畳み込み積分による非線形系の定常振動解析*

岩田 佳雄^{*1}, 竹田 真樹^{*2}, 佐藤 秀紀^{*1}
小松崎 俊彦^{*1}, 車 古英治^{*3}Analysis on Steady-State Vibration of Nonlinear System
by Convolution IntegralYoshio IWATA^{*4}, Masaki TAKEDA, Hidenori SATO,
Toshihiko KOMATSUZAKI and Eiji SHAKO^{*4} Kanazawa University, Dept. of Human and Mechanical Systems Engineering,
Kodatsuno 2-40-20, Kanazawa, Ishikawa, 920-8667 Japan

A method for analyzing steady state vibration of a system with localized nonlinear springs by convolution integral is proposed. Scale of the nonlinear problem can be reduced by using localization of the nonlinear springs in the method. First, equation of motion with the convolution integral of nonlinear restoring force which is treated as an external force is made, second, a set of nonlinear algebraic equations on discrete-time history of unit period is derived and finally the nonlinear algebraic equations is solved with the harmonic balance method. Stable and unstable condition of the steady state vibration can be distinguished by the present method and the impulse response required can be also measured in the experiment because of the merit of the convolution integral. Two examples are shown and the validity of the method is discussed in comparison with Runge-Kutta-Gill method or the experiment.

Key Words: Nonlinear Vibration, Forced Vibration, Convolution Integral, Steady-State Vibration, Stability

1. 緒 論

局所的に非線形ばねを持つ系に対する畳み込み積分を用いた過渡振動解析法を以前に著者らは報告⁽¹⁾している。本報においては畳み込み積分による定常振動の解析法を提案する。機械構造物における非線形ばねなどの非線形要素は構造物の支持点や連結点に存在することが多く、このような非線形系に対しては伝達関数やインパルス応答を使用した解析法が有効である。これは、非線形要素の結合点のみに関する運動方程式を解くことに非線形問題が縮小され、非線形問題の大きさが系の自由度とは無関係になるからである。さらに系が実際に存在すれば、伝達関数やインパルス応答は実験から測定することができ、減衰のモデル化が容易になるなどの利点がある。Renら⁽²⁾は伝達関数を使用して周波数領域における運動方程式を作成し、これを摂動型調和バランス法を適用して定常振動を解析する方法を述べている。しかしこの方法では定常振動解の安定・不安定を判別することが不可能であり、この点がこの種の方法の欠点になっている。

インパルス応答を使用した畳み込み積分による方法では、Hagedornら⁽³⁾が局所的に非線形ばねを持つ系に対する方法、著者ら⁽¹⁾はそれを拡張した非線形部分構造法的手法を提案しているが、畳み込み積分の性質上、これらの方法は過渡振動の解析に適用されるのが一般的である。しかし本報では畳み込み積分による定常振動解析法を提案し、畳み込み積分が過渡振動の解析に適していることを利用して定常振動解の安定判別を可能にしたことを報告する。

2. 局所的に非線形ばね支持された系の応答

2.1 局所的に非線形ばね支持された系 本報で提案する方法は局所的に非線形ばねを持つ系の振動解析に有効なものである。局所的に非線形ばねを持つ系とは、ばね質量系を例として挙げれば、図1のように質量の1カ所または数カ所が非線形ばね支持されている系、もしくは数カ所において質量と質量が非線形ばね結合されている系を示す。以下では簡単のために前

Fig. 1 Multi-degree-of-freedom nonlinear system

* 原稿受付 1999年5月19日。

^{*1} 正員, 金沢大学工学部 (☎ 920-8667 金沢市小立野2-40-20)。^{*2} 准員, 光洋精工(株) (☎ 542-8502 大阪市中央区南船場3-5-8)。^{*3} 富士通(株) (☎ 100-0005 東京都千代田区丸の内1-6-1)。

E-mail: iwata@t.kanazawa-u.ac.jp

者を対象として説明する。図1において m_p は外力 $f(t)$ の作用する質量、 m_q は非線形ばね支持された質量、 m_r は応答を求める対象の質量を示し、 m_q と m_r の変位をそれぞれ x 、 y で表す。 $g(x)$ は非線形ばねの復原力特性を表す関数である。後に調和外力の作用する系の定常振動を考えるので、 $f(t)=F\sin\omega t$ とする。

2.2 過渡振動解析 畳み込み積分を用いた過渡振動解析についてはHagedornら⁽³⁾や著者ら⁽¹⁾によって報告されているが、後の定常振動解析の基礎となるものなので、ここに概略を述べる。非線形ばね支持された m_q に対し、それに作用する非線形復原力 $g(x)$ を外力とみなすことにより、 m_q の変位 x と m_r の変位 y は次式の畳み込み積分によって求められる⁽⁴⁾。

$$x(t) = \int_0^t h^{qp}(t-\tau)f(\tau)d\tau - \int_0^t h^{qq}(t-\tau)g\{x(\tau)\}d\tau \quad (1)$$

$$y(t) = \int_0^t h^{rp}(t-\tau)f(\tau)d\tau - \int_0^t h^{rq}(t-\tau)g\{x(\tau)\}d\tau \quad (2)$$

