不規則係数励振を受ける連続体の不安定振動*

遠藤 満^{*1}, 西垣 勉^{*1}, 岡 誠二^{*2}Unstable Vibration of Continuous Systems Subjected
to Random Parametric ExcitationMitsuru ENDO^{*3}, Tsutomu NISHIGAKI and Seiji OKA^{*3} Tokyo Institute of Technology, Dept. Mechano-Aerospace Engineering,
2-12-1, O-okayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552 Japan

The vibrational behavior of continuous systems such as beams, plates and circular cylindrical shells subjected to random parametric excitations is examined mainly from the viewpoint of possibility of unstable phenomena. The vibrational responses of those continuous systems are analyzed by means of simulation method using random sample functions of trigonometric series generated by random numbers. It turned out that unstable phenomena occur even for the cases in which random parametric excitation inputs have the fairly wide-band power spectra whose dominant frequencies deviate from, for example, the twice of the natural frequencies of continuous systems. Besides, for such continuous systems as plates or shells which have the high frequency distribution density, unstable vibrations are generated concurrently in multi-vibrational modes. Finally, the experiment was carried out for a simply-supported beam subjected to the narrow-band random parametric excitation and it was ascertained that unstable vibrations really occur, and further the unstable figure domain made by the simulation analysis showed fairly good agreement with the experimental results.

Key Words: Vibration of Continuous System, Random Parametric Excitation, Stability, Beam, Plate, Circular Cylindrical Shell, Simulation, Experiment

1. 緒 言

例えば、ロケット打ち上げ時にはエンジンの推力として平均的な力がロケット軸方向に働く。しかし推力そのものは不規則な荷重と考えられ、それはおもに外殻内部の機構部に加わるように設計がなされているが、外殻円筒殻部にも何らかの不規則な軸方向変動荷重が加わると思われ、この系は不規則係数励振を受ける連続体の一例と考えることができる。

正弦的な係数励振を受ける振動系の例としては、一自由度系の Mathieu 方程式があまりにも有名であり、文献を引用するまでもなく古くからその振動の安定・不安定性について詳細な研究がなされている。また平板あるいは殻等の連続体を対象とした研究も多く見られる^{(1)~(4)}。一方、正弦的係数励振入力値が大きくなると系が不安定となる周波数領域が広がるという一般的な特性を考えると、不規則な入力であっても条件によっては不安定振動が発生する可能性もあると思われる。実際、長方形平板が非定常不規則面内励振力を受

ける場合の応答⁽⁵⁾、アングルプライ異方性積層長方形板の面内不規則変動力による振動不安定領域に関する研究⁽⁶⁾、あるいは正弦波および不規則な係数励振を同時に受ける Duffing 系の応答⁽⁷⁾などについて研究されている。また円筒シェル集中付加マス系の地震波によるパラメトリック励振に関する実験的⁽⁸⁾および理論的⁽⁹⁾な研究があり、正弦波加振時に励振が生じやすい条件が地震時にも生じやすいとは限らない、といった知見等が得られている。

しかしながら上述の研究はそれぞれ対象をかなり限定したものであり、著者らが調べた限りにおいては、特に固有振動数分布密度の高い種々の連続体を対象として、不規則係数励振入力パワースペクトルの卓越振動数あるいは帯域幅等との関連という視点から、不安定振動現象が起こる条件について詳しく調べた一般的な研究は存在しないように思われる。そこで本研究では真直はり、長方形平板および円筒殻を連続体の典型例として取上げ、それらが不規則係数励振を受けるときの不安定現象について種々にパラメータを変えて検討することを目的とする。

本研究の方針としては、乱数を用いて発生させた三角級数モデルによる標本関数を入力とするシミュレーション手法により連続系の不安定現象を調べる。なお

* 原稿受付 1999年8月23日。

^{*1} 正員、東京工業大学工学部(〒152-8552 東京都目黒区大岡山2-12-1)。^{*2} 東京工業大学大学院。

E-mail: mendo@mes.titech.ac.jp.

