軸対称物体のすきま流れ振動*

(第 5 報, 並進・回転連成系における流体力と安定性解析および実験)

新井 正彰^{*1}, 深野 学^{*2}
倉知 元^{*3}, 田島 清瀬^{*4}Leakage-Flow-Induced Vibrations of an Axisymmetric Body
(5th Report, Analysis of the Fluid-Dynamic Forces, Theories and Experiments on
the Stabilities of the Systems Combining Translational
and Rotational Vibrations)Masaaki ARAI^{*5}, Manabu HUKANO,
Hajime KURATI and Kiyohiro TAJIMA^{*5} Tokyo University of Agriculture and Technology, Faculty of Technology,
Nakamachi 2-24-16, Koganei shi Tokyo, 184-8588 Japan

In the present paper, the fluid-dynamic forces and the moments acting on a rigid axisymmetric body, which is vibrating in coupled translational and rotational modes, are analyzed by considering turbulent skin friction. In order to test for the validity of the analysis, the stabilities of an axisymmetric body in the various tapered passages are examined theoretically and experimentally. When the flow rate of water is gradually increased, Reynolds number, frequencies and characteristics of the vibrations at stability boundary are measured in detail. In the cases of the divergent passages, the Reynolds number at dynamic instability boundaries caused by the coupled vibrations increase linearly with the increase in the natural frequencies and the slope of the increase is nearly constant independent of the tapered angles of the wall surfaces. Nondimensional critical frequencies are constant values independent of the natural frequencies. Good agreement was obtained, in general, between the theoretical values and experimental results.

Key Words: Vibration Coupled with Fluid Motion, Fluid Force, Stability, Self-Excited Vibration, Coupled Vibration, Leakage Flow

1. ま え が き

第 1 報⁽¹⁾では, テーパー環状すきま流れ内にある軸対称物体(以下, これを中心体とも呼ぶ。)が並進振動するときに中心体壁面に作用する流体力の理論解析を行った。また第 2 報⁽²⁾では, 流路形状と中心体形状をさまざまに変えて並進・1 自由度の実験を行い, 解析式の妥当性を検証した。第 3 報⁽³⁾, 4 報⁽⁴⁾では, 中心体に作用する流体力によるモーメントの解析, 支点を流路上流と下流の二種類としたときの回転 1 自由度の場合の検証実験をそれぞれ行った。支点を下流とした場合, 負減衰あるいは負剛性に起因する不安定が発生し, 理論から安定性の定量的な予測ができることを第 4 報⁽⁴⁾に示した。

すきま流れ振動において, 例えば原子炉内の制御ロッド, ディフューザ, バルブなど, 振動体が並進・回転の連成振動を行う場合がかなり多い。稲田ら⁽⁵⁾は一次元テーパすきま流れにおいて, 並進・回転 2 自由度連成系の安定性解析と実験を行い, 固有値, 固有モードおよび不安定のタイプなどについて詳細に検討している。しかしながら, 実用上問題となることの多い環状すきま流れにおいて, 連成振動を行う系の安定性について扱った報告はいまだに見受けられない。

本報では, テーパー環状すきま流れにおける中心体が連成振動を行う場合について, その壁面に作用する流体力と流体力によるモーメントならびに系の安定性に関して理論解析を行う。次に, 中心体が連成振動を行うように, その両端を互いに等しい張力で引っ張る構造とした実験装置において, 流量を漸増させながら, 系の安定限界レイノルズ数, 振動特性等を実験的に調べる。さらに実験は張力を調整して固有振動数を変えた条件でも行う。実験結果については理論値と比較, 検討して解析式の妥当性を検証する。

* 原稿受付 1999 年 3 月 18 日。

*¹ 正員, 東京農工大学工学部(☎ 184-8588 小金井市中町 2-24-16)。*² 三菱電機(株)(☎ 274-0065 鎌倉市上町屋 325)。*³ (株)村田製作所(☎ 617-8555 長岡京市天神 2-26-10)。*⁴ 正員, 早稲田大学名誉教授(☎ 242-0014 大和市上和田 2896 7)。

E mail: araims@cc.tuat.ac.jp

円筒座標系における連続の式と θ , z 軸方向の運動方程式をそれぞれ r_2 から r_1 まで積分するに際し, 乱流を考慮して圧力 p と流速 v , w は r 軸方向に一定, かつ垂直応力 σ_r , σ_θ , σ_z は圧力 ($-p$) に等しいと仮定すると, 第1報⁽¹⁾と同様の式を得る。これらの式を上式と同様に無次元化後, 式(2)を用いて線形化すると, 非定常における連続の式と運動方程式は第3報⁽³⁾と同様に次式となる。