ただし、 $h^{ab}(t)$ ($a=q, r, b=p, q$)は非線形ばね $g(x)$ を取り除いた系のインパルス応答を表し、上付き添字の a は応答点、 b は加振点を示す。初期変位と初期速度はともにゼロとする。式(1)は非線形ばね支持点に関する運動方程式であり、この点においてのみ非線形になるが、その他の点の応答は式(1)から得られた $x(t)$ を代入することにより線形的に計算することができる。式(1)と式(2)を離散化して表すと次のようになる。

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} h_{n-k}^{qp} f_k \Delta t - \sum_{k=0}^{n-1} h_{n-k}^{qq} g(x_k) \Delta t \quad (3)$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{n-1} h_{n-k}^{rp} f_k \Delta t - \sum_{k=0}^{n-1} h_{n-k}^{rq} g(x_k) \Delta t \quad (4)$$

Δt は離散化のための時間間隔であり、 $t=n\Delta t$ 、 $\tau=k\Delta t$ として離散化を行った。下付き添字は時刻を表し、 x_n は $t=n\Delta t$ における応答変位を示す。式(3)と式(4)は、式(1)と式(2)の積分を区分別積法を用いて数値積分した結果に一致する。著者らの前報⁽¹⁾においては過渡振動応答の計算精度向上のために台形則を用いて数値積分を行ったが、本報で提案する定常振動解析においては周期解を仮定する都合上、区分別積法による離散化を採用する。 $x_0=0$ を含め、式(3)を行列によって表現すると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0^{qp} & 0 & \cdots & 0 \\ h_1^{qp} & h_0^{qp} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ h_n^{qp} & h_{n-1}^{qp} & \cdots & h_0^{qp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \Delta t - \begin{bmatrix} h_0^{qq} & 0 & \cdots & 0 \\ h_1^{qq} & h_0^{qq} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ h_n^{qq} & h_{n-1}^{qq} & \cdots & h_0^{qq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_n) \end{Bmatrix} \Delta t \quad (5)$$

$h_0^{qp}=h_0^{qq}=0$ なので、式(5)により x_n は $x_0 \sim x_{n-1}$ から算出され、 n を順次増やすことによって前進代入的に非線形ばね支持点の応答を求めることができる。非線形ばね支持点以外の応答は得られた $x_0 \sim x_{n-1}$ を式(4)に代入することによって簡単に計算できる。

2.3 定常振動解析 系に作用する外力の周期性を考え、式(5)において応答 x と外力 f を外力周期毎に区切って表すと次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0^{qp} & 0 & \cdots & 0 \\ h_1^{qp} & h_0^{qp} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ h_n^{qp} & h_{n-1}^{qp} & \cdots & h_0^{qp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f \\ f \\ \vdots \\ f \end{Bmatrix} \Delta t - \begin{bmatrix} h_0^{qq} & 0 & \cdots & 0 \\ h_1^{qq} & h_0^{qq} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ h_n^{qq} & h_{n-1}^{qq} & \cdots & h_0^{qq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_n) \end{Bmatrix} \Delta t \quad (6)$$

ここに下付き添字は経過周期数を示す。周期外力の1周期を M 等分とすると、 x_i と f は M 個の成分からなる列ベクトル、 $g(x_i)$ は M 個の復原力 $g(x_i)$ からなる列ベクトル、 h_i^{ab} はインパルス応答からなる $M \times M$ の行列になり、以下のように表される。

$$x_i = \begin{Bmatrix} x_{i \times M} \\ x_{i \times M+1} \\ \vdots \\ x_{(i+1)M-1} \end{Bmatrix}, \quad f = F \begin{Bmatrix} \sin 2\pi \frac{0}{M} \\ \sin 2\pi \frac{1}{M} \\ \vdots \\ \sin 2\pi \frac{M-1}{M} \end{Bmatrix}, \quad g(x_i) = \begin{Bmatrix} g(x_{i \times M}) \\ g(x_{i \times M+1}) \\ \vdots \\ g(x_{(i+1)M-1}) \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$h_0^{ab} = \begin{bmatrix} h_0^{ab} & 0 & \cdots & 0 \\ h_1^{ab} & h_0^{ab} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ h_{M-1}^{ab} & h_{M-2}^{ab} & \cdots & h_0^{ab} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$h_i^{ab} = \begin{bmatrix} h_{i \times M}^{ab} & \cdots & h_{(i-1)M+1}^{ab} \\ h_{i \times M+1}^{ab} & h_{i \times M}^{ab} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{(i+1)M-1}^{ab} & h_{(i+1)M-2}^{ab} & \cdots & h_{i \times M}^{ab} \end{bmatrix} \quad (i \geq 1) \quad (9)$$

