線形時変システムのノンパラメトリック同定*
(第2報, 単一の試行データを用いた同定手法の構築)増田 新^{*1}, 山本 鎮男^{*2}, 曾根 彰^{*1}Nonparametric Identification of Linear Time-Varying Systems
(2nd Report, Identification from a Pair of Single Realization
of Input/Output Processes)Arata MASUDA^{*3}, Shizuo YAMAMOTO and Akira SONE^{*3} Kyoto Institute of Technology, Dept. of Mechanical and System Engineering,
Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8585 Japan

This paper describes the identification of the time-varying transfer function from a pair of single realization of the input and output processes. We propose an identification method based on the nonstationary spectrum estimator with time-frequency smoothing kernel and derive the optimal kernel to minimize a mean square error measure. Then we show how to construct the optimal estimator approximately using the given data. Simple examples are examined to illustrate the performance of the proposed method.

Key Words: Identification, Information Processing and Signal Analysis, Spectrum Analysis, Diagnosis, Time-Varying System, Health Monitoring

1 緒言

稼働中の機械や建築・土木構造物の応答を常時監視し, 対象物が「いつ」「どの部分に」「どの程度の」損傷を受けたかを検出することによって対象物の健全性を診断する技術はヘルスマニタリングと呼ばれ, 今後ますます重要になることが指摘されている。

本研究では, 損傷による機械・構造物の特性変化を時間軸に沿って連続的に追跡するために, システムを線形時変システムとしてモデル化し, システムの周波数伝達特性の時間的变化をシステムの入出力観測値から同定する手法について研究する。

線形時変システムの周波数伝達特性は, Zadeh⁽¹⁾が定義した時変伝達関数によって時間-周波数平面上でノンパラメトリックに特徴づけられる。時変伝達関数の同定のごく基本的な枠組みは, Kozekら⁽²⁾の最近の研究によって整理されているが, Kozekらの示した同定手法は入力が定常白色過程の場合に限られている。これに対

して一般的な非定常不規則過程を入力とする場合については, 現実の問題で重要となるにもかかわらず, 論じられていない。

筆者らは前報⁽³⁾で, 非定常不規則過程を入力とする線形時変システムの時変伝達関数の同定手法について検討し, 時変伝達関数が, 入力 of 非定常スペクトルの推定, 入力 of 非定常特性を相殺するような前処理, 前処理を施した入力と出力との相互非定常スペクトルの推定, という三段階の手順によって同定できることを示した。したがって問題は, 入力 of 非定常スペクトル, 前処理を施した入力と出力との相互非定常スペクトル, の二種類の非定常スペクトルの推定問題に帰着されるが, 前報ではスペクトル推定のための具体的な手法については議論していなかった。

非定常スペクトルは不規則過程の2次統計量の一種なので, その定義には期待値演算が含まれる。仮に同じ試行を何度も繰り返すことが可能で, 入出力の試行データを何組も入手できるとすると, 定義どおりに集合平均をとることによって二種類の非定常スペクトルを推定でき, これらを用いてシステムの時変伝達関数を同定することが可能である。しかし現実には現象は一度しか起きないので, 観測できるのは一組の入出力

* 原稿受付 1998年12月10日。

^{*1} 正員, 京都工芸繊維大学工学学部 (〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。^{*2} 正員, 早稲田大学理工学総合研究センター (〒169-0072 東京都新宿区大久保3-4-1)。

E-mail: masuda@ipc.kit.ac.jp

Fig. 1 Unknown linear time-varying system H excited by nonstationary random process u , and input and output observations x and y corrupted by white noise processes w and v

データのみであり、この一回分の試行データから合理的に非定常スペクトルを推定する必要がある。

本報では、非定常スペクトル推定に関する従来の研究⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾と同様の考え方を採用し、期待値演算の代わりに時間周波数平面上で平滑化を行うことにより、非定常スペクトルを推定する。ただしその際、平滑化のための重み関数(核関数)を、各時刻における局所的な非定常性の激しさに応じて取り替えるという点に、本手法の特徴がある。

以下では、まず問題設定を明らかにした後、時変核関数を持つ推定器を構築し、各時刻において最適な核関数を理論的に導く。最適化された核関数を実際に構成するには、いくつかの統計量があらかじめ既知である必要があるが、実際にはそのような先験情報を期待することは難しい。そこで与えられたデータからこれらの統計量を合理的に推定することにより、最適推定器を近似的に構成することを提案する。最後に、提案する非定常スペクトル推定法を適用して、システムの時変伝達関数を同定した例をいくつか示し、本手法の有効性を検証する。

2 背景と問題設定

線形時変システムの入出力関係は次式で表される。

$$\begin{aligned} (Hu)(t) &= \int_s h(t, s)x(s)ds \\ &= \int_\tau h_0(t, \tau)x(t-\tau)d\tau \end{aligned} \quad (1)$$