確率微分方程式を基礎に、フィルタを通したホワイトノイズをモード分解された基礎方程式の係数励振項とすれば各物理量のモーメントを得ることができるが⁽¹⁰⁾、パワースペクトルの形を任意に設定することが難しい、近似的多元方程式系になる、あるいは不安定領域図を議論できない、等の理由によりこの方法による解析は試みない。

以下第2章で、真直はり、長方形平板および薄肉円筒殻を対象としてそれらの振動挙動、中でも特に不安定振動の発生条件に注目して検討を行う。第3章ではRongらの論文⁽⁷⁾を参考に、狭帯域不規則係数励振を受ける系の不安定領域図をシミュレーション手法に基づいて作成し、さらに第4章で両端単純支持はりが狭帯域不規則係数励振を受ける場合について実験を行い、実際に不安定振動が起こることを確認するとともに第3章で検討した不安定領域図と実験結果がほぼ一致することを示す。

2. 数 値 解 析

本章では、まずシミュレーション不規則入力波形の発生法および初期擾乱の与え方について述べる。さらに3種類の連続体モデルについて、モード分解された形での基礎方程式に基づいて実際に数値解析を行い、不安定振動の発生条件について検討・考察を行う。

2.1 シミュレーション手法

2.1.1 不規則入力波形の発生法 本研究では式(1)で示すような三角級数モデルにより任意のパワースペクトルをもつ不規則入力波形 $P(t)$ の標本関数を発生させる⁽¹¹⁾。

$$P(t) = \sum_{k=1}^N a_k \cos(\omega_k t + \phi_k) \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 ω_i, ω_h を考慮する入力パワースペクトル $S_P(\omega)$ の角振動数 ω に関する正側のそれぞれ下限値、上限値とし、その間の分割数を N とすると

$$\begin{aligned} \omega_k &= \omega_i + \left(k - \frac{1}{2}\right) \Delta\omega \quad (k=1 \sim N) \\ \Delta\omega &= (\omega_h - \omega_i) / N \\ a_k^2 &= 4 S_P(\omega_k) \Delta\omega \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

と表され、 ϕ_k は零から 2π で一様な確率変数で互いに独立とする。式(1)に示す三角級数モデルは N の値によらずエルゴート性が成り立ち、 N を十分大きくとることにより平均値零の定常確率ガウス過程を模擬できることが知られている⁽¹¹⁾。異なる入力サンプルが必要な場合には ϕ_k の発生に用いる乱数を変えて求めればよい。なお以下の解析では $\omega_i = 0$ としている。

本研究の数値解析においては、次の式(3)に示すよ

うなパワースペクトルを用いる。

$$S_P(\omega) = \frac{\alpha \sigma_P^2}{\pi} \left\{ \frac{1}{(\omega + \rho_\omega)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{(\omega - \rho_\omega)^2 + \alpha^2} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

上式は一般に一つの卓越振動数 ρ_ω をもつ入力を表し、 σ_P^2 は入力の分散値、 α は帯域幅を支配するパラメータであり、 α を大きくすることにより広帯域入力を表すことができる。

2.1.2 変位の初期条件の与え方 一般に係数励振系では変位あるいは速度に初期擾乱を与えないと振動応答を得ることができない。そこで本研究ではモード分解した各モードの変位に確率的な初期擾乱を与えることにする。具体的には i 次モードのある決まった点の変位 $D_i(0)$ に対して連続体の代表長さ L の 0.1% を最大値とするような次の値を与える。

$$D_i(0) = 1.0 \times 10^{-3} \times L \cos 2\pi z \dots\dots\dots (4)$$

ここで z は 0~1 で一様な確率変数であり、乱数を用いて発生させる。

2.2 数値解析例および考察 本節では、真直はり、長方形平板および薄肉円筒殻の場合について数値解析法および解析結果と考察を示す。なお時系列応答を求めるために Runge-Kutta-Gill 法を用いたが、その時間刻み幅については不安定現象を調べるため、最高次モードの振動数を考慮して数値計算アルゴリズム的に解が発散しないよう十分の注意を払って設定した。