式(6)において x_0 、 x_1 などは過渡振動の時刻歴応答を外力1周期分に分割した応答ベクトルで、それぞれ異なるベクトルになる。しかし十分に時間が経過した後は、系の応答は定常振動に収束すると考えられるので、定常振動1周期からなるベクトルを x と置き、収束したときの畳み込み積分の状態を表すと次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & h_0^{qp} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & h_1^{qp} & h_0^{qp} & 0 \\ \vdots & h_i^{qp} & \ddots & h_0^{qp} & 0 \\ h_{i+1}^{qp} & h_i^{qp} & \ddots & h_0^{qp} & f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f \\ f \\ \vdots \\ f \\ f \end{Bmatrix} \Delta t - \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & h_0^{qq} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & h_1^{qq} & h_0^{qq} & 0 \\ \vdots & h_i^{qq} & \ddots & h_0^{qq} & 0 \\ h_{i+1}^{qq} & h_i^{qq} & \ddots & h_0^{qq} & g(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g(x) \\ g(x) \\ \vdots \\ g(x) \\ g(x) \end{Bmatrix} \Delta t \quad (10)$$

系に減衰が存在するならば、インパルス応答 $h^{ab}(t)$ は時間が十分に経過するとゼロに収束する。そこで周期外力の N 周期経過後においてはインパルス応答をゼロとみなし、すなわち $h_i^{ab}=0$ ($i \geq (N-1)M+1$) とするならば、 $h_N^{ab}=h_{N+1}^{ab}=\cdots=0$ になる。したがって式(10)の最下行を展開することによって次式が得られる。

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}^{qp} \mathbf{f} - \mathbf{H}^{qq} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (11)$$

ここに $\mathbf{H}^{ab}$ は次の式で与えられる。

$$\mathbf{H}^{ab} = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{h}_i^{ab} \Delta t \quad (12)$$

N については次の条件を満たす i のうちで最小のものを採用する。

$$\frac{\sqrt{\sum_{k=i \times M}^{(i+1)M-1} (h_k^{ab})^2}}{\sqrt{\sum_{k=0}^{i \times M-1} (h_k^{ab})^2}} \leq \varepsilon = 10^{-5} \quad (13)$$

すなわち各インパルス応答の外力 $(i+1)$ 周期目のみの応答の大きさ (自乗和の平方根) と i 周期までの応答の大きさの比が ε 以下になる最初の経過周期数を N とした。したがって h_i^{qp} と h_i^{qq} に対する N は異なる。後の計算例においては $\varepsilon = 10^{-5}$ とした。 y に関しても y を定常振動応答 1 周期の列ベクトルとし、同様の手順によって次式が得られる。

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}^{rp} \mathbf{f} - \mathbf{H}^{rq} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (14)$$

式(11)を解いて $\mathbf{x}$ を求めれば $\mathbf{x}$ の定常振動 1 周期分に対する時刻歴応答が得られ、それを式(14)に代入して y の 1 周期分の時刻歴応答が得られる。しかし式(11)は M 元連立の非線形代数方程式となり、解を求めることは簡単ではない。そこで調和バランス法を使用して近似的に解く方法を以下に述べる。

式(11)の解を調和外力の振動数成分のみからなると仮定し、次のようにする。

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_x \mathbf{S} + \mathbf{B}_x \mathbf{C} \quad (15)$$

ここに $\mathbf{S}$ と $\mathbf{C}$ はそれぞれ $\sin$ と $\cos$ の 1 周期を M 等分したもののからなる次のような列ベクトルである。

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sin 2\pi \frac{0}{M} \\ \sin 2\pi \frac{1}{M} \\ \vdots \\ \sin 2\pi \frac{M-1}{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos 2\pi \frac{0}{M} \\ \cos 2\pi \frac{1}{M} \\ \vdots \\ \cos 2\pi \frac{M-1}{M} \end{bmatrix} \quad (16)$$

式(7)より $\mathbf{f} = \mathbf{F}\mathbf{S}$ なることを考慮し、式(15)を式(11)に代入すると次式になる。

$$\mathbf{A}_x \mathbf{S} + \mathbf{B}_x \mathbf{C} = \mathbf{H}^{qp} \mathbf{F}\mathbf{S} - \mathbf{H}^{qq} \mathbf{g}(\mathbf{A}_x \mathbf{S} + \mathbf{B}_x \mathbf{C}) \quad (17)$$

式(17)の左から $\mathbf{S}$ の転置ベクトル $\mathbf{S}^T$ を掛けることによって両辺の $\mathbf{S}$ に関する係数を等しく置いた式が得られ、次のようになる。

$$\frac{M}{2} \mathbf{A}_x = \mathbf{F}\mathbf{S}^T \mathbf{H}^{qp} \mathbf{S} - \mathbf{g}_s^{qq}(\mathbf{A}_x, \mathbf{B}_x) \quad (18)$$