H はシステムを表す積分作用素であり、積分核 $h(t, s)$ は時刻 s に単位インパルスを入力したときのインパルス応答、 $h_0(t, \tau) := h(t, t-\tau)$ である。また以後断らない限り、積分は $[-\infty, \infty]$ の範囲で行うものとする。

H を未知なる線形時変システムとして、次の入出力関係を考える。(図1)

$$y(t) = (Hu)(t) + v(t) \quad (2)$$

$$x(t) = u(t) + w(t) \quad (3)$$

Fig. 2 Three-step identification procedure

ここで、 $u(t)$ はシステムへの入力、 $y(t)$ は出力の観測値、 $x(t)$ は入力の観測値、 $v(t)$ 、 $w(t)$ は観測雑音である。 $u(t)$ は平均値が零のガウス性非定常不規則過程とする。 $v(t)$ 、 $w(t)$ は平均値が零、分散がそれぞれ σ_v^2 、 σ_w^2 なるガウス性定常白色過程とし、これらは互いに無相関で、かつ入力と無相関であるとする。

システムの時変伝達関数⁽¹⁾は次式で定義される。

$$Z_H(t, \omega) := \int_\tau h_0(t, \tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \quad (4)$$

本研究での目的は、入力観測値 $x(t)$ と出力観測値 $y(t)$ から、未知システム H の時変伝達関数 $Z_H(t, \omega)$ を同定することである。

筆者らは前報⁽³⁾で、非定常不規則過程を入力とする線形時変システムの時変伝達関数の同定問題を、次の三段階の手順を経て解くことを提案した。

手順1 入力観測値 x の非定常スペクトルの推定値 $\widetilde{NS}_x$ を求め、

$$\widetilde{NS}_u(t, \omega) = \widetilde{NS}_x(t, \omega) - \sigma_w^2 \quad (5)$$

より、入力 u の非定常スペクトルの推定値 $\widetilde{NS}_u$ を求める。

手順2 入力観測値 x に対して、次の非相関化前処理を施す。

$$\begin{aligned} \widetilde{z}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_\tau \int_\omega \frac{\widetilde{NS}_u(t, \omega)}{|\widetilde{NS}_u(t, \omega)|^2 + \lambda q(t)^{-2}} \\ &\quad \cdot x(t-\tau) e^{i\omega\tau} d\omega d\tau \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 λ は正則化パラメータ、 $q(t)$ は入力の振幅非定常性の影響を緩和するための重み係数⁽³⁾である。

手順3 出力観測値 y と $\widetilde{z}$ の相互非定常スペクトルの推定値 $\widetilde{NS}_{y, \widetilde{z}}$ を求め、これを時変伝達関数の推定値 $\widetilde{Z}_H$ とする。

図2に上記の手順を模式的に示す。

以上のように、システムの時変伝達関数を同定するためには、二種類の非定常スペクトル、すなわち NS_x

および $NS_{y,z}$ を観測されたデータから推定する必要がある。前報では、同じ時変システムに同じ非定常不規則過程の異なる試行過程を何度も入力するモンテカルロ実験を繰り返し、得られた試行結果の集合平均を計算することによってスペクトルを推定した。しかしこのようなアプローチは計算機上での仮想的な数値実験でのみ許されることであって、勿論現実には実行不可能である。したがって、実際に観測される一度きりの試行データから、これらの非定常スペクトルを推定することが、次の重要な問題になる。

ところで、 $NS_{y,z}$ は非定常過程 y および z の間の相互非定常スペクトルであり、 NS_x も非定常過程 x と自分自身との相互非定常スペクトルに他ならない。そこで次節では、問題を一般化して、二つの非定常不規則過程 x_1 , x_2 の間の相互非定常スペクトル $NS_{x_1,x_2}(t, \omega)$ を、一組の試行データ $x_1(t)$, $x_2(t)$ から推定する問題を取り扱う。

3 非定常スペクトルの推定法

3.1 時間周波数平面上での平滑化によるスペクトル推定 非定常過程 x_1 と x_2 との相互非定常スペクトル NS_{x_1,x_2} は、次式で定義される⁽³⁾。

$$NS_{x_1,x_2}(t, \omega) := \int_{\tau} \mathcal{E} \{ x_1(t) \overline{x_2(t-\tau)} \} e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (7)$$

ここで、相互 Rihaczek 分布⁽⁸⁾ RD_{x_1,x_2} ,

$$RD_{x_1,x_2}(t, \omega) := \int_{\tau} x_1(t) \overline{x_2(t-\tau)} e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (8)$$

を導入すると、

$$NS_{x_1,x_2}(t, \omega) = \mathcal{E} \{ RD_{x_1,x_2}(t, \omega) \} \quad (9)$$

と書ける。

上の定義に沿って考えれば、仮に、非定常過程 x_1 , x_2 の試行過程を何組も入手することができれば、それぞれの組から求めた相互 Rihaczek 分布の集合平均をとることによって、非定常スペクトルを推定できる。しかし現実には、多くの場合、現象は一度しか起きないので、得られる試行過程は一組のみである。したがって、この一組の見本過程から合理的に集合平均を推定する必要がある。