2.2.1 不規則係数励振を受ける真直はり 図1に示すように軸圧縮荷重を受ける両端単純支持はりを考える。

ここで P_s は静圧縮荷重、 $P(t)$ は不規則動荷重とし、変位を $w(x, t)$ とする。オイラー・ベルヌーイはりの正規化されたモード関数を $W_i(x)$ 、一般化座標を $F_i(t)$ (t は時間) とし、モード減衰比 ζ_i を導入すると支配方程式は以下のように表される⁽¹²⁾。

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{i=1}^I W_i(x) F_i(t) \\ W_i(x) &= \sqrt{\frac{2}{\rho b h l}} \sin a_i x \\ \ddot{F}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{F}_i(t) + \left\{ \omega_i^2 - \frac{\alpha_i^2}{\rho b h} P(t) \right\} F_i(t) &= 0 \end{aligned}$$

Fig. 1 Analytical model of a beam

$$\omega_i^2 = \frac{Eh^2\alpha_i^4}{12\rho} - \frac{\alpha_i^2 Ps}{\rho b h}, \quad \alpha_i = \frac{i\pi}{l} \dots\dots\dots (5)$$

ここで ρ, E, l, b, h ははりの密度, 縦弾性係数, 長さ, 幅, 厚さを表し, $(\cdot)$ は d/dt を表す. また ω_i は Ps が加わった状態でのはりの i 次の固有角振動数を表す. 数値計算に用いた諸パラメータを表1に示す.

なお ω_h は $2\pi \times 10^3$ rad/s とし, 分割数 N は時系列波形に周期性がなくなることを調べた上で $N=8096$ としている.

一般に調和係数励振を受ける場合には, 励振振動数 $\rho\omega$ が

$$\rho\omega = \frac{2}{n} \omega_i \quad (n=1, 2, \dots) \dots\dots\dots (6)$$

であるときに最も励振されやすいことが知られている. そこでまずはじめに, 一次モードに着目し, 図2のように比較的狭帯域で $\rho\omega=2\omega_1$ のようなパワースペクトルを持つ $P(t)$ の場合について, 二次モードまで考慮して計算した結果が図3である. なお観測点は

Table 1 Parameters used in the analysis of a beam

Length l	0.4 [m]
Width b	2.00×10^{-2} [m]
Thickness h	1.00×10^{-3} [m]
Density ρ	2.69×10^3 [kg/m ³]
Young's modulus E	70.3 [GPa]
Static load Ps	0.98 [N]
Natural frequency(1st) $\omega_1/2\pi$	13.5 [Hz]
Natural frequency(2nd) $\omega_2/2\pi$	57.0 [Hz]
Damping ratio $\zeta_i (i=1, 2)$	1.00×10^{-3}

Fig. 2 Power spectrum of input

Fig. 3 Time history of displacement

$x=l/3$ の所である. ある帯域幅をもつ不規則入力の場合にも不安定振動が生ずることがわかる. なお図3の波形の一部分を近似的にスペクトル解析した結果より, 発散しているのは一次モードであることがわかった. 同様なことが $\rho\omega=2\omega_2$ として二次モードでも生ずることが確認できた. なお発散に至るまでの時間について検討した結果, 初期擾乱が大きいほど一般に速いようであるが, 標本関数については一般的な議論は難しく, 最終的に不安定になるかどうかだけが重要に思われる.

次に式(6)からの類推から, 一次モードに着目し, $\rho\omega$ を図4のように変えた入力の場合について検討を行った結果, やはり応答が不安定振動となることが確認された. しかし調和励振の場合にも n が大きくなると発散しにくくなることが知られているが, 図4の入力も, 調べた範囲内で応答が発散したときの入力値を示したもので, n が大きいほど入力の分散値が大きくなり発散しない傾向がみてとれる. 次に卓越振動数 $\rho\omega$ が式(6)のような関係を満たさず, 1次と2次の固有振動数の平均値の2倍 $(\omega_1+\omega_2)$ のときの入力パワースペクトルの帯域幅の影響を調べた. 入力パワースペクトルをまとめて図5に示し, それに対する時系列変位応答を図6に, またその波形の一部分を近似的にスペクトル解析した結果を図7に示す. 図6, 7より卓越振動数が式(6)のような関係からずれていても帯域幅が広くなれば応答は二つのモードで不安定となり, かつ α の大きいほうが発散しやすいことが確認できる.