同様に式(17)の左から $\mathbf{C}^T$ を掛けることによって次式が得られる。

$$\frac{M}{2} \mathbf{B}_x = \mathbf{F}\mathbf{C}^T \mathbf{H}^{qp} \mathbf{S} - \mathbf{g}_c^{qq}(\mathbf{A}_x, \mathbf{B}_x) \quad (19)$$

ただし $\mathbf{g}_s^{qq}$ と $\mathbf{g}_c^{qq}$ は次のように $\mathbf{A}_x$ と $\mathbf{B}_x$ の関数を表す。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{g}_s^{qq}(\mathbf{A}_x, \mathbf{B}_x) &= \mathbf{S}^T \mathbf{H}^{qq} \mathbf{g}(\mathbf{A}_x \mathbf{S} + \mathbf{B}_x \mathbf{C}) \\ \mathbf{g}_c^{qq}(\mathbf{A}_x, \mathbf{B}_x) &= \mathbf{C}^T \mathbf{H}^{qq} \mathbf{g}(\mathbf{A}_x \mathbf{S} + \mathbf{B}_x \mathbf{C}) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式(18)と式(19)を $\mathbf{A}_x$ と $\mathbf{B}_x$ について解くことにより式(15)の解が得られ、ゆえに x に関する定常振動解の $\sin \omega t$ と $\cos \omega t$ の各振幅が決定される。

式(14)についても、

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}_y \mathbf{S} + \mathbf{B}_y \mathbf{C} \quad (21)$$

と置き、式(14)にこれを代入して左から $\mathbf{S}^T$ または $\mathbf{C}^T$ を掛けることによって次の 2 式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{2} \mathbf{A}_y &= \mathbf{F}\mathbf{S}^T \mathbf{H}^{rp} \mathbf{S} - \mathbf{g}_s^{rq}(\mathbf{A}_x, \mathbf{B}_x) \\ \frac{M}{2} \mathbf{B}_y &= \mathbf{F}\mathbf{C}^T \mathbf{H}^{rp} \mathbf{S} - \mathbf{g}_c^{rq}(\mathbf{A}_x, \mathbf{B}_x) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{g}_s^{rq}(\mathbf{A}_x, \mathbf{B}_x) &= \mathbf{S}^T \mathbf{H}^{rq} \mathbf{g}(\mathbf{A}_x \mathbf{S} + \mathbf{B}_x \mathbf{C}) \\ \mathbf{g}_c^{rq}(\mathbf{A}_x, \mathbf{B}_x) &= \mathbf{C}^T \mathbf{H}^{rq} \mathbf{g}(\mathbf{A}_x \mathbf{S} + \mathbf{B}_x \mathbf{C}) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

すでに得られた $\mathbf{A}_x$ と $\mathbf{B}_x$ を式(22)に代入することによって簡単に $\mathbf{A}_y$ と $\mathbf{B}_y$ が求められ、 y に関する定常振動解が決定される。

2. 4 安定判別法 前節において式(11)から定常解を求めたが、周期解を仮定しているために不安定な解も求められる。以下では得られた定常解の安定性を判別する方法について述べるが、畳み込み積分を使用して過渡振動解析を行うことによって可能にしている。

解の安定性を判別するためには、求められた定常解を初期状態とし、時間が経過した後の応答を調べればよい。初期の定常状態から発散して別の定常解へ収束するようであればその解は不安定な解であると判定できる。定常解からの過渡応答を求めるには、式(10)において一旦収束した定常解に対し、2.2節で述べた過渡振動計算を実行すれば可能である。便宜上式(10)と同様に外力周期毎に区切って表すと次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_i \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{N'-1}^{qp} & \cdots & \mathbf{h}_0^{qp} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{h}_{N'-1}^{qp} & \cdots & \mathbf{h}_0^{qp} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{h}_{N'-1}^{qp} & \cdots & \mathbf{h}_0^{qp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{f} \\ \vdots \\ \mathbf{f} \\ \vdots \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} \Delta t \\ &\quad - \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{N'-1}^{qq} & \cdots & \mathbf{h}_0^{qq} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{h}_{N'-1}^{qq} & \cdots & \mathbf{h}_0^{qq} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{h}_{N'-1}^{qq} & \cdots & \mathbf{h}_0^{qq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_i) \end{Bmatrix} \Delta t \end{aligned} \quad (24)$$

式(24)を展開した 1 行目の式は式(11)に等しく、定常解 $\mathbf{x}$ はすでに式(15)の形で求められているものである。過渡応答計算は 2 行目の $\mathbf{x}_1$ 以降について行い、 $\mathbf{h}_0^{qq}$ の対角項がゼロであることから $\mathbf{x}_i$ の列ベクトルを構成する時刻歴応答は 2.2節と同様に前進代入的に計算すること

