FRP 積層円筒殻の減衰も考慮した振動特性評価*

遠藤 満^{*1}, 西垣 勉^{*1}, 上杉 貴久^{*2}Evaluation of Vibrational Characteristics
of Laminated FRP Circular Cylindrical Shells Including Damping EffectMitsuru ENDO^{*3}, Tsutomu NISHIGAKI and Takahisa UESUGI^{*3} Tokyo Institute of Technology, Dept. Mechanical Sciences and Engineering,
2-12-1, O-okayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552 Japan

Evaluation method of vibrational characteristics of laminated FRP shells including damping is examined. Natural frequencies and loss factors of FRP circular cylindrical shells subjected to three kinds of prestresses are obtained on the ground of the first-order shear deformation shell theory by applying the modified Galerkin method. The results show that natural frequencies generally decrease, whereas loss factors increase for such the prestresses as external pressure, axial compression stress and torsional shear stress. Besides, it turned out through parametric studies that it is fairly difficult to find appropriate constructions of anisotropic laminated layers for which the both of natural frequency and loss factor become concurrently large. Considering the above, the following criterion optimizing vibrational characteristics of such structures as shells with the fairly large damping and the high frequency distribution density is proposed, i. e., that the least value of the product of frequency and loss factor for all vibrational modes should be maximized from the viewpoint of optimizing the free vibration reduction characteristics, in stead of the criterion to maximize the fundamental frequency which is one of the conventional concepts.

Key Words: Vibration of Continuous System, Vibrational Characteristics, FRP, Circular Cylindrical Shell, Damping, Prestress

1. 緒 言

FRP に代表される複合材料は金属材料に比べて高い比強度・比剛性を有するため、軽量化が必要とされる航空機・宇宙構造物などに近年盛んに使用されるようになってきている。中でも円筒殻はその基本的な構造要素の一つとしてよく用いられる。

このような構造物は航空宇宙分野では厳しい振動環境下で高い構造性能を要求されることが多いが、FRP は強い力学的異方性を有するために極めて複雑な挙動を示し、構造設計ではこの特性を十分に考慮することが必要である。そのため、これまで FRP 積層円筒殻の積層構成による特に固有振動数の挙動に関し、円筒殻の諸理論の精度との関連も含めた詳細な検討がなされている^{(1)~(3)}。一方、逆に FRP の異方性を有効に利用して適切な積層構成を選択することにより、より厳しい設計仕様に合せた設計が可能であることが知られており、この観点から遺伝的アルゴリズムなどを適用した振動特性の最適化、中でも特に基本振動数の最大

化問題などが取扱われている⁽³⁾⁽⁴⁾。しかしながら、円筒殻のように固有振動数分布密度の非常に高い構造物については、実用的な観点からみたと、その使用環境・条件等を特定せずに、円筒殻単体そのものとしての振動特性の最適化問題を論ずることにはやや問題があるようにも思われる。すなわち、一つの例として、CFRP で作製されたウラン濃縮用遠心分離器の回転胴では常用運転速度を例えば第四次と第五次の危険速度の間に定め、その複合材料構成の設計にあたっては第五次危険速度をできるだけ高く、第四次をできるだけ低くするという設計が実際に行われていることからわかるように、振動特性の最適化問題は座屈値等の最適化問題とはやや性質を異にし、厳密な意味では使用環境・条件・動荷重等を考慮してはじめて実用的な意味をもつように思われる⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

一方、視点を転じてみると、FRP は前述の金属材料と比べて比強度・比剛性に優れるという長所のほかに、減衰特性にも優れているということはよく知られていることである。したがって、もしその減衰特性も含めて FRP 積層円筒殻の振動特性を評価することにすれば、系の自由振動の減衰特性の観点から、いわゆる減衰振動系の特性根の負の実部の絶対値をできるだけ大きくするという概念とほぼ等価な考え方により、

* 原稿受付 1999 年 8 月 6 日。

^{*1} 正員、東京工業大学大学院理工学研究科 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。^{*2} 東京工業大学大学院。

E-mail: mendo@mes.titech.ac.jp

円筒殻単体そのものとしても最適化問題を設定できる可能性も考えられる。そこで本研究では、FRP 積層円筒殻の減衰も考慮した振動特性の最適化の評価法について検討・考察することを目的とする。

これまで、FRP 積層円筒殻の振動特性に関する研究としてその減衰特性も考慮した研究は非常に少なく⁽⁷⁾、さらに実際問題では種々の初期応力を受ける場合も多いと思われるが、初期応力の影響まで考慮した FRP 積層円筒殻の振動特性の研究はほとんどないように思われる。本研究ではこのような現状を踏まえ、FRP 積層円筒殻に関し、減衰も考慮して初期応力と積層数・配向角などの積層構成を種々に変えて系の固有振動数と損失係数を解析してパラメータサーベイし、これらの結果を考察することにより固有振動数と損失係数をともに考慮した振動特性最適化の一評価法を提案して、従来からの伝統的な最適化手法である、基本振動数を最大化する方法との比較検討を行う。

本論文の定式化において、複合材料の減衰特性を考慮するために、材料の損失係数を用いて表された複素弾性係数を用い、さらに FRP はせん断剛性が相対的に低いため、その影響を考慮するために回転慣性と面外方向のせん断変形も考慮した一次せん断変形理論を適用する。また、円筒殻に加わる初期応力としては初期せん断応力、初期外圧、初期軸圧縮応力の三種類を考慮し、準解析的な手法である修正ガラキン法により解析を行うこととする。