Fig. 4 Differences of dominant frequency of inputs

Fig. 5 Power spectra of inputs with different band-width

Fig. 6 Time histories of displacement for different band-width inputs

Fig. 7 Power spectra of displacement for different band-width inputs

Fig. 8 Analytical model of a plate

2・2・2 不規則係数励振を受ける長方形平板 図8に示すような面内圧縮荷重を受ける四辺単純支持の長方形平板を考える。正規化されたモード関数を $W_{ij}(x, y)$ 、一般化座標を $F_{ij}(t)$ とし、モード減衰比 ζ_{ij} を導入すると、支配方程式は次のように表される⁽¹⁾。

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^b W_{ij}(x, y) F_{ij}(t)$$

$$W_{ij}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\rho b h l}} \sin \alpha_i x \sin \beta_j y$$

$$\ddot{F}_{ij}(t) + 2\zeta_{ij}\omega_{ij}\dot{F}_{ij}(t) + \left\{ \omega_{ij}^2 - \frac{\alpha_i^2}{\rho b h} P(t) \right\} F_{ij}(t) = 0$$

$$\omega_{ij}^2 = \frac{E h^2}{12(1-\nu^2)\rho} (\alpha_i^2 + \beta_j^2) - \frac{\alpha_i^2}{\rho b h} P_s,$$

Table 2 Parameters used in the analysis of a plate

Width b	0.5 [m]
Thickness h	2.00×10^{-3} [m]
Poisson's ratio ν	0.345
Natural frequency(mode11) $\omega_{11}/2\pi$	50.3 [Hz]
Natural frequency(mode12) $\omega_{12}/2\pi$	1.09×10^2 [Hz]
Natural frequency(mode21) $\omega_{21}/2\pi$	1.42×10^2 [Hz]
Natural frequency(mode22) $\omega_{22}/2\pi$	2.01×10^2 [Hz]

Fig. 9 Power spectra of inputs

Fig. 10 Time histories of generalized coordinates

$$\beta_j = \frac{j\pi}{b} \dots\dots\dots (7)$$

ここで ν はポアソン比を表す。また ω_{ij} は P_s を考慮したときの x 方向半波数 i , y 方向半波数 j のモードの固有角振動数を表す。以降これをモード ij と呼ぶ。数値計算に用いた諸パラメータを表2に示す。なお、 ρ , E , l , P_s , および減衰比(全モード)については表1のはりの場合と同じである。また ω_h は 2×10^4 rad/s としている。 l が $0.4m$ なのに対し、 b は $0.5m$ であり、 ω_{12} と ω_{21} が接近していることに注目されたい。

はりの場合と同様、 $\rho_\omega = 2\omega_{11}$ の入力の場合にはモード11が不安定振動となることは確かめたので、 ω_{12} と ω_{21} が接近している影響を調べるために、比較的帯域幅が広く、卓越振動数として $2\omega_{12}$, $2\omega_{21}$ および $(\omega_{12} + \omega_{21})$ をもつ図9のような入力の場合のモード別の

応答の中で特徴的な結果を図 10 に示す。なお縦軸は平板の全質量 M と l を用いて無次元化している。図 10 より $\rho_\omega = 2\omega_{12}$ の場合にモード 21 が発散しそうな傾向を示しているのに対し、 $\rho_\omega = 2\omega_{21}$ のときにモード 12 は全く不安定傾向は示さない。また $\rho_\omega = \omega_{12} + \omega_{21}$ の場合にモード 12 は全く発散傾向を示していないにもかかわらず、モード 21 は明らかに発散傾向を示していることがわかる。このように、初期擾乱および標本関数の影響も大きく受けることから、一概に結論づけることはやや早計かもしれないが、少なくとも本研究で調べた範囲内の結果については、入力に対してほぼ同じ状況にあると思われるモードで不安定振動の起きやすいモードとそうでないモードが存在することは興味深い。