$$\frac{\partial(\Delta G)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\Delta Q)}{\partial Z} - \frac{R_{1o}}{R_{qo}(-1)} \frac{\partial(\Delta R_1)}{\partial T} = 0 \cdots (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{R_{qo}}{R_{qo}(-1)} \frac{\partial(\Delta G)}{\partial T} + \frac{\partial(\Delta G)}{\partial Z} \\ & - \left(\frac{1}{R_{qo}} \frac{dR_{qo}}{dZ} + \frac{1}{R_{qo}} \frac{dR_{qo}}{dZ} - \frac{1}{R_{so}} \frac{dR_{so}}{dZ} \right) \Delta G \\ & = L_o^2 \frac{R_{qo} R_{qo}}{R_{so}} \left\{ -R_{qo} \frac{\partial(\Delta P)}{\partial \theta} \right. \\ & \left. + R_{2o}^2 \Delta(T_{r\theta})_2 - R_{1o}^2 \Delta(T_{r\theta})_1 \right\} \cdots \cdots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R_{qo}}{R_{qo}(-1)} \frac{\partial}{\partial T} + 2 \frac{\partial}{\partial Z} \right. \\ & \left. - \frac{2}{R_{qo}} \frac{dR_{qo}}{dZ} \right) \Delta Q + \frac{\partial(\Delta G)}{\partial \theta} \\ & + \left(\frac{R_{1o}}{R_{qo}} \frac{\partial}{\partial Z} - \frac{2R_{1o}}{R_{qo}^2} \frac{dR_{qo}}{dZ} + \frac{H_1}{R_{qo}} \right) \Delta R_1 \\ & = R_{qo} \left[-R_{qo} \frac{\partial(\Delta P)}{\partial Z} + R_{1o} \frac{dP_o}{dZ} \Delta R_1 \right. \\ & \left. + L_o \{ R_{2o} \Delta(T_{rz})_2 \right. \\ & \left. - R_{1o} \Delta(T_{rz})_1 - (T_{rz})_{1o} \Delta R_1 \right] \cdots \cdots (5) \end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned} \Delta(T_{r\theta})_i &= \Delta(\tau_{r\theta})_i / p_{co}, \quad \Delta(T_{rz})_i = \Delta(\tau_{rz})_i / p_{co} \\ R_{qo} &= R_{2o} - R_{1o}, \quad R_{qo} = (R_{2o}^2 - R_{1o}^2) / 2 \\ R_{so} &= (R_{2o}^3 - R_{1o}^3) / 3 \end{aligned}$$

式(4), (5)右辺に含まれる無次元せん断応力 $\Delta(T_{r\theta})_i$, $\Delta(T_{rz})_i$ は摩擦係数 C_f によって与えられる。また C_f は Reynolds 数 R_e の関数となるので⁽⁶⁾, 次式で与える。

$$C_f = C_k R_e^m = C_{fo} + \Delta C_f \cdots \cdots (6)$$

ここに,

$$C_{fo} = C_k R_{eo}^m, \quad \Delta C_f = m C_{fo} \Delta Q$$

$$R_{eo} = 4q_o / \{ \nu(r_{2c} + r_{1c}) \}$$

C_k : 定数

ν : 動粘性係数

なお, Reynolds 数 R_e は代表長さを $2(r_{2c} - r_{1c})$, 代表速度を流路入口の平均速度で与える。

式(2)を用いると無次元せん断応力は第3報⁽³⁾と同様となり, さらに式(6)をこれらに代入すると, $\Delta(T_{r\theta})_i$, $\Delta(T_{rz})_i$ は次式で表される。

$$\Delta(T_{r\theta})_i = \pm \frac{C_{fo}}{L_o} \frac{S_{io}^2}{B_p B_m^2} \Delta G \cdots \cdots (7)$$

$$\begin{aligned} \Delta(T_{rz})_1 &= \frac{C_{fo}}{R_{qo}^2} \left[S_{1o}^2 \left\{ \left(1 + \frac{m}{2} \right) \Delta Q + \frac{R_{1o}}{R_{qo}} \Delta R_1 \right\} \right. \\ & \left. + \frac{H_1}{L_o^2} \left\{ \frac{R_{qo}}{R_{qo}(-1)} \frac{\partial(\Delta R_1)}{\partial T} + \frac{\partial(\Delta R_1)}{\partial Z} \right\} \right] \cdots (8) \end{aligned}$$

$$\Delta(T_{rz})_2 = -\frac{C_{fo} S_{2o}^2}{R_{qo}^2} \left\{ \left(1 + \frac{m}{2} \right) \Delta Q + \frac{R_{1o}}{R_{qo}} \Delta R_1 \right\} \cdots \cdots (9)$$