そこで、式 (9) の期待値演算のかわりに、 (t, ω) -平面上で Φ を核関数とする平滑化処理を考える。すなわち、非定常スペクトルの推定値として次式を考える。

$$\begin{aligned} \widehat{NS}_{x_1,x_2}(t, \omega; \Phi) \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{t'} \int_{\omega'} RD_{x_1,x_2}(t', \omega') \Phi(t-t', \omega-\omega') d\omega' dt' \end{aligned} \quad (10)$$

式 (10) の表現は、時間周波数解析の分野では Cohen のクラス⁽⁸⁾として知られている。Cohen のクラスを、非定常スペクトル推定器として用いるというアイディアは、Martin⁽⁴⁾によって提唱されたものである。同様のアイディアは Amin ら⁽⁵⁾や Sayeed ら⁽⁶⁾および Kozek ら⁽⁷⁾の研究にも見られる。

Cohen のクラスによる非定常スペクトル推定の妥当性は、定常過程におけるパワースペクトルの推定手法と関連づけて、次のように理解できる。

まず ω 方向の平滑化については、パワースペクトルを推定するときに用いるスペクトルウィンドウと同じ効果が期待できる。すなわち、真のスペクトルが ω 方向にある程度滑らかな分布を持つならば、適切な幅の周波数ウィンドウを用いた重み付き移動平均によって推定値の分散を減少させることができる。

次に t 方向についてであるが、定常過程ではエルゴード性を仮定することにより、全観測時間にわたって時間平均をとることができる。これに対して非定常過程では全時間について平均をとることはできない。しかし、真のスペクトルが t 方向にある程度滑らかな分布を持つならば、言い換えれば、不規則過程の非定常性がある程度緩やかであれば、ある長さの時間区間内ではほぼ定常と見なすことができる。したがって、この時間幅の時間ウィンドウを用いた重み付き移動平均を、集合平均の代わりに用いることができるだろう。

このように Cohen のクラスによる平滑化推定器は、時間周波数平面上において時間と周波数両方向の移動平均をとることに相当する。この移動平均操作におけるウィンドウ（あるいは重み関数）の形状を定めるのが、式 (10) の核関数 Φ であり、 Φ をいかにうまく設計するかが推定器の性能を決定する。

3.2 時変核関数の導入 推定式 (10) では、核関数は時間全域において同じものを用いている。言い換えれば、非定常性の激しさは時刻に関わらず同程度であると仮定している。ところが多くの場合、対象となる不規則過程の非定常性の激しさは、時刻によって異なると考えるのが自然である。

このような場合に対処するために、本研究では、平滑化のための核関数を時刻によって取り替えることにする。すなわち本研究では、非定常スペクトルの推定式として、核関数を時変とした次式を採用する。

$$\begin{aligned} \widehat{NS}_{x_1,x_2}(t, \omega; \Phi^{(t)}) \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{t'} \int_{\omega'} RD_{x_1,x_2}(t', \omega') \Phi^{(t)}(t-t', \omega-\omega') d\omega' dt' \end{aligned} \quad (11)$$

時変核関数 $\Phi^{(t)}$ は、次のクラスの関数から選ぶことにする。

$$\Phi^{(t)}(t, \omega) = g(-t)\Psi^{(t)}(t, \omega) \quad (12)$$

ここで、実数値関数 $g(t)$ は原点近傍に局在し、原点では1を値とする窓関数であり、本研究では次式で表される対称な関数を用いている。

$$g(t) := \begin{cases} 0 & t \leq -0.5L \\ 0.5 \left(1 + \cos \frac{\pi}{0.1L}(t + 0.4L)\right) & -0.5L \leq t \leq -0.4L \\ 1 & |t| < 0.4L \\ 0.5 \left(1 + \cos \frac{\pi}{0.1L}(t - 0.4L)\right) & 0.4L \leq t \leq 0.5L \\ 0 & t \geq 0.5L \end{cases} \quad (13)$$

ここで、 L は窓の長さである。

式(12)を式(11)に代入して計算すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \widehat{NS}_{x_1, x_2}(t, \omega; \psi^{(t)}) \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{\nu} \int_{\tau} A_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau) \psi^{(t)}(\nu, \tau) e^{i(\nu t - \omega \tau)} d\tau d\nu \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 A_{x_1, x_2}^g は次式で定義される。

$$A_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau) := \int_{\nu'} g(t' - t) x_1(t') \overline{x_2(t' - \tau)} e^{-i\nu t'} dt' \quad (15)$$

上式は、いわゆる非対称相互あいまい度関数⁽⁹⁾を時刻 t 近傍に局在化したものと考えることができる。そこで本研究では、 A_{x_1, x_2}^g を短時間相互あいまい度関数と呼ぶことにする。また、 $\psi^{(t)}$ は、

$$\psi^{(t)}(\nu, \tau) := \mathcal{F}_{t \rightarrow \nu} \mathcal{F}_{\omega \rightarrow \tau}^{-1} \{\Psi(t, \omega)\} \quad (16)$$