2・2・3 不規則係数励振を受ける円筒殻 図 11 に示すような軸方向不拘束両端単純支持の薄肉円筒殻を考える。三方向変位 u, v, w を式(8)のように仮定する。

$$\begin{aligned} u(x, \theta, t) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J U_{ij}(t) A_{ij}(x, \theta) \\ v(x, \theta, t) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J V_{ij}(t) B_{ij}(x, \theta) \\ w(x, \theta, t) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J W_{ij}(t) C_{ij}(x, \theta) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} A_{ij}(x, \theta) &= \cos \alpha_i x \cos j\theta \\ B_{ij}(x, \theta) &= \sin \alpha_i x \sin j\theta \\ C_{ij}(x, \theta) &= \sin \alpha_i x \cos j\theta \end{aligned}$$

式(8)を用い、文献(1)、(13)を参照すると、Flügge の薄肉円筒殻理論に基づいて、一般化座標 $\mathbf{f}_{ij} = [U_{ij}(t), V_{ij}(t), W_{ij}(t)]^T$ (T は転置)に関する次のような支配方程式を求めることができる。

$$\begin{aligned} \rho h \frac{d^2 \mathbf{f}_{ij}}{dt^2} + 2\zeta_{ij} \omega_{ij} \frac{d\mathbf{f}_{ij}}{dt} \\ + \left[\frac{Eh}{r^2(1-\nu^2)} \mathbf{R}_{ij} - \frac{P_s + P(t)}{2\pi r} \mathbf{S}_{ij} \right] \mathbf{f}_{ij} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

ここで

Fig. 11 Analytical model of a circular cylindrical shell

$$\mathbf{R}_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_i^2 + \frac{1-\nu}{2} j^2 & -\frac{1+\nu}{2} \alpha_i j & -\nu \alpha_i \\ -\frac{1+\nu}{2} \alpha_i j & j^2 + \frac{1-\nu}{2} \alpha_i^2 & j \\ -\nu \alpha_i & j & c^2(\alpha_i^2 + j^2) + 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{ij} = \frac{1-\nu^2}{Eh} \alpha_i^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c^2 = \frac{h^2}{12r^2}$$

なお、 r は平均半径を表す。また $\mathbf{S}_{ij}$ に関しては、文献(1)には問題があると思われるので、著者らが導出したものである。数値計算に用いたパラメータを表 3 に示す。なおはりと同じものは省略した。ここで ω_h は $2\pi \times 10^5$ rad/s としている。また固有角振動数 ω_{ij}

Table 3 Parameters used in the analysis of a circular cylindrical shell

Length l	1.0 [m]
Mean radius r	0.25 [m]
Thickness h	1.00×10^{-3} [m]
Static load P_s	9.8 [N]

Table 4 Natural frequency of a circular cylindrical shell

$\omega_{11}/2\pi$	8.74×10^2 [Hz], 3.00×10^3 [Hz], 5.27×10^3 [Hz]
$\omega_{12}/2\pi$	3.85×10^2 [Hz], 4.45×10^3 [Hz], 8.07×10^3 [Hz]
$\omega_{21}/2\pi$	1.95×10^3 [Hz], 4.21×10^3 [Hz], 6.70×10^3 [Hz]
$\omega_{22}/2\pi$	1.12×10^3 [Hz], 5.41×10^3 [Hz], 9.17×10^3 [Hz]

Fig. 12 Power spectra of input

Fig. 13 Time history of displacement

を表4に示す。ここで i は軸方向半波数, j は円周方向波数であり, ω_{ij} は一般にそれぞれに対し三つ求まるが, ここでは最低次のみを考慮し, 図12のような入力を与えたときの $x=l/3$ における変位 w の時系列波形を図13に示す。不安定振動が生じていることが確認できる。なお, 円筒殻の場合にはモード次数により固有角振動数が複雑に変化し, 入力との関係を系統的に調べることはやや難しいので, 円筒殻に関する検討はこれ以上行わない。

3. 狭帯域不規則入力時の 振動不安定領域図

本章では, 4章の実験結果の判断の際に用いる狭帯域不規則入力の場合の振動不安定領域図の作成例を Rong らの研究⁽⁷⁾を参考にして示す。

まず第2章に示した両端単純支持はりの支配方程式を以下のようにおきかえる。

$$\ddot{F}_i(t) + \epsilon \mu_i \dot{F}_i(t) + \{\omega_i^2 - \epsilon \xi(t)\} F_i(t) = 0 \quad \cdots (10)$$