ここに,

$$B_p = H_p Z + \Gamma_p, \quad B_m = H_m Z + \Gamma_m,$$

$$H_{p,m} = H_2 \pm H_1, \quad \Gamma_{p,m} = \Gamma_2 \pm \Gamma_1,$$

$$S_{io} = \sqrt{1 + (H_i / L_o)^2}$$

式(7)~(9)を式(4), (5)に代入し, 式(3)とともに整理すると $\Delta \bar{Q}$, $\Delta \bar{G}$, $\Delta \bar{P}$ の支配方程式はマトリックス表現で次式のようにになる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} d/dZ & 1 & 0 \\ 0 & d/dZ + j\Omega K_{2o} + K_{3o} & K_{4o} \\ d/dZ + j\Omega K_{2o}/2 + K_{5o} & 1/2 & K_{6o} d/dZ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{Q} \\ \Delta \bar{G} \\ \Delta \bar{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\Omega K_{1o} \\ 0 \\ j\Omega K_{7o} + K_{9o} \end{bmatrix} \Delta \bar{E} \\ & + \begin{bmatrix} j\Omega (L_{es} + L_o Z) K_{1o} \\ 0 \\ K_{8o} + (j\Omega K_{7o} + K_{9o})(L_{es} + L_o Z) \end{bmatrix} \Delta \bar{a} \cdots \cdots (10) \end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned} K_{1o} &= \frac{(H_1 Z + \Gamma_1)}{R_{qo}(-1)}, \quad K_{2o} = \frac{B_p B_m}{2R_{qo}(-1)} \\ K_{3o} &= \frac{E_{1o} Z^2 + E_{2o} Z + E_{3o}}{B_s} - \frac{3H_p H_m Z + \Gamma_c + 3\Gamma_k}{B_p B_m} \\ K_{4o} &= -3L_o^2 \frac{B_p^2 B_m^3}{4B_s} \\ K_{5o} &= \frac{[C_{fo} L_o (1 + m/2) D_{1o} - 2H_p H_m] Z}{B_p B_m} + \frac{C_{fo} L_o (1 + m/2) D_{2o} - 2\Gamma_k}{B_p B_m} \\ K_{6o} &= \frac{(B_p B_m)^2}{8}, \quad K_{7o} = -\frac{C_{fo} H_1}{L_o} \frac{H_1 Z + \Gamma_1}{2R_{qo}(-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{80} &= -(C_{fo}H_1 + L_o) \frac{H_1Z + \Gamma_1}{B_p B_m} \\
K_{90} &= 2 \frac{E_{40}Z^2 + E_{50}Z + E_{60}}{(B_p B_m)^2} - \frac{C_{fo}L_o S_{10}^2 + 2H_1}{2B_p B_m} \\
&\quad + \frac{B_p B_m (H_1Z + \Gamma_1)}{4} \frac{dP_o}{dZ} \\
B_s &= H_s Z^3 + H_r Z^2 + \Gamma_h Z + \Gamma_s, \quad H_s = H_2^3 - H_1^3 \\
H_r &= 3(H_2^2 \Gamma_2 - H_1^2 \Gamma_1) \\
\Gamma_c &= H_2 \Gamma_1 - H_1 \Gamma_2, \quad \Gamma_h = H_2 \Gamma_2 - H_1 \Gamma_1 \\
\Gamma_h &= 3(H_2 \Gamma_2^2 - H_1 \Gamma_1^2), \quad \Gamma_s = \Gamma_2^3 - \Gamma_1^3 \\
E_{10} &= 3\{H_s + (C_{fo}L_o D_{30})/2\} \\
E_{20} &= 2\{H_r + (3C_{fo}L_o D_{50})/2\} \\
E_{30} &= \Gamma_h + (3C_{fo}L_o D_{40})/2 \\
E_{40} &= 2H_p H_m H_1 - C_{fo}L_o D_{30}^* \\
E_{50} &= 2(H_p H_m \Gamma_1 + H_1 \Gamma_h - C_{fo}L_o D_{40}^*) \\
E_{60} &= 2\Gamma_h \Gamma_1 - C_{fo}L_o D_{50}^* \\
D_{10} &= H_1 S_{10}^2 + H_2 S_{20}^2, \quad D_{20} = \Gamma_1 S_{10}^2 + \Gamma_2 S_{20}^2 \\
D_{30} &= (H_1 S_{10})^2 + (H_2 S_{20})^2 \\
D_{40} &= (\Gamma_1 S_{10})^2 + (\Gamma_2 S_{20})^2 \\
D_{50} &= H_1 \Gamma_1 S_{10}^2 + H_2 \Gamma_2 S_{20}^2 \\
D_{30}^* &= (H_1 S_{10})^2 + H_1 H_2 S_{20}^2 \\
D_{40}^* &= H_1 \Gamma_1 S_{10}^2 + (H_1 \Gamma_2 + H_2 \Gamma_1) S_{20}^2 / 2 \\
D_{50}^* &= (\Gamma_1 S_{10})^2 + \Gamma_1 \Gamma_2 S_{20}^2
\end{aligned}$$

式(10)に示す連立常微分方程式の境界条件は流路入口直後と出口直前の圧力は損失係数 ξ_{in} , ξ_{ex} によって与えられ, 入口直後の旋回流を零とすると, 次式となる.

$$\Delta \bar{P}(Z) = -\frac{\xi_{in}}{R_{qo}(Z)^2} \left[\Delta \bar{Q}(Z) + \frac{\Delta \bar{R}_1(Z)}{R_{qo}(Z)} \right]_{Z=-1} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\Delta \bar{P}(Z) = -\frac{\xi_{ex}}{R_{qo}(Z)^2} \left[\Delta \bar{Q}(Z) + \frac{R_{11} \Delta \bar{R}_1(Z)}{R_{qo}(Z)} \right]_{Z=1} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\Delta \bar{G}(Z)|_{Z=-1} = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに, $\Delta \bar{R}_1(Z) = \Delta \bar{E} + (L_{es} + L_o Z) \Delta \bar{a}$

式(10)に境界条件式(11)~(13)を用いて, 第1~4報と同様にルジャンドル多項式を基底関数とするガレルキン法によって $\Delta \bar{Q}$, $\Delta \bar{G}$, $\Delta \bar{P}$ について解くと, 無次元流体力 $\Delta F_{\xi, \eta, z}$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{F}_{\xi} &= -\frac{R_{qo}^2(-1)}{2} \int_{-1}^1 \left[R_{10} \{ \Delta \bar{P} + \Delta (\bar{T}_{r\theta})_1 \} \right. \\
&\quad \left. + \frac{H_1 R_{10} \Delta (\bar{T}_{rz})_1}{L_o} + (T_{rz})_{10} \left\{ R_{10} \Delta \bar{a} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{H_1 \Delta \bar{R}_1}{L_o} \right\} \right] dZ \\
&= \{ \Lambda_{f1}(\Omega) + j \Lambda_{f2}(\Omega) \} \Delta \bar{E} \\
&\quad + \{ \Lambda_{f3}(\Omega) + j \Lambda_{f4}(\Omega) \} \Delta \bar{a} \quad \dots\dots\dots (14)
\end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
\Delta F_{\xi} &= \Delta \bar{F}_{\xi} \exp(j\Omega T) \\
&= R_{qo}^2(-1) \Delta f_{\xi} / (2\pi l_s r_{1c} p_{co})
\end{aligned}$$