とができる。得られた*i*周期目の応答 x_i の $\sin\omega t$ と $\cos\omega t$ の各係数 A'_x と B'_x を次式から計算する。

$$A'_x = \frac{2}{M} S^T x_i, \quad B'_x = \frac{2}{M} C^T x_i \quad (25)$$

そして定常解の A_x と B_x と比較し、次の式を満足するときこの定常解は安定であるとする。

$$\frac{\sqrt{(A_x - A'_x)^2 + (B_x - B'_x)^2}}{\sqrt{A_x^2 + B_x^2}} \leq \frac{1}{10} \quad (26)$$

すなわち、 A_x と A'_x の差、および B_x と B'_x の差の両方が小さいときに安定とする。式(26)右辺のように条件を比較的緩くしたのは、 A_x と B_x は調和バランス法による近似解であるのに対し、式(24)の過渡振動計算から得られる x_i は高調波成分を含んだ厳密解となり、両者の解の差が大きくなる場合が考えられるからである。式(24)の右辺第1項中の N' と第2項中の N のうち大きい方を N とすると、安定判別における過渡応答計算は $N/4$ 周期後には収束していることが認められたので、後の計算例では $N/4$ 周期目の応答を使用し、安定判別を行った。なお本安定判別法は、調和バランス法によって得られた周期解からの時刻歴応答を単純に追う方法なので、不安定解に伴う分岐現象についての定性的な情報を得ることはできない。また、安定不安定の判定が微妙になり得る場合も考えられ、そのときには近傍の安定不安定の状況と応答曲線の形状によって判定するか、または近似周期解からの時刻歴応答を詳しく追跡する必要がある。

3. 3自由度ばね質量系に対する計算

図2の3自由度ばね質量系に対する計算例を示す。正弦波外力は m_1 に作用し、 m_2 が非線形ばねで支持されている。非線形ばね特性については $g(x) = \beta x^3$ とする。計算例に使用したパラメータ値を表1に示す。 m_1 、 m_2 、 m_3 のすべてに関して応答を求めるので、結局2章において $p=1$ 、 $q=2$ 、 $r=1, 2, 3$ とすればよい。インパルス応答は多自由度減衰系の自由振動に関するモード解析から、各質量に初期速度を与えることによって導いた。式(18)と式(19)に相当する A_x と B_x の連立方程式は次のようになる(付録参照)。

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{2} A_x &= F\alpha_1^{qp} - \frac{3}{4}\beta(A_x^2 + B_x^2)(A_x\alpha_1^{qq} + B_x\alpha_2^{qq}) \\ \frac{M}{2} B_x &= -F\alpha_2^{qp} + \frac{3}{4}\beta(A_x^2 + B_x^2)(A_x\alpha_2^{qq} - B_x\alpha_1^{qq}) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ただし α_1^{ab} 、 α_2^{ab} は次式で定義されるものである。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^{ab} &= S^T H^{ab} S = C^T H^{ab} C \\ \alpha_2^{ab} &= S^T H^{ab} C = -C^T H^{ab} S \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ここで $A_x = X \cos\theta$ 、 $B_x = X \sin\theta$ と置くならば式(27)は次のように変換できる。

$$\begin{aligned} &\frac{9}{16}((\alpha_1^{qp})^2 + (\alpha_2^{qp})^2)\beta^2 X^6 + \frac{3}{4}\beta M \alpha_1^{qq} X^4 \\ &+ \frac{M^2}{4} X^2 - F^2((\alpha_1^{qp})^2 + (\alpha_2^{qp})^2) = 0 \end{aligned} \quad (29a)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-2MX\alpha_2^{qp} + 3\beta X^3(\alpha_2^{qq}\alpha_1^{qp} - \alpha_1^{qq}\alpha_2^{qp})}{2MX\alpha_1^{qp} + 3\beta X^3(\alpha_1^{qq}\alpha_1^{qp} + \alpha_2^{qq}\alpha_2^{qp})} \right) \quad (29b)$$

式(29a)の X^2 についての3次方程式を解くことにより m_2 の振幅 X 、式(29b)から位相 θ が求められる。さらに m_1 、 m_3 の各応答は $A_x = X \cos\theta$ と $B_x = X \sin\theta$ を式(22)に代入してそれぞれ計算することができる。1周期の分割数 $M=50$ とし、 m_1 、 m_2 、 m_3 についての振幅曲線と位相曲線を求めた結果を図3に示す。実線は畳み込み積分によって得られた定常解の振幅、○印はRKG法から得られた定常解の振幅である。振幅については実効値で表してある。畳み込み積分とRKG法による結果はよく一致している。 m_2 の定常解に対し安定性を判別した結果を図4に示す。○が安定、●が不安定を示す。RKG法からは得られなかった不安定と予想される部分については不安定解として判別されているのがわかる。

図2の系についてその微分形式の非線形運動方程式に調和バランス法を直接適用する場合、6元の非線形連立方程式を解く必要がある。それに対し本手法を用いれば、インパルス応答を求めるという手間はあがるが、2元の非線形連立方程式に縮小することができるので、カルダノ法を用いて簡単に応答を求めることができる。通常は式(18)と式(19)についてニュートン・ラプソン法を用いて解けばよいが、ここではカルダノ法を使用する目的で式(27)~(29b)を導いてみた。