である。ただし、 $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ はそれぞれフーリエ変換とフーリエ逆変換を表す。上式と式(12)より、 $\psi^{(t)}$ と $\Phi^{(t)}$ の関係は次式のようにになる。

$$\Phi^{(t)}(t, \omega) = g(-t) \mathcal{F}_{\nu \rightarrow t}^{-1} \mathcal{F}_{\tau \rightarrow \omega} \{\psi^{(t)}(\nu, \tau)\} \quad (17)$$

以上の操作により、核関数 $\Phi^{(t)}$ の設計問題は、 (ν, τ) -平面上での核関数 $\psi^{(t)}$ の設計問題に置き換えられる。

3.3 時変核関数の最適化 非定常スペクトルの真値 NS_{x_1, x_2} の定義式(7)に対して、 ω について逆フーリエ変換を、 t について g を窓関数とする短時間フーリエ変換を施し、さらに計算すると次式を得る。

$$NS_{x_1, x_2}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\nu} \int_{\tau} EA_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau) e^{i(\nu t - \omega \tau)} d\tau d\nu \quad (18)$$

ここで、 EA_{x_1, x_2}^g は、次式で定義される。

$$\begin{aligned} EA_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau) &:= \int_{\nu'} g(t' - t) \mathcal{E} \{x(t') \overline{y(t' - \tau)}\} e^{-i\nu t'} dt' \\ &= \mathcal{E} \{A_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau)\} \end{aligned} \quad (19)$$

これは式(15)の短時間相互あいまい度関数 A_{x_1, x_2}^g の期待値であり、平均短時間相互あいまい度関数と呼ぶことにする。

式(14)と式(18)を比較すると、推定値 $\widehat{NS}_{x_1, x_2}$ を真値 NS_{x_1, x_2} に近づけるには、 $A_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau) \psi^{(t)}(\nu, \tau)$ を $EA_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau)$ に近づければよいことがわかる。そこで、本研究では最適な核関数 $\psi_{opt}^{(t)}$ を次のように定める。

$$\begin{aligned} \psi_{opt}^{(t)}(\nu, \tau) = \arg \inf_{\psi(\nu, \tau)} \mathcal{E} \{ & |A_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau) \psi(\nu, \tau) \\ & - EA_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau)|^2 \} \end{aligned} \quad (20)$$

上式の解は、直交原理より次の正規方程式を満たさなければならない。

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{ & \{A_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau) \psi^{(t)}(\nu, \tau) \\ & - EA_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau)\} \overline{A_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau)} \} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

これを解くと、時刻 t における最適な核関数は次のように求められる。

$$\psi_{opt}^{(t)}(\nu, \tau) = \frac{|EA_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau)|^2}{\mathcal{E} \{|A_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau)|^2\}} \quad (22)$$

これを式(14)に代入した $\widehat{NS}_{x_1, x_2}(t, \omega; \psi_{opt}^{(t)})$ が、式(20)の意味で最適なスペクトル推定器である。

3.4 最適推定器の近似的構成 以上より、時刻 t における最適な核関数 $\psi_{opt}^{(t)}$ は式(22)で与えられることが明らかになったが、具体的にこれを計算するためには、 EA_{x_1, x_2}^g と $\mathcal{E} \{|A_{x_1, x_2}^g|^2\}$ 、すなわち短時間相互あいまい度関数の期待値と2乗期待値が既知でなければならない。これらは元の不規則過程の2次および4次統計量であり、これらをあらかじめ知っていることを仮定するのは現実的でない。そこで本研究では、これらの統計量に対する大まかな推定値を以下のように定め、 $\psi_{opt}^{(t)}$ を近似的に構成することを提案する。

まず、対象とする不規則過程 x_1, x_2 を実数のクラスに制限すると、 $\psi_{opt}^{(t)}$ は ν について対称となる。したがって、以下では $\nu \geq 0$ の領域だけを考えることにする。

また、 $\mathcal{E} \{|A_{x_1, x_2}^g|^2\}$ は次のように書けることに注意する。

$$\mathcal{E} \{|A_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau)|^2\} = |EA_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau)|^2 + V^{(t)}(\nu, \tau) \quad (23)$$

ここで、 $V^{(t)}$ は短時間相互あいまい度関数の分散、

$$V^{(t)}(\nu, \tau) := \mathcal{E} \{|A_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau) - EA_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau)|^2\} \quad (24)$$

である。

式(23)を式(22)に代入すると、時刻 t における最適な核関数は次のように書ける。

$$\psi_{opt}^{(t)}(\nu, \tau) = \frac{|EA_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau)|^2}{|EA_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau)|^2 + V^{(t)}(\nu, \tau)} \quad (25)$$

Fig. 3 Essential support of EA_{x_1, x_2}^g at a time (hatched area) and rectangular domain $\mathcal{D}$ which covers the union of supports