$$\Delta F_{\eta} = \Delta F_z = 0$$

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{Q} &= \{ Y_{11}(Z) + j Y_{12}(Z) \} \Delta \bar{E} \\
&\quad + \{ Y_{13}(Z) + j Y_{14}(Z) \} \Delta \bar{a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{G} &= \{ Y_{21}(Z) + j Y_{22}(Z) \} \Delta \bar{E} \\
&\quad + \{ Y_{23}(Z) + j Y_{24}(Z) \} \Delta \bar{a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{P} &= \{ Y_{31}(Z) + j Y_{32}(Z) \} \Delta \bar{E} \\
&\quad + \{ Y_{33}(Z) + j Y_{34}(Z) \} \Delta \bar{a}
\end{aligned}$$

$$Y_{mk}(Z) = \sum_{n=0}^N (C_{mk})_n P_n(Z)$$

$P_n(Z)$: ルジャンドル多項式

$(C_{mk})_n$: $P_n(Z)$ の係数

同様に, 無次元モーメント $\Delta M_{\xi, \eta, z}$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{M}_{\eta} &= -\frac{R_{qo}^2(-1)}{2} \int_{-1}^1 \left[L_{ez} \left\{ R_{10} \{ \Delta \bar{P} + \Delta (\bar{T}_{r\theta})_1 + (T_{rz})_{10} \Delta \bar{a} \} + \frac{H_1 \{ R_{10} \Delta (\bar{T}_{rz})_1 + (T_{rz})_{10} \Delta \bar{R}_1 \}}{L_o} \right\} \right] dZ \\
&= \{ \Lambda_{m1}(\Omega) + j \Lambda_{m2}(\Omega) \} \Delta \bar{E} + \{ \Lambda_{m3}(\Omega) + j \Lambda_{m4}(\Omega) \} \Delta \bar{a} \quad \dots\dots\dots (15)
\end{aligned}$$

ここに,

$$\Delta M_{\eta} = \Delta \bar{M}_{\eta} \exp(j\Omega T) = R_{qo}^2(-1) \Delta m_{\eta} / (2\pi l_s r_{1c}^2 p_{co})$$

$$\Delta M_{\xi} = \Delta M_z = 0, \quad L_{ez} = L_{es} + L_o Z$$

2・2 中心体の運動方程式 流体系を含めた中心体の運動方程式は図1から, 次式で表される.

$$\begin{bmatrix} m_t & 0 \\ 0 & i_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \ddot{\xi} \\ \Delta \ddot{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_t & 0 \\ 0 & c_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{\xi} \\ \Delta \dot{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_t & k_t(l_h - l_c) \\ k_t(l_h - l_c) & k_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta f_{\xi} \\ \Delta m_{\eta} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$\Delta \xi$, Δa は調和振動を仮定しているので, 次式で与える.

$$\begin{aligned}
\Delta \xi &= \Delta \bar{\xi} \exp(j\omega t) \\
\Delta a &= \Delta \bar{a} \exp(j\omega t) \quad \dots\dots\dots (17)
\end{aligned}$$

式(17)を式(16)へ代入し, これを前項と同様に無次元化して表すと, 次式となる.

$$\left\{ - \begin{bmatrix} M_t & 0 \\ 0 & I_a \end{bmatrix} \Omega^2 + j \begin{bmatrix} C_t & 0 \\ 0 & C_a \end{bmatrix} \Omega + \begin{bmatrix} K_t & K_t(L_h - L_G) \\ K_t(L_h - L_G) & K_a \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Delta \bar{E} \\ \Delta \bar{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \bar{F}_\xi \\ \Delta \bar{M}_\eta \end{bmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

ここに,

$$M_t = m_t / (2\pi \rho l_s^3), \quad I_a = i_a / (2\pi \rho l_s^3 r_{1c}^2), \quad C_t = c_t R q_o (-1) / (2\pi \rho q_o L_o^2), \quad L_h = l_h / r_{1c} \\ C_a = c_a R q_o (-1) / (2\pi \rho l_s^2 q_o), \quad L_G = l_G / r_{1c}, \quad K_t = k_t R q_o^2 (-1) / (2\pi l_s p_{co}), \quad K_a = k_a R q_o^2 (-1) / (2\pi l_s r_{1c}^2 p_{co})$$

式(18)右辺にある $\Delta \bar{F}_\xi$, $\Delta \bar{M}_\eta$ は式(14)と式(15)により, それぞれ与えられる。そこで第1報⁽¹⁾, 第3報⁽³⁾と同じように, これらを各付加係数に分類して次式に示す。

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{F}_\xi \\ \Delta \bar{M}_\eta \end{bmatrix} = - \left\{ - \begin{bmatrix} M_{a11} & M_{a12} \\ M_{a21} & M_{a22} \end{bmatrix} \Omega^2 \right. \\ \left. + j \begin{bmatrix} C_{a11}(\Omega) & C_{a12}(\Omega) \\ C_{a21}(\Omega) & C_{a22}(\Omega) \end{bmatrix} \Omega \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} K_{a11}(\Omega) & K_{a12}(\Omega) \\ K_{a21}(\Omega) & K_{a22}(\Omega) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \Delta \bar{E} \\ \Delta \bar{\alpha} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