Fig. 2 Three-degree-of-freedom nonlinear system

Table.1 Parameter of System

Mass (kg) m_1, m_2, m_3	1.0, 2.0, 3.0
Damping Coefficient (Ns/m) c_1, c_2, c_3, c_4	1.0, 1.0, 1.0, 1.0
Spring Constant (N/m) k_1, k_2, k_3, k_4	1000, 1000, 1000, 1000
Non-Linear Spring Constant (N/m ³) β	1.0×10^8
Amplitude of Excitation (N) F	1.0

 (a) Response of m_1

 (b) Response of m_2

 (c) Response of m_3

Fig. 3 Response curves of three-degree-of-freedom system

4. はり系に対する実験と計算

畳み込み積分を利用した振動解析においては必ずしも物理モデルを作成する必要がない。系の実物が存在するならば実験から測定されたインパルス応答を用いることができる。以下では非線形ばね支持部を持つはり系に対し、実測されたインパルス応答を用いて振動解析を行った例を挙げる。実験に使用したはり系を図

Fig. 4 Result of stable and unstable vibration

5に示す。はり幅25mm、厚さ1.5mmで、長さ385mmの一端が固定、他端がゴム支持されている。ゴム部から105mmのところにはガタを持ってコイルばねを設定し、これを非線形ばねとした。固定端から115mmのところに偏心質量を持つモータを取り付け、この不釣り合いによって調和外力をはりに作用させた。応答は固定端から180mmの箇所においてレーザ変位計により測定した。図1と対応させると、モータ固定点がp点、コイルばね支持点がq点、レーザ変位計による応答測定点がr点になる。インパルスハンマと加速度センサを使って4つのコンプライアンス $G^{qp}(\omega)$ 、 $G^{qq}(\omega)$ 、 $G^{rp}(\omega)$ 、 $G^{rq}(\omega)$ を測定し、次式に示す一般粘性減衰系を仮定したコンプライアンスの式⁽⁵⁾でカーブフィットした。

$$G(\omega) = \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{U_i + iV_i}{j(\omega - \omega_{di}) + \sigma_i} + \frac{U_i - iV_i}{j(\omega + \omega_{di}) + \sigma_i} \right\} - \frac{1}{\omega^2 S} \quad (30)$$

250Hz以下のコンプライアンスを測定し、3次モードまでを考慮したカーブフィットを行った。一例として $G^{qp}(\omega)$ と $G^{qq}(\omega)$ の測定結果とカーブフィット結果を図6に示す。得られたモーダルパラメータ ω_{di} 、 σ_i 、 U_i 、 V_i からインパルス応答は次のようになる⁽⁵⁾。

$$h(t) = 2 \sum_{i=1}^3 e^{-\sigma_i t} (U_i \cos \omega_{di} t - V_i \sin \omega_{di} t) \quad (31)$$

カーブフィットにおいて考慮した剰余質量 S は無視した。一方、非線形復元力はガタを Δx 、コイルばねのばね定数を k とするならば次のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} -\Delta x \leq x \leq \Delta x & \text{ のとき } g(x) = 0 \\ x > \Delta x & \text{ のとき } g(x) = k(x - \Delta x) \\ x < -\Delta x & \text{ のとき } g(x) = k(x + \Delta x) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ここに $\Delta x = 0.2\text{mm}$ 、 $k = 11.6\text{kN/m}$ である。

非線形復元力がゼロ、すなわちコイルばねが無い場合の応答曲線を図7に示す。縦軸は実効値である。■は実験による測定点で、モータの回転数を上げながら測定した。モータ全体の不釣り合いは未知なので、図7の実験結果に合うように不釣り合いを求めた結果、

46.2gmmとなった。そのときの畳み込み積分による解析結果を実線で示す。ここに1周期の分割数 M を50と

Fig. 5 Experimental system of beam and coil springs

Fig. 6 Compliance of $G^{qp}(\omega)$ and $G^{qq}(\omega)$

Fig. 7 Response curves of linear system

Fig. 8 Response curves of nonlinear system

した。両者はよく一致しているので、同定されたインパルス応答は妥当なものであると考えられる。非線形復元力を考慮した場合の解析結果と実験結果を図8に示す。ピーク付近でのジャンプ現象を予想し、モータの回転数を上げた場合と下げた場合を測定した。ピーク付近での振幅の大きさは多少異なるが、実験と畳み込み積分による結果はほぼ一致している。ピーク付近の不一致の原因としてはガタの測定精度、3次モードでの打ち切りの影響などが考えられる。なお実験においてはモータパワーの影響により実験値のピーク付近で回転数のジャンプ現象が起きているが、畳み込み積分による解析結果はすべて安定解となった。