さて、式(25)右辺の $V^{(t)}$ を近似的に推定するために、次の仮定をおく。

仮定 ε を小さな正数として、

$$\mathcal{D} \supseteq \bigcup_t \text{closure} \{(\nu, \tau) : |EA_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau)| > \varepsilon, \nu \geq 0\} \quad (26)$$

を満たす (ν, τ) -平面上の矩形領域 $\mathcal{D} \equiv \{(\nu, \tau) : 0 \leq \nu \leq \nu_{\max}, \tau_{\min} \leq \tau \leq \tau_{\max}\}$ (図3参照) が既知であると仮定する。

さらに、 $\mathcal{D}$ に隣接する領域 $\mathcal{D}_+ := \{(\nu, \tau) : 0 \leq \nu \leq \nu_{\max}, \tau_{\max} \leq \tau \leq \tau_{\max} + \Delta\tau\}$, および領域 $\mathcal{D}_- := \{(\nu, \tau) : 0 \leq \nu \leq \nu_{\max}, \tau_{\min} - \Delta\tau \leq \tau \leq \tau_{\min}\}$ を定義する (図3)。ただし $\Delta\tau > 0$ とし、 $\tau_{\max} - \tau_{\min}$ の $1/3 \sim 1/2$ 程度に設定する。

すると、領域 $\mathcal{D}_+ \cup \mathcal{D}_-$ 上では $EA_{x_1, x_2}^g \approx 0$ だから、分散 $V^{(t)}$ は、式(24)より、

$$V^{(t)}(\nu, \tau) \approx \varepsilon \left\{ |A_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau)|^2 \right\}, \quad (27)$$

if $(\nu, \tau) \in \mathcal{D}_+ \cup \mathcal{D}_-$

そこで、本研究では、まず、次式を領域 $\mathcal{D}_+$ および $\mathcal{D}_-$ 上での分散 $V^{(t)}$ の推定値とする。

$$\begin{aligned} \widetilde{V}^{(t)}(\nu, \tau) &= \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau_{\max}}^{\tau_{\max} + \Delta\tau} |A_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau')|^2 d\tau' \\ &=: \widetilde{V}_+^{(t)}(\nu), \quad \text{if } (\nu, \tau) \in \mathcal{D}_+ \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{V}^{(t)}(\nu, \tau) &= \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau_{\min} - \Delta\tau}^{\tau_{\min}} |A_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau')|^2 d\tau' \\ &=: \widetilde{V}_-^{(t)}(\nu), \quad \text{if } (\nu, \tau) \in \mathcal{D}_- \end{aligned} \quad (29)$$

式(28), 式(29) で求めた $\widetilde{V}_+^{(t)}(\nu)$ と $\widetilde{V}_-^{(t)}(\nu)$ を τ 方向に線形補間したものを、領域 $\mathcal{D}$ 上における $V^{(t)}$ の大まかな推定値として採用する。

$$\begin{aligned} V^{(t)}(\nu, \tau) &\approx \widetilde{V}^{(t)}(\nu, \tau) \quad (30) \\ &:= \frac{\tau - \tau_{\min}}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} \widetilde{V}_+^{(t)}(\nu) + \frac{\tau_{\max} - \tau}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} \widetilde{V}_-^{(t)}(\nu), \\ &\quad \text{if } (\nu, \tau) \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

次に、式(25)右辺の $|EA_{x_1, x_2}^g|^2$ を近似的に推定するために、まず、式(23)より、

$$|EA_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau)|^2 = \varepsilon \left\{ |A_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau)|^2 - V^{(t)}(\nu, \tau) \right\} \quad (31)$$

ここで、

$$A^{(t)}(\nu, \tau) := |A_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau)|^2 - V^{(t)}(\nu, \tau) \quad (32)$$

とおくと、 $A^{(t)}(\nu, \tau)$ は $|EA_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau)|^2$ の不偏推定値になっていることがわかる。したがって $A^{(t)}$ の (ν, τ) -平面上での大まかな分布は、時刻 t における $|EA_{x_1, x_2}^g|^2$ の大まかな分布を反映していると考えられる。

$A^{(t)}$ の大まかな分布を抽出するために、 (ν, τ) -平面上の正值関数の集合 $\{F_k(\nu, \tau)\}_{k \in \{1, \dots, K\}}$ を用意し、これらの正值関数の線形和で $A^{(t)}$ をあてはめ近似する。

$$A^{(t)}(\nu, \tau) \approx \sum_{k \in K} c_k F_k(\nu, \tau) =: \widetilde{A}^{(t)}(\nu, \tau) \quad (33)$$

ここで $K \subseteq \{1, \dots, K\}$ は添字の部分集合である。この $\widetilde{A}^{(t)}(\nu, \tau)$ を $|EA_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau)|^2$ の大まかな推定値として採用する。

$$|EA_{x_1, x_2}^g(t, \nu, \tau)|^2 \approx \widetilde{A}^{(t)}(\nu, \tau) \quad (34)$$

