, Series III* (1998), Vol.41, No.4, 727-733.
- (6) 岩壺ほか3名, 部分構造合成法を用いた回転軸系の非線形振動解析, 機構論, No.98-8(B), (1998-8), 309-312.
- (7) L.D.Zavodney and A.H.Nayfeh, *The Response of A Single-Degree-of-Freedom System with Quadratic and Cubic Non-linearities to A Fundamental Parametric Resonance*, *Journal of Sound and Vibration*, **120-1** (1988), 63-93.
- (8) A.Hassan, *Use of Transformations with The Higher Order Method of Multiple Scales to Determine The Steady State Periodic Response of Harmonically Excited Non-linear Oscillators, Part I: Transformation of Derivative*, *Journal of Sound and Vibration*, **178-1** (1994), 1-19.
- (9) Z.Rahman and T.D.Burton, *On High Order Methods of Multiple Scales in Non-linear Oscillations-Periodic Steady State Response*, *Journal of Sound and Vibration*, **133-3** (1989), 369-379.