ここで ϵ は微小なパラメータ, μ_i は剛性係数⁽⁷⁾であり, $\xi(t)$ を狭帯域不規則過程と考える。このため $\xi(t)$ を次のように仮定する。

$$\xi(t) = h_1 \cos \rho \omega t + k_1 \sin \rho \omega t \quad \cdots (11)$$

ここで, h_1, k_1 は徐変化する確率過程とし, さらに卓越振動数 $\rho \omega$ は固有振動数 ω_i の2倍から微小にずれた場合を想定し, 次のように表す。

$$\rho \omega = 2\omega_i + \epsilon \sigma \quad \cdots (12)$$

ここで σ はずれを表すパラメータである。狭帯域不規則過程 $\xi(t)$ は W をホワイトノイズとして次のような線形フィルタを表す微分方程式

$$\dot{\xi} + \gamma \xi + \rho \omega \xi = \sqrt{\gamma} \rho \omega W \quad \cdots (13)$$

より求めることができる。このとき $\xi(t)$ のパワースペクトルは

$$S_\xi(\omega) = \frac{\gamma \rho \omega^2 S_0}{(\rho \omega - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad \cdots (14)$$

と表される。ここで S_0 は W のスペクトル定数である。以下, 式(11), (13)の関係と $h_1 = h_1(\epsilon t)$, $k_1 = k_1(\epsilon t)$ が徐変化する確率過程であることを用い, 式(10)の応答 $F_i(t)$ を多重尺度法を利用して近似し, さらにシミュレーション手法を用いて応答の最大リアプノフ指

Fig. 14 Unstable figure domain

Fig. 15 Experimental set-up

Table 5 Parameters of a beam used in the experiment

Length l	0.400 [m]
Width b	2.00×10^{-2} [m]
Thickness h	1.00×10^{-3} [m]
Density ρ	2.69×10^3 [kg/m ³]
Young's modulus E	70.3 [GPa]

Fig. 16 Power spectrum of axial load

数 $\lambda = \lambda_{\max}$ を ξ の分散値 σ_ξ^2 と σ の関数として求めると、その曲面の $\lambda = 0$ となる断面曲線が安定・不安定境界を与える。なおこれを求める具体的な手順の詳細は Rong らの文献(7)を参照されたい。

いま、表1に示すはりの一次モードを対象とし、 $\epsilon = 0.1$ とおき、 μ_1 を求めると $\mu_1 = 1.70$ となるから、 $\gamma = 1.0$ として、これらの値を用いて求めた不安定領域図と2・1節で述べたシミュレーション手法による結果を比較したのが図14である。縦軸は σ_ξ^2 、横軸は式(12)の σ を 2π で割った値を示している。図14から不安定領域においては応答が発散し、安定領域においては応答が減衰していることがわかる。

4. 実験

4.1 実験装置 図15に示すように、リニアガイド上に設置して錘りで引張る形式のスタンドと加振器の振動子先端に取付けたロードセルでアルミニウムはりを挟んで静圧縮荷重を加え、さらにコンピュータにより成形した狭帯域不規則入力信号を動電形加振器のコントローラに送り、動的な不規則荷重を発生させてはりを係数励振する。はりの横方向変位は渦電流式変位計で測定する。アルミニウムはりの両端単純支持条件ははりの側部に設置した非常に薄いばね用りん青銅板で両端を支持することにより実現した。実験に用いたはりの諸パラメータを表5に示す。

4.2 実験方法 一次固有振動数の2倍近傍の振動数を卓越振動数とする狭帯域不規則信号(成形時に考慮する周波数範囲は0~2 kHz)をコンピュータで発生させて動電形加振器を駆動し、ロードセルからの