ここに,

$$M_{a12} = M_{a21} = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} A_{f3}(\Omega) / \Omega^2 \\ C_{a12}(\Omega) = -A_{f4}(\Omega) / \Omega, \quad C_{a21}(\Omega) = -A_{m2}(\Omega) / \Omega \\ K_{a12}(\Omega) = -A_{f3}(\Omega) + M_{a12} \Omega^2 \\ K_{a21}(\Omega) = -A_{m1}(\Omega) + M_{a21} \Omega^2$$

なお, M_{a11} , $C_{a11}(\Omega)$, $K_{a11}(\Omega)$ は第1報⁽¹⁾の M_{as} , $C_a(\Omega)$, $K_a(\Omega)$ に, また M_{a22} , $C_{a22}(\Omega)$, $K_{a22}(\Omega)$ は第3報⁽³⁾の I_{as} , $C_{aa}(\Omega)$, $K_{aa}(\Omega)$ にそれぞれ同じである。

$j\Omega$ は複素変数であるから, $\Omega = \vartheta + j\psi$ と置き, これを式(18), (19)に代入すると, 次式に示す特性方程式を得る。

$$\begin{vmatrix} A_{11}(\vartheta, \psi) & A_{12}(\vartheta, \psi) \\ A_{21}(\vartheta, \psi) & A_{22}(\vartheta, \psi) \end{vmatrix} \\ = \text{Re}(\vartheta, \psi) + j \text{Im}(\vartheta, \psi) = 0 \dots\dots\dots (20)$$

ここに,

$$A_{11}(\vartheta, \psi) = - (M_t + M_{a11}) [\vartheta + j\psi]^2 \\ + j \{ C_t + C_{a11}(\vartheta + j\psi) \} [\vartheta + j\psi] \\ + K_t + K_{a11}(\vartheta + j\psi) \\ A_{12}(\vartheta, \psi) = - M_{a12} [\vartheta + j\psi]^2 \\ + j C_{a12}(\vartheta + j\psi) [\vartheta + j\psi] \\ + K_t(L_h - L_G) + K_{a12}(\vartheta + j\psi) \\ A_{21}(\vartheta, \psi) = - M_{a21} [\vartheta + j\psi]^2 \\ + j C_{a21}(\vartheta + j\psi) [\vartheta + j\psi] \\ + K_t(L_h - L_G) + K_{a21}(\vartheta + j\psi) \\ A_{22}(\vartheta, \psi) = - (I_a + M_{a22}) [\vartheta + j\psi]^2 \\ + j \{ C_a + C_{a22}(\vartheta + j\psi) \} [\vartheta + j\psi] \\ + K_a + K_{a22}(\vartheta + j\psi)$$

式(20)を満足する ϑ , ψ を求めるために, 第4報⁽⁴⁾

と同様に, 評価関数 F_c を次式のように定義する。

$$F_c = [Re(\vartheta, \psi)]^2 + [\text{Im}(\vartheta, \psi)]^2 \dots\dots\dots (21)$$

ここで, F_c を最小にする ϑ , ψ について最適計算を行えば, 解 ϑ , ψ が求まる。系の安定性は ψ の正負によって定まり, 当然ながら負の場合は不安定となる。一方, 振動数 f は $f = \vartheta / (2\pi t_o)$ と与えられる。

2・3 中心体の振動になす仕事 連成系の場合, 1自由度系と異なり, 並進振動と回転振動が連成することによって生じる連成振動特有の動的不安定が系に発生する。そこで動的不安定を詳しく調べるため, 安定限界流量において中心体の振動一周期当たりに流体力ならびに構造系の減衰が中心体の振動になす仕事 E を求めてみる。ここで, 式(19)右辺 $\{ \}$ 内に示す付加質量, 付加減衰および付加剛性に関するマトリックスをそれぞれ $[M_a]$, $[C_a]$, $[K_a]$ と置くと, E は次式となる。

$$E = - \int_0^{2\pi/\Omega} \left\{ [\Delta E_T, \Delta \alpha_T] [M_a] \begin{bmatrix} \Delta E_{TT} \\ \Delta \alpha_{TT} \end{bmatrix} \right. \\ \left. + [\Delta E_T, \Delta \alpha_T] \left([C_a] + \begin{bmatrix} C_t & 0 \\ 0 & C_a \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Delta E_T \\ \Delta \alpha_T \end{bmatrix} \right. \\ \left. + [\Delta E_T, \Delta \alpha_T] [K_a] \begin{bmatrix} \Delta E \\ \Delta \alpha \end{bmatrix} \right\} dT = E_1 + E_2 \dots\dots (22)$$

ここに,

$$\Delta E = \Delta \bar{E} \cos(\Omega T), \quad \Delta \alpha = \Delta \bar{\alpha} \cos(\Omega T + \phi)$$

Fig. 2 Experimental apparatus for leakage flow

$$\begin{aligned}
 E_1 &= -\pi \Delta \bar{E}^2 \Omega [(C_{a11} + C_t) \\
 &\quad + \Delta \bar{\alpha}^2 (C_{a22} + C_a) / \Delta \bar{E}^2] \\
 E_2 &= -\pi \Delta \bar{E}^2 [\Delta \bar{\alpha} \{ \Omega (C_{a12} + C_{a21}) \cos(\phi) \\
 &\quad + (K_{a12} - K_{a21}) \sin(\phi) \} / \Delta \bar{E}]
 \end{aligned}$$

ただし、添字 T は無次元時間 T に関する微分を表す。

上式に示す振幅比 $\Delta \bar{\alpha} / \Delta \bar{E}$ と $\Delta \bar{E}$ に対する $\Delta \alpha$ の位相 ϕ は式(20)より容易に求まる。ここで、 E が正の場合は中心体の振動にエネルギーが供給され、系が動的に不安定となる。また E_2 が正で、かつ E が正となる場合は連成系に起因する不安定振動となる。