式(33)の $\widetilde{A}^{(t)}$ を決定するために、本研究では、繰り返しの関数の近似手法の一つである matching pursuit⁽¹⁰⁾ を応用した次のアルゴリズムを用いる。ただし $A^{(t)}$ の計算の際には、式(32)右辺の $V^{(t)}$ のかわりに式(30)の $\widetilde{V}^{(t)}$ を用いる。

Step 1 $\{F_k(\nu, \tau)\}_{k \in \{1, \dots, K\}}$ に含まれる関数を、 L^2 ノルムが1になるよう正規化する。 n 回目の繰り返しにおける近似関数を $\widetilde{A}_n^{(t)}$, 残差を R_n とし、 $n = 0, \widetilde{A}_0^{(t)} = 0, R_0 = A^{(t)}$ と初期化する。

Step 2 内積 $\{\langle R_n, F_k \rangle\}_{k \in \{1, \dots, K\}}$ を計算する。

Step 3 次式を満たす k_{n+1} を見つける。

$$k_{n+1} = \arg \max_k \langle R_n, F_k \rangle$$

Step 4 ε を小さな正数として、次式が成立するなら、アルゴリズムを停止し、 $\widetilde{A}^{(t)} := \widetilde{A}_n^{(t)}$ と決定する。

$$\langle R_n, F_{k_{n+1}} \rangle < \varepsilon$$

成立しないなら、**Step 5** へ。

Step 5 $\widetilde{A}_n^{(t)}, R_n$ を更新する。

$$\widetilde{A}_{n+1}^{(t)} = \widetilde{A}_n^{(t)} + \langle R_n, F_{k_{n+1}} \rangle F_{k_{n+1}}$$

$$R_{n+1} = R_n - \langle R_n, F_{k_{n+1}} \rangle F_{k_{n+1}}$$

$n := n + 1$ として **Step 2** へ戻る。

正值関数の集合 $\{F_k(\nu, \tau)\}$ は、問題に合わせて適切なものを選ぶ必要がある。本研究で推定すべき非定常スペクトルは、 NS_x および $NS_{y,z}$ である。 NS_x については $(x_1, x_2) = (x, x)$ であり、対応する $|EA_{x_1, x_2}^g|^2$ は多くの場合、原点を最大値とする山型の分布を持つ。また、 $NS_{y,z}$ については $(x_1, x_2) = (y, z)$ であり、対応する $|EA_{x_1, x_2}^g|^2$ はシステムの因果律より、 $\tau < 0$ で零でなければならない。そこで本研究では、 $F_k(\nu, \tau)$ として次の関数を採用する。 $[NS_x$ を推定するとき]

$$F_k(\nu, \tau) = \exp \left\{ \frac{(\nu \cos \varphi_k + \tau \sin \varphi_k)^2}{2\sigma_{1k}^2} + \frac{(-\nu \sin \varphi_k + \tau \cos \varphi_k)^2}{2\sigma_{2k}^2} \right\} \quad (35)$$

$[NS_{y,z}$ を推定するとき]

$$F_k(\nu, \tau) = w(\tau) \exp \left\{ \frac{(\nu \cos \varphi_k + (\tau - \tau_0) \sin \varphi_k)^2}{2\sigma_{1k}^2} + \frac{(-\nu \sin \varphi_k + (\tau - \tau_0) \cos \varphi_k)^2}{2\sigma_{2k}^2} \right\} \quad (36)$$

ただし $w(\tau)$ は、 $\alpha \gg 1$ として、次式で与える。

$$w(\tau) := \begin{cases} 0 & , \text{ if } \tau < 0 \\ 1 - e^{-\alpha\tau} & , \text{ if } \tau \geq 0 \end{cases}$$

式 (30)、式 (34) による $V^{(t)}$ と $|EA_{x_1, x_2}^g|^2$ の推定値を、式 (25) 右辺に代入することにより、時刻 t における最適な核関数を近似的に構成することができる。

$$\psi_{opt}^{(t)}(\nu, \tau) \approx \widetilde{\psi}_{opt}^{(t)}(\nu, \tau) := \frac{\widetilde{A}^{(t)}(\nu, \tau)}{\widetilde{A}^{(t)}(\nu, \tau) + \widetilde{V}^{(t)}(\nu, \tau)} \quad (37)$$

3.5 核関数の非対称化 最適化された核関数 (式 (22)) あるいはこれを近似的に構成したもの (式 (37)) は ν について対称な正值関数である。したがってこれらに対応する時変核関数 $\Phi_{opt}^{(t)}$ は、窓関数の対称性と式 (17) より、 t について対称な形状に制限される。

ところが、スペクトルが時間的に急変する場合、たとえば図4のような場合には、図の右側に示すような非対称な形状の平滑化核関数を用いたほうが、スペクトルの変化を明確に推定できることは明らかである。そこで以下では、時変核関数として t について非対称な形状のものを許すように推定法を改良する。