Fig. 17 Time history of displacement

Fig. 18 Unstable figure domain

信号をFFTアナライザで分析して動的軸圧縮荷重のパワースペクトルを求めた。この際、一次モードの振動数 ω_1 とその3倍 $3\omega_1$ の振動成分もやや大きく現れたので、バンドパスフィルタによりこの二つの成分をカットして $2\omega_1$ 近傍に卓越するピークをもつパワースペクトルの形をもって4・3節に示すシミュレーション計算の入力とし、さらにこれにより入力の分散値も求めた。一方、モード減衰比と固有振動数は自由振動実験より求めた値を数値計算では用いた。

4.3 実験結果および考察 自由振動実験により同定された1次の固有振動数と減衰比は、 $\omega_1/2\pi = 12.8\text{Hz}$ 、 $\zeta_1 = 1.00 \times 10^{-2}$ であった。実際にははり振動系が不安定となったときのロードセル出力のパワースペクトルの例を図16に、またはりの $l/2$ 長さ位置での変位の時刻歴応答の例を図17に示す。なお、時刻歴応答波形の一部分を近似的にスペクトル解析してみた結果、1次の固有振動数成分 ω_1 が卓越してはいたが、これとともに $2\omega_1$ と $3\omega_1$ の成分もやや顕著に観察された。これは応答が大きくなるにつれてはりに何らかの束縛条件が生じ、非線形性の影響が出たものと思われる。図18に第3章で示した手法によって作成した不安定領域図と実験結果の比較を示す。入力の分散値の微小調整をすることが困難でプロット値にはやや不

確定さがあるものの、不安定領域図と実験結果はほぼ一致を示しているといえよう。

5. 結 言

本研究では、はり、長方形平板ならびに円筒殻のような構造物が不規則係数励振を受けるときの振動挙動を、特に系の不安定振動に焦点をあててシミュレーション解析手法および実験により検討した。その結論をまとめると以下になる。

(1) はり、長方形平板、円筒殻のような連続体にある有限の帯域幅をもちかつ卓越振動数を有する不規則係数励振を加えても調和係数励振の場合と同様不安定振動が生じる。また固有振動数の例えば2倍からずれた卓越振動数でも入力条件によっては不安定振動が生じ、かつ広帯域入力になるほどその傾向は強まる。

(2) 長方形平板のような固有振動数分布密度の高いモデルにおいては複数のモードで同時に不安定現象が発生し、かつ不安定振動の起きやすいモードとそうでないモードが存在する。

(3) 狭帯域不規則係数励振を受けるはりの場合について実験を行い、実際に不安定振動が発生することを確認した。またシミュレーション手法に基づいて作

成した安定不安定領域図と実験結果の傾向はほぼ一致した。

最後に、本研究を遂行するにあたり有益な御助言をいただいた東京工業大学の木村康治教授と高原弘樹助教授に謝意を表します。

文 献

- (1) ボローチン著, 近藤誠二・中田和夫共訳, 弾性系の動的安定, (1972), 245, 327, 360 コロナ社.
- (2) Liao, C.-L. and Cheng, C.-R., *J. Sound Vib.*, **174** (3) (1994), 335-351.
- (3) Popov, A. A., *J. Sound Vib.*, **209** (1) (1998), 163-186.
- (4) Popov, A. A., Thompson, M. T. and McRobie, F. A., *J. Sound Vib.*, **209** (1) (1998), 163-186.
- (5) To, C. W. S. and Orisamololu I. R., *J. Sound Vib.*, **114** (3) (1997), 481-494.
- (6) Pavlovic, P. G., *J. Sound Vib.*, **171** (1) (1994), 87-95.
- (7) Rong, H., Xu, W. and Fang, T., *J. Sound Vib.*, **210** (4) (1998), 483-515.
- (8) 高柳正明, 機論, **59**-562, C (1993), 1665-1671.
- (9) 高柳正明, 機論, **59**-568, C (1993), 3682-3687.
- (10) Soong, T. T., *Random Differential Equations in Science and Engineering*, (1973), 231, Academic Press.
- (11) 星谷勝, 確率論手法による振動解析, (1974), 64, 鹿島出版会.
- (12) Meirovitch, L., *Principles and Techniques of vibrations*, (1997), 368, Prentice Hall.
- (13) 小林繁夫, 振動学, (1994), 210, 丸善.