5. 計算精度の検討

提案した畳み込み積分による定常振動解析法の計算精度を検討する。精度に影響を及ぼす要因として、畳み込み積分の離散化及びインパルス応答の打ち切りの2つが考えられる。前者は周期外力1周期分の分割数 M 、後者はインパルス応答をゼロとみなす判定式(13)の ε のことである。そこで M と ε による計算精度の変化を調べた。計算対象とした系は次式の無次元化されたDuffing系である。

$$\ddot{x} + 2\zeta \dot{x} + x + \beta x^3 = \sin \omega t \quad (33)$$

式(33)の解を基本調波だけを考慮して次のように置く。

$$x = A_H \sin \omega t + B_H \cos \omega t \quad (34)$$

式(34)を式(33)に代入し、調和バランス法を使用して得た応答曲線を図9に示す。ただし、 $\zeta=0.02$ 、 $\beta=0.01$ とした。図9中の $\omega=1.5$ における○の振幅値について畳み込み積分から得た式(15)の A_x 、 B_x 、それらと式(34)の調和バランス法による A_H 、 B_H との差を次の式で評価した。

$$E = \frac{\sqrt{(A_H - A_x)^2 + (B_H - B_x)^2}}{\sqrt{A_H^2 + B_H^2}} \times 100 [\%] \quad (35)$$

Fig. 9 Response curve of Duffing system by harmonic balance method ($\zeta=0.02$, $\beta=0.01$)

Table 2 Error(%) of convolution and harmonic balance method with respect to M and ε

	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-5}$	$\varepsilon = 10^{-6}$
$M=25$	0.237	0.892	0.902
$M=50$	0.490	0.215	0.226
$M=100$	0.658	0.0448	0.00555

種々の M と ε について E を計算した結果を表 2 に示す。 M が大きくかつ ε が小さくなれば解の精度はよくなる。その一方で、 $\varepsilon = 10^{-4}$ のときには M が大きくなるにつれて逆に誤差が大きくなっている。畳み込み積分による解法では式(11)に調和バランス法を適用して近似的な定常振動解を求めているが、 ε が大きな場合には式(11)中の $\mathbf{H}^{ap}$ と $\mathbf{H}^{aq}$ の収束状態が悪く、式(11)の本来の解 $\mathbf{x}$ は定常振動解とは若干違う解になる。今の場合、 M が小さいときに偶然にも定常振動解に近い解が求められただけであり、実際は M が大きくなるにつれてこの違う解に収束したものと考えている。 $\varepsilon = 10^{-5}$ と $\varepsilon = 10^{-6}$ の場合には、 M が大きくなれば精度も上がっており、 ε については $\varepsilon = 10^{-5}$ でほぼ収束しているものとみなせる。 $M=25$ と $M=50$ のときには $\varepsilon = 10^{-5}$ に比べ $\varepsilon = 10^{-6}$ の誤差が微小に大きくなっているが、数値計算上の丸めの誤差であると考えられる。このように M と ε は互いに関連し合っており、適切に選ぶ必要がある。前述の計算例では応答曲線の計算時間の関係で $M=50$ 、 $\varepsilon = 10^{-5}$ を採用したが、これでほぼ十分であると考えられる。

6. 結 論

局所的に非線形ばねが存在する系の定常振動に対し、畳み込み積分を利用した解析法を提案した。本解析法の手順は、1) 非線形復原力を外力とみなして畳み込み積分による運動方程式を作成、2) それを離散化して時刻歴応答 1 周期分の非線形代数方程式を導出、3) 調和バランス法を適用して解く、というものである。2つの計算例を示し、RKG 法または実験との比較によって本方法の妥当性を確認した。この方法の特徴を以下に示す。

- (1) 微分形式の運動方程式を調和バランス法や数値積分法によって解くのに比べ、局所的に非線形ばねが存在することを利用して、解くべき非線形問題を縮小することができる。
- (2) 畳み込み積分の利点を生かし、定常振動応答の安定・不安定を判別することができる。
- (3) 本解析に必要なインパルス応答を実験から測定することができるので、非線形ばねを除いた系に対して物理モデルを作成する必要がない。

最後に、本実験装置の製作にあたり御協力をいただいた金沢大学工学部小川孝吉技官に感謝の意を表する。

付 録

式(12)に示した $\mathbf{H}^{ab}$ の行列を考える。簡単のために上付き添字を省略して次のように表す。

$$\mathbf{H} = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{h}_i \Delta t = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & \cdots & H_{1M} \\ H_{21} & H_{11} & H_{12} & \cdots & \vdots \\ H_{31} & H_{21} & H_{11} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & H_{12} \\ H_{M1} & H_{M-11} & \cdots & H_{21} & H_{11} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$\mathbf{h}_i$ 行列において対角と平行な要素は等しくなるので、 $\mathbf{H}$ 行列の要素を表すと式(36)になることがわかる。ここで H_{12} と H_{M1} について考えるために、式(9)を利用してそれらをインパルス応答 h_i で表すと次式になる。

$$\left. \begin{aligned} H_{12} &= \sum_{i=0}^{N-1} h_{i \times M-1} \Delta t \\ H_{M1} &= \sum_{i=0}^{N-1} h_{(i+1)M-1} \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