まず、データから短時間相互あいまい度関数を計算する際に、式 (15) の A_{x_1, x_2}^g の代わりに、時刻 t より未来のデータだけで構成された短時間相互あいまい度関数 A_{x_1, x_2}^{g+} と、過去のデータだけで構成された短時間相互あいまい度関数 A_{x_1, x_2}^{g-} の二種類を計算する。

$$A_{x_1, x_2}^{g+}(t, \nu, \tau) := \int_{\nu'} g(t' - t) \rho^+(t, t', \tau) e^{-i\nu' \tau} dt' \quad (38)$$

$$A_{x_1, x_2}^{g-}(t, \nu, \tau) := \int_{\nu'} g(t' - t) \rho^-(t, t', \tau) e^{-i\nu' \tau} dt' \quad (39)$$

Fig. 4 Example of nonstationary spectrum and adequate time-varying smoothing kernel

ただし、

$$\rho^+(t, t', \tau) := \begin{cases} x_1(2t - t')x_2(2t - t' - \tau), & t' < t \\ x_1(t')x_2(t' - \tau), & t' \geq t \end{cases} \quad (40)$$

$$\rho^-(t, t', \tau) := \begin{cases} x_1(t')x_2(t' - \tau), & t' \leq t \\ x_1(2t - t')x_2(2t - t' - \tau), & t' > t \end{cases} \quad (41)$$

それぞれを元に最適化核関数 $\psi_{opt}^{(t)+}$, $\psi_{opt}^{(t)-}$ を構成し、得られた推定値、

$$\widetilde{NS}_{x_1, x_2}^+(t, \omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{\nu} \int_{\tau} A_{x_1, x_2}^{g+} \psi_{opt}^{(t)+} e^{i(\nu t - \omega \tau)} d\tau d\nu \quad (42)$$

$$\widetilde{NS}_{x_1, x_2}^-(t, \omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{\nu} \int_{\tau} A_{x_1, x_2}^{g-} \psi_{opt}^{(t)-} e^{i(\nu t - \omega \tau)} d\tau d\nu \quad (43)$$

の平均をスペクトル推定値とする。この操作により、時刻 t より未来のデータと過去のデータに対して異なる重みで平滑化を行うことができ、平滑化のための時変核関数を、時間方向に非対称な形状を含むクラスにまで拡張することができる。

4 数値例

提案した非定常スペクトル推定法を2の手順1と手順3で用いることにより、観測された一組の入出力データからシステムの時変伝達関数を同定することができる。以下では、前報⁽³⁾の数値例で用いたものと同じ時変システムと入力を用いて数値実験を行い、本手法の性能を検証する。以下の例では、サンプリング周期が1秒になるように時間軸を規格化している。また、等高線図には絶対値を表示し、同定結果の等高線図と対応する真値の等高線図は同じ描き方をしている。

同定対象は、共振周波数 ω_0 が、次式のように変化する線形時変システムである。

$$\omega_0 = \begin{cases} 0.2\pi, & t \leq 850 \\ 0.16\pi, & 850 \leq t \leq 900 \\ 0.1\pi, & 900 \leq t \leq 1400 \\ 0.05\pi, & t \geq 1400 \end{cases} \quad (44)$$

図5に、このシステムの時変伝達関数の真値の等高線図を示す。

システムに対する入力としては、次の二種類を用いる。

Fig. 5 Time-varying transfer function of target system

(a) Stationary input

(b) Nonstationary input

Fig. 6 Nonstationary spectrum of inputs

定常有色過程 固有振動数が0.3, 減衰比が0.1の1自由度系に, 標準偏差1の定常白色過程を入力したときの応答を入力として用いる. 図6(a)に, この入力非定常スペクトルの等高線図を示す.

非定常過程 共振周波数 ω_1 が, 次式のように変化する時変システムを考える.

$$\omega_1 = \begin{cases} 0.2\pi, & t \leq 200 \\ 0.25\pi - 0.05\pi \cos \frac{\pi}{1600}(t-200), & 200 \leq t \leq 1800 \\ 0.4\pi, & t \geq 1800 \end{cases} \quad (45)$$

この時変システムに標準偏差1の定常白色過程を入力したときの応答に, 次式の包絡線に乗じたものを, 入力として用いる.

$$a(t) = \begin{cases} 0.5 - 0.4 \cos \frac{\pi}{500}(t), & 0 \leq t \leq 500 \\ 0.9, & 500 \leq t \leq 1300 \\ 0.5 + 0.4 \cos \frac{\pi}{700}(t-1300), & 1300 \leq t \leq 2000 \end{cases} \quad (46)$$

図6(b)に, この入力の非定常スペクトルの等高線図を示す.