3. 実験装置および実験方法

従来のすきま流れ実験に関する報告⁽⁵⁾⁽⁷⁾は流体に空気を用いている場合が多いが、本報では密度や粘度が空気よりかなり大きな水を動作流体とする。すなわち配管設備は第2報⁽²⁾と同様であり、動作流体である水はサージタンク、電磁流量計を経て試験装置に流入する。

3.1 すきま流れ実験装置 図2にすきま流れ実験装置を示す。図2はすきま流路付近を表しており、その他の部分は第2報⁽²⁾と同様である。すなわち中心体は2本のワイヤロープによって上下に引張られており、その引張力は自由に変えられる。したがって構造系の固有振動数は任意に設定できる。振動数の計測は図2中にあるスプリングの上端を軽打し、中心体を自由振動させて行う。中心体の材質には固有振動数をできるだけ高くするためにジュラルミンを用いる。また、すきま流路を可視化するために外筒はアクリル樹脂で製作する。

図2の断面図A-Aに示すように、外筒には中心体の x, y 方向変位を計測するギャップセンサがすきま流路上流に2箇所取付けてあり、下流も同様である。ここに上流側の中心体変位を $\Delta x_1, \Delta y_1$ および下流側

のそれらを $\Delta x_2, \Delta y_2$ とする。つまり、これら四つの変位をギャップセンサによって測定し、図1に示す中心体の並進ならびに回転変位すなわち $\Delta \xi, \Delta \alpha$ を計測する。

表1に実験に用いたすきま流路モデルの各諸元を示す。 ν_1, ν_2 は中心体と外筒壁面が z 軸となす角度をそれぞれ表しており、 ν_1 の値によってモデルを Type 1 ~ 3 に分類する。ここで図2は Type 1 の場合を示す。表1に示す A_r は流路入口に対する出口の面積比を表すので、 $A_r = 1.1$ を除いた他のモデルは A_r が2以上の末広流路となる。流路入口における外筒半径 r_{2c} は平均して約 23.3 mm であるので、最小すきま幅は 0.8 mm である。流路 z 軸方向の長さ $2l_s$ はすべての Type において 60 mm であるから、中心体の最大回転角変位 $\Delta \alpha$ は約 0.013 rad となる。なお図1に示す支点の z 軸方向の長さ l_e は Type 1, Type 2, Type 3 でそれぞれ 30 mm, 32 mm, 29 mm となり、中心体の全長 $2l_k$ は 146 mm である。

3.2 実験方法 まず所定の Type 1~3 を選び、中心体が外筒と同心となるように取付ける。次にワイヤロープの引張力を調整し、並進における固有振動数 $(f_n)_t$ を設定値とする。また、このとき測定する自由振動波形から、回転振動における固有振動数 $(f_n)_a$ ならびに並進、回転における減衰係数比 ζ_t, ζ_a を計測する。表1に示すように、Type 1 の中心体はすべて同一であり、 $(f_n)_t$ と $(f_n)_a$ は互いに独立となる。 $(f_n)_t$ を種々に設定したときの両実測値の比 $\omega_r [= (f_n)_a / (f_n)_t]$ には多少の差異があるので、 ω_r の平均値 $\bar{\omega}_r$ を表1に示す。ここに、いずれの Type の $\bar{\omega}_r$ も 1 に近い値となっているが、これはばね定数を与えるワイヤロープが比較的長いためと考えられる。なお、以下に示す f_n はすべて $(f_n)_t$ を表し、また f_n の設定範囲は 30~45 Hz とする。 f_n を設定後、テストセクションに水を入れ、流量を約 $0.1 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ 刻みに順次増加させて行く。この過程で中心体が振動を始めたなら、流量 $2\pi q_0$ 、上流圧力 p_{in} および下流圧力 p_{ex} の定常値を FFT アナライザーで測定する。さらに変動成分 Δx_1 ,

Table 1 Details of experimental conditions

Type	ν_1 deg.	ν_2 deg.	A_r	r_{1c} mm	m_t kg	i_a $\times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$\bar{\omega}_r$
1	0	0	1.1	22.5	0.340	3.277	1.06
		1	2.7				
		2	4.3				
		3	5.8				
2	5	6	2.9	22.5	0.392	3.694	1.07
3	-2	0	3.1	22.5	0.301	3.126	1.02

Fig.3 Lissajous figure and vibratory waveforms at stability boundary

Δy_1 および Δx_2 , Δy_2 も同様に測定する。

動的安定限界付近における振動波形は図3に示すような持続振動となる。また安定限界流量は微小じょう乱による振動との混同を避けるため、流路すきま幅で決まる最大振幅の約10%の振幅となった場合とする。

4. 実験結果と計算結果の比較

本解析はすきま流れに乱流を想定しているの、計算に用いる摩擦係数 C_f は次式で与える⁽⁶⁾。

$$C_f = 2 \left[4^{1/n} \frac{n+1}{n} \frac{1}{C} \right]^{2n/(n+1)} Re^{-2/(n+1)} \dots\dots (23)$$

ここでレイノルズ数 Re が $Re \leq 10^5$ のとき、 $n=7$, $C=8.74$ と与える。 C_f が定まると、流路入口、出口の圧力損失係数 ξ_{in} および ξ_{ex} は流量 $2\pi q_0$, 圧力 p_{in} および p_{ex} の測定値から求まり、 $\xi_{in}=1.2$, $\xi_{ex}=0.0$ となる。なお、減衰係数比 ξ_t と ξ_a は各 Type とともにほぼ一定であるので、 $\xi_t=0.004$, $\xi_a=0.003$ と与える。