2.3 節で述べたように $j \leq 0$ または $j \geq (N-1)M+1$ のときに $h_j = 0$ になることを利用すると式(37)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} H_{12} &= h_{-1} \Delta t + \sum_{i=1}^{N-1} h_{i \times M-1} \Delta t = \sum_{i=1}^{N-1} h_{i \times M-1} \Delta t \\ H_{M1} &= \sum_{i=0}^{N-2} h_{(i+1)M-1} \Delta t + h_{N \times M-1} \Delta t = \sum_{i=1}^{N-1} h_{i \times M-1} \Delta t = H_{12} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

他の要素についても同様に考えると、最終的に $\mathbf{H}$ は次のように表すことができる。

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_0 & H_{M-1} & H_{M-2} & \cdots & H_1 \\ H_1 & H_0 & H_{M-1} & \cdots & \vdots \\ H_2 & H_1 & H_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & H_{M-1} \\ H_{M-1} & H_{M-2} & \cdots & H_1 & H_0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

ただし以下のように置き換えた。

$$H_0 = H_{11}, H_1 = H_{21} = H_{1M}, \dots, H_{M-1} = H_{12} = H_{M1} \quad (40)$$

$\mathbf{S}_i$ と $\mathbf{C}_j$ をそれぞれ $\sin$ の i 周期分、 $\cos$ の j 周期分を M 等分したものからなる次のような列ベクトルとする。

$$\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} \sin 2\pi i \frac{0}{M} \\ \sin 2\pi i \frac{1}{M} \\ \vdots \\ \sin 2\pi i \frac{M-1}{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_j = \begin{bmatrix} \cos 2\pi j \frac{0}{M} \\ \cos 2\pi j \frac{1}{M} \\ \vdots \\ \cos 2\pi j \frac{M-1}{M} \end{bmatrix} \quad (41)$$

式(20)からわかるように非線形復原力がべき級数で表されるようなときには、 $\mathbf{S}_i^T \mathbf{H} \mathbf{C}_j$ 、 $\mathbf{C}_i^T \mathbf{H} \mathbf{S}_j$ 、 $\mathbf{S}_i^T \mathbf{H} \mathbf{S}_j$ 、 $\mathbf{C}_i^T \mathbf{H} \mathbf{C}_j$ を計算する必要がある。 $\mathbf{S}_i^T \mathbf{H} \mathbf{C}_j$ を計算すると、

$$\mathbf{S}_i^T \mathbf{H} \mathbf{C}_j = \sum_{k=0}^{M-1} \left(H_k \sum_{l=0}^{M-1} \sin 2\pi i \frac{k+l}{M} \cos 2\pi j \frac{l}{M} \right) \quad (42)$$

ゆえに以下の結果を得る。

$$\left. \begin{aligned} i=j \text{ のとき } \mathbf{S}_i^T \mathbf{H} \mathbf{C}_j &= \frac{M}{2} \sum_{k=0}^{M-1} H_k \sin \frac{2\pi i k}{M} \\ i \neq j \text{ のとき } \mathbf{S}_i^T \mathbf{H} \mathbf{C}_j &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

$S_i^T H S_j$ については、

$$S_i^T H S_j = \sum_{k=0}^{M-1} \left(H_k \sum_{l=0}^{M-1} \sin 2\pi i \frac{k+l}{M} \sin 2\pi j \frac{l}{M} \right) \quad (44)$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} i=j \text{ のとき } S_i^T H S_j &= \frac{M}{2} \sum_{k=0}^{M-1} H_k \cos \frac{2\pi i k}{M} \\ i \neq j \text{ のとき } S_i^T H S_j &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$C_i^T H S_j$ と $C_i^T H C_j$ については以下の結果になる。

$$\left. \begin{aligned} i=j \text{ のとき } C_i^T H S_j &= -S_i^T H C_j, \quad C_i^T H C_j = S_i^T H S_j \\ i \neq j \text{ のとき } C_i^T H S_j &= C_i^T H C_j = 0 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

文 献

- (1) 岩田・佐藤, 畳み込み積分による非線形ばね質量系の振動解析, 機論, 63-605, C (1997), 16-21.
- (2) Ren Y. and Beards C. F., A New Receptance-Based Perturbative Multi-Harmonic Balance Method for the Calculation of the Steady State Response of Non-Linear Systems, J. Sound Vib., 172-5(1994), 593-604.
- (3) Hagedorn, P. and Schramm, W., On the Dynamics of Large Systems with Localized Nonlinearities, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 55-4(1988), 946-951.
- (4) Pipes, L. A. and Harvill, L. R. (小堀与一・ほか2名訳), 応用数学 3 (1973), 701, コロナ社.
- (5) 長松昭男, モード解析(1985), 83, 培風館.