提案した非定常スペクトル推定法を2の手順1と手順3で用いることにより, システムの時変伝達関数の同定

(a) Excited by stationary input

(b) Excited by nonstationary input

Fig. 7 Identified time-varying transfer function

(a) Excited by stationary input

(b) Excited by nonstationary input

Fig. 8 Statistics of identification error ratio for 20 times trial

を行った. ただし観測雑音は零とした. 同定結果の例を図7に示す. 誤差を評価するために, 試行を20回繰り返し, 次式で定義する規格化された2乗積分同定誤差 $E(t)$ の分布を調べた.

$$E(t) := \frac{\int_{\omega} |\widehat{Z}_H(t, \omega) - Z_H(t, \omega)|^2 d\omega}{\int_{\omega} |Z_H(t, \omega)|^2 d\omega} \quad (47)$$

$E(t)$ の平均と分散を図8に示す. 非定常入力を用いた場合, 定常入力の場合に比べて $t=1000$ 付近以降で同定誤差が大きくなっているが, これは時変伝達関数のピーク周波数が時間とともに低下するのに反して, 使用し

Fig. 9 Adapted time-varying smoothing kernels

次に、提案したアルゴリズムにしたがって実際にどのような核関数が選ばれたかを確認するために、図7の同定を行った際に同定手順3で使われた平滑化推定器の時変核関数の形状を、同定対象の時変伝達関数の真値とともに図9に示す。図中、破線で示された各時刻における核関数 $\Phi^{(t)}$ の形状を、図の上方に等高線で示している。

図9より、同定対象の時変伝達関数のピーク周波数が急変する時刻近傍では、時間方向に短い核関数が自動的に選ばれており、3.4, 3.5で提案した時変核関数の構成法がうまく動作していることがわかる。時間の経過とともに核関数の周波数方向幅が狭くなる傾向にあるが、これは同定対象の時変伝達関数のピークの周波数方向幅が、ピーク周波数の低下に伴って狭くなっていることに自動的に適応した結果である。また、核関数の周波数方向幅が狭くなると周波数方向の平滑化効果が弱くなるため、同定誤差は増加することが図8から読みとれる。

5 結言

線形時変システムの時変伝達関数を同定するための手法について研究をおこなった。特に本報告では、前報⁽³⁾で提案した時変伝達関数の同定手順を実行するために必要な二種類の非定常スペクトルを、実際に観測された単一の試行データから推定するための手法について検討した。本報告では、

- (1) 単一の試行データから計算した Rihaczek 分布を時間周波数平面上で平滑化することにより、非定常スペクトルの推定をおこなった。
- (2) 平滑化のための重みを決定する核関数を、各時刻における局所的な非定常性の激しさに応じて取り替えるために、時間的に局所化された推定器を構築し、各時刻において最適な時変核関数を理論的に導いた。
- (3) 与えられた試行データからいくつかの統計量を合理的に推定することにより、最適推定器を近似的に構成する手法を提案した。
- (4) 提案した非定常スペクトル推定法を、前報⁽³⁾で提案した時変伝達関数の同定手順に適用することにより、観測された一組の入出力データからシステムの時変伝達関数を同定することができた。

本手法によって、一組の入出力データからシステムの時変伝達関数を同定することが可能になった。ここで構築した同定手法を現実の機械・構造物システムの応答データに適用することによって、これらのシステムの特長変化を監視することができると期待される。

文献

- (1) Zadeh, L. A., Frequency analysis of variable networks, *Proc. IRE*, **67**, (1950), 291-299.
- (2) Kozek, W., Feichtinger, H. G., and Scharinger, J., Gabor analysis and linear system identification, *Proc. Int. Conf. on System Identification in Engineering Systems*, (1996), 560-569.
- (3) 増田新・山本鎮男・曾根彰, 線形時変システムのノンパラメトリック同定 (第1報, 非定常スペクトル解析に基づく同定手法の基礎的検討), 日本機械学会論文集 (C) 65 巻, 634 号, (1999), pp. 2243-2250.
- (4) Martin and W., Flandrin, P., Wigner-Ville spectral analysis of non-stationary processes, *IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Processing*, **ASSP-33-6**, (1985), 1461-1470.
- (5) Amin, M., Time-frequency spectrum analysis and estimation for non-stationary processes, *Time-frequency signal analysis*, Boashash, B., Ed., (1992), 208-232, Halsted Press-Wiley.
- (6) Sayeed, A.M. and Jones, D.L., Optimal kernels for nonstationary spectral estimation, *IEEE Trans. on Signal Processing*, **SP-43-2**, (1995), 478-491.
- (7) Kozek, W. and Riedel, K., Quadratic time-varying spectral estimation for underspread processes, *Proc. IEEE Int. Symp. Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, (1994), 460-463.
- (8) F. Hlawatsch and G. F. Boudreaux-Bartels, Linear and quadratic time-frequency signal representations, *IEEE Signal Processing Magazine*, **9-2**, (1992), 21-67.
- (9) Kozek, W., *Matched Weyl-Heisenberg expansions of non-stationary environments*, PhD thesis, University of Vienna, (1996).
- (10) Mallat, S. and Zhang, Z., Matching pursuits with time-frequency dictionaries, *IEEE Trans. on Signal Processing*, **SP-41-12**, (1993), 3397-3415.