4.1 リサージュと振動波形 安定限界におけるリサージュと振動波形の一例を図3に示す。ただし、本図は200 Hz ローパスフィルタを用いて微小じょう乱の振動等の高周波成分を除去した測定結果である。また、この結果は図4に示す*を付した実測値に対応する。=を付した $\Delta \bar{\xi}$, $\Delta \bar{a}$ は最大振幅で除した値をそれぞれ表す。すなわち、これらは次式で与える。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{\xi} &= \Delta \xi / (r_{2c} - r_{1c}) \\ \Delta \bar{a} &= \Delta a / \tan^{-1}((r_{2c} - r_{1c}) / 2l_s) \end{aligned} \right\} \dots\dots (24)$$

$\Delta \bar{\xi}$ のリサージュから、図1に示すように ξ 軸を中心体の変位方向とする解析モデルが妥当であることがわかる。なお、 $\Delta \bar{a}$ のリサージュは $\Delta \bar{\xi}$ のそれとほとんど重なるので、割愛する。図3における振幅比 $\Delta \bar{a} / \Delta \bar{\xi}$ は0.51であり、自己相関と相互相関関数から求めた振動数 f と位相 ϕ はそれぞれ16 Hz, 170° である。一方、理論計算の結果は $\Delta \bar{a} / \Delta \bar{\xi} = 0.53$, $f = 16$

Hz および $\phi = 160^\circ$ となり、実験結果とほぼ一致する。

4.2 動的安定限界レイノルズ数 Type 1 すなわち $\alpha_1=0^\circ$ とした末広流路の場合の固有角振動数 ω_n に対する安定限界レイノルズ数 $(Re)_{cr}$ の実測値と理論値を図4に示す。ただし、 $(Re)_{cr}$ におけるレイノルズ数は式(6)下段に示す Re_o で与える。計算は式(21)で説明した Ψ に関するはさみうち法を用いて行う。系が安定から不安定に移行するとき、式(22)に示すエネルギー E はすべての場合、 E_2 が正であることに起因して正となる。すなわち、図4~6に示す理論値は連成系に起因する動的不安定限界を表している。また実測値は $f_n=30 \sim 45$ Hz に対応する ω_n の範囲にある。

図4に示す各面積比 Ar における実測値は ω_n の増大に伴ってほぼ直線的に同じこう配でそれぞれ上昇している。理論値は実測値にほぼ一致しているが、 $Ar=2.7$ の $f_n=45$ Hz および $Ar=5.8$ の $f_n=30$ Hz の場合、他と比べて差異が大き。前者の $f_n=45$ Hz の場合、 Ar の変化とともにレイノルズ数が増大して差異が大きくなることから、流量増大に伴って流路出口直後における渦を含む流れの変化による流体力の変動が最も大きくなるためであると考えられる。なお、解析

Fig. 5 Critical nondimensional frequency of Type 1

Fig. 4 Critical Reynolds number of Type 1 for ω_n

Fig. 6 Critical Reynolds number of Type 2 and Type 3 for ω_n

Fig. 7 Experimental results for $\Delta\bar{\xi}$ and $\Delta\bar{\alpha}$ at Type 1 with $A_r=1.1$

では出口直後の圧力 p_{ex} は常に一定としている。後者の $f_n=30$ Hz の場合、実測値におけるレイノルズ数は約 2300 である。一方、これが 2600 以下のとき⁽⁸⁾、摩擦係数 C_f は層流すなわち $C_f=24/R_e$ と与えられる。そこで、この場合の計算結果を一点鎖線で図 4 に示す。点線と比べて一点鎖線の方がより実測値に近くなることから、後者における差異の原因は C_f の与え方にあると考えられる。

図 5 に ω_n に対する安定限界の無次元振動数 $(\omega/\omega_n)_{cr}$ の実測値と理論値を示す。ここに各実測値は図 4 に示す実測値にそれぞれ対応する。各面積比 A_r における実測値と理論値はともに ω_n の変化に関係なくほぼ一定値となり、両者はよい一致を示している。 A_r が大きくなるのに伴って $(\omega/\omega_n)_{cr}$ は次第に上昇し、図 4 とは逆の傾向にある。これは次のように説明できる。 A_r が小さくなるとともに付加質量 M_a と付加慣性モーメント I_a が大きくなることから、 A_r が小さくなる程、 ω および $(\omega/\omega_n)_{cr}$ が小さくなる。なお、一点鎖線の場合の $(\omega/\omega_n)_{cr}$ は点線とほとんど同じである。

Type 2 と Type 3 すなわち $\nu_1=5^\circ, -2^\circ$ とした末広流路の場合の ω_n に対する安定限界レイノルズ数 $(Re)_{cr}$ の実測値と理論値を図 6 に示す。両実測値は図 4 に示す Type 1 と同様に、 ω_n の増大に伴ってほぼ直線的に上昇している。また上昇する割合も Type 1 とほぼ同じである。理論値は図 4 と比べて実測値とのよい一致を示している。また $f_n=45$ Hz の実測値の場合、Type 2 の $(Re)_{cr}$ の方が Type 3 よりも高いのにもかかわらず理論値との差異は Type 3 の方が大きい。これは Type 3 の ν_1 が負であるので、 ν_1 を正とした Type 2 よりも流路出口が中心体支柱にかなり近くにあるためである。つまり、前述の流路出口直後における流れの変化の影響は Type 2 より Type 3 の方がかなり大きくなると考えられる。

Fig. 8 Reynolds number of Type 1 with $A_r=1.1$ for ω_n at static stability boundary

なお、Type 2 と Type 3 の安定限界における無次元振動数 $(\omega/\omega_n)_{cr}$ は図 5 と同じ傾向になるので、割愛する。

4・3 静的安定限界レイノルズ数 図 7 に Type 1, $A_r=1.1$ の場合の流量変化に対する中心体の無次元並進変位 $\Delta\bar{\xi}$ ならびに回転変位 $\Delta\bar{\alpha}$ の実測値の一例を示す。本図と目視による観察から、流量を零から上げ始めると、それに伴って中心体は外筒方向に動き始め、 $\Delta\bar{\xi}$ が一定となる所で外筒壁面に定常的に付着する。この点をもって静的不安定すなわちダイバージェンス発生とみなす。また、これらの点は図 7 に黒塗印で示す。

$\Delta\bar{\xi}$ と $\Delta\bar{\alpha}$ が図 7 のようになる原因として次のことが考えられる。例えば $\Delta\bar{\xi}$ の場合、○印で示す各流量において、中心体はこれらに対応する外筒壁面手前の各位置に留まった状態にある。すなわち、これはワイヤロープの伸び等の非線形要素の影響で見掛けの剛性係数が零とはならず復元力と流体力が釣り合っているためと考えられる。なお、流量漸増に伴ってすきま流れが層流から乱流に移行する。そこで層流の場合の安定限界レイノルズ数を図 8 に一点鎖線で示す。同図から、層流のときの静的不安定は乱流のそれと比較すると、かなり少ない流量で発生することがわかる。

前述のように $\Delta\bar{\xi}$ が上昇後、定常的に外筒壁面に付着するときの流量が静的安定限界レイノルズ数 $(Re)_{cr}$ とみなされるので、図 8 に ω_n に対する $(Re)_{cr}$ の実測値と理論値を示す。なお静的不安定の場合、式(20)に示す θ の理論値は当然ながら零となる。図 8 に示すレイノルズ数の目盛は $(Re)_{cr}$ が動的安定限界のそれと比べてかなり大きくなるので、図 4, 6 よりも高く振ってある。理論値は外筒壁面付着時の実測値と定量的には多少の差異があるが、定性的にはよく一致している。また ω_n に対する $(Re)_{cr}$ のこの配は図 4, 6 に示す

動的不安定のそれとは異なり、かなり小さくなる。

5. 結 論

本研究では、テーパ環状すきま流れにおける軸対称物体が並進と回転の連成振動を行う場合について、その壁面に作用する流体力と流体力によるモーメントならびに系の安定性に関して理論解析を行った。また流体力の解析は現実の流れに則した乱流抵抗が剛体としたときの軸対称物体に作用する場合を想定して行った。次に、軸対称物体が連成振動を行うように、その両端をワイヤロープで引っ張れる構造としたすきま流れ実験装置において、系の振動特性、安定限界レイノルズ数等を実験的に調べ、解析式の妥当性を検証した。

中心体壁面あるいは外筒壁面テーパ角度を種々に変えて流路入口に対する出口の面積比を約2以上の末広流路とした場合、連成系に起因する動的不安定が系に発生した。また固有角振動数変化に対する動的安定限界レイノルズ数の実測値はテーパ角度に関係なく、ほぼ直線的かつ同一直線配で上昇し、本理論計算によって実測値を満足に説明できることがわかった。なお、本実験系において、すべての場合の動的不安定は連成系に起因して発生した。

固有角振動数 ω_n の変化に対する無次元安定限界振動数 $(\omega/\omega_n)_{cr}$ の実測値は ω_n に関係なく一定値とな

り、理論値は実測値と定量的にもよい一致を示した。また面積比が大きくなると付加質量および慣性モーメントが小さくなることから、面積比が大きくなるのに伴って $(\omega/\omega_n)_{cr}$ は上昇する。

面積比が約1の場合の系には静的不安定が発生した。しかしながら、中心体は次のような挙動を示す。流量を零から上げ始めると、中心体は外筒方向への移動を開始し、その後、壁面に定常的に付着する。ここに静的安定限界レイノルズ数 $(Re)_{cr}$ は壁面付着時の流量とみなせる。また、固有角振動数に対する $(Re)_{cr}$ の上昇こう配は動的な場合と異なり、かなり小さくなる。理論値はこれを定性的によく説明できることがわかった。

文 献

- (1) 新井正彰・田島清瀬, 機論, **57**-536, C (1991), 1113-1121.
- (2) 新井正彰・宮脇誠・田島清瀬, 機論, **62**-600, C (1996), 3046-3053.
- (3) 新井正彰・田島清瀬, 機論, **63**-612, C (1997), 2601-2607.
- (4) 新井正彰・塩見英一・田島清瀬, 機論, **63**-612, C (1997), 2608-2615.
- (5) 稲田文夫・葉山真治, 機論, **55**-511, C (1989), 627-635.
- (6) Mateescu, D., Paidoussis, M. P. and Belanger, F., *J. Sound and Vibration*, **135**-3 (1989), 487-498.
- (7) Mateescu, D., Paidoussis, M. P. and Belanger, F., *J. Fluids and Structures*, **2** (1988), 615-628.
- (8) 下山美徳・山田豊, 機論, 第3部, **23**-125 (1957), 44-49.