2. 基礎方程式の導出

ここで、基礎方程式の導出を行うが、関係式はやや冗長なものであり、また著者らが過去に行った初期応力を受ける回転する円筒殻の振動解析の研究⁽⁸⁾と共通する部分も多いので、ここでは本研究で新たに必要となる関係式のみやや詳しく記述することとし、他の関係式の詳細は文献(8)を参照されたい。

2.1 座標系と変位式 本解析では座標系として、図1のように軸方向に x 軸、円周方向に y 軸、および半径方向に z 軸をとる。また円周方向角度を φ とする。円筒殻の形状は、長さ l 、平均半径 a 、肉厚 h とする。一次せん断変形理論では、殻の回転慣性とせん断変形を考慮に入れるために図2に示すように、基準面上の変位 u, v, w と xz, yz 平面内の回転 ϕ_x, ϕ_y を用いて任意点の変位 u_z, v_z, w_z を次のように表す。

$$\begin{cases} u_z = u + z\phi_x \\ v_z = v + z\phi_y \\ w_z = w \end{cases} \quad (1)$$

2.2 ひずみと変位の関係式 基準面での変位成

Fig. 1 Coordinates system

Fig. 2 Cross sectional view of shell

分 $(u, v, w, \phi_x, \phi_y)$ は、初期応力によって生ずる静的成分 $(u_0, v_0, w_0, \phi_{x0}, \phi_{y0})$ と振動成分 $(u_1, v_1, w_1, \phi_{x1}, \phi_{y1})$ に分離して考える。ひずみについては Green のひずみテンソルを適用し、静的成分に関してはそのひずみの 1 次項のみを考慮し $\{\epsilon^0\}$ とする。振動成分に関しては、ひずみの 1 次項と 2 次項を考慮し、それぞれ $\{\epsilon^1\}, \{\epsilon^2\}$ とすると、ひずみ $\{\epsilon\}$ は、次のように表され、これらは変位成分を用いて表すことができる⁽⁸⁾。

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^0\} + \{\epsilon^1\} + \{\epsilon^2\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

2.3 応力とひずみの関係式 図3に示すように材料の主軸方向を 1-2 軸とし、円筒殻の座標軸を $x-y$ 軸とし、互いに θ の角度をなしているとする。また図4に示すような積層構造をなしているとする。さらに、これらの特性は円周方向および軸方向に一定であるとする。

材料の主軸座標系での応力-ひずみ関係式は次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{z1} \\ \tau_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{z1} \\ \gamma_{z2} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (3)$$

$$Q_{11} = \frac{E_1^*}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2^*}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1^*}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2^*}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{33} = G_{12}^*,$$

$$Q_{44} = G_{z1}^*, \quad Q_{55} = G_{z2}^*$$

ここで、 ν_{12}, ν_{21} はポアソン比、 E_1^*, E_2^* は複素縦弾性係数、 $G_{12}^*, G_{z1}^*, G_{z2}^*$ は複素横弾性係数であり、例えば、

Fig. 3 Fiber orientation

Fig. 4 Laminated structure of material

E_1^* は材料の損失係数 η_{E_1} を用いて次のように複素表示で表される.

$$E_1^* = E_1(1 + j\eta_{E_1}) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで, j は虚数記号を表す. さらに, 材料の主軸が円筒殻の座標軸と θ の角度をなしていることを考慮すると, 円筒殻の座標軸に関する応力とひずみの関係を求めることができる⁽⁸⁾.

2・4 合応力と合モーメント 次に, 後に求める基礎方程式の表記を簡便にするため, 合応力, 合モーメントを静的成分と振動成分に分けて表すことにする. 添字 0 が静的成分であることを示し, 添字 1 が振動成分であることを示す. 例えば, N_{x0} は静的な応力 σ_{x0} に関する合応力であり, 同様にして静的成分に関する合応力 $N_{\varphi 0}, N_{\varphi x 0}, N_{x\varphi 0}, N_{zx 0}, N_{z\varphi 0}$, 合モーメント $M_{x0}, M_{\varphi 0}, M_{\varphi x 0}, M_{x\varphi 0}, M_{zx 0}, M_{z\varphi 0}$, 振動成分に関する

合応力 $N_{x1}, N_{\varphi 1}, N_{\varphi x 1}, N_{x\varphi 1}, N_{zx 1}, N_{z\varphi 1}$, 合モーメント $M_{x1}, M_{\varphi 1}, M_{\varphi x 1}, M_{x\varphi 1}, M_{zx 1}, M_{z\varphi 1}$ を導入すると, これらは変位成分を用いて表すことができる⁽⁸⁾.

2・5 静的変位に関する基礎方程式 今までに誘導した式を用いて, 静的変位に関するひずみエネルギー, 外力による仕事を求め, Hamilton の原理を適用すると, 静的変位に関する基礎方程式が次のように求まる.

釣合方程式:

$$\begin{cases} N_{x0,\xi} + P_0 w_{0,\xi} = 0 \\ N_{x\varphi 0,\xi} + N_{z\varphi 0} - v_0 P_0 = 0 \\ N_{\varphi 0} - N_{zx 0,\xi} + P_0(a + u_{0,\xi} + w_0) = 0 \\ N_{zx 0} + \frac{1}{a} M_{x0,\xi} = 0 \\ N_{z\varphi 0} + \frac{1}{a} M_{x\varphi 0,\xi} = 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (5)$$

境界条件: $\xi = \pm \frac{l}{2a}$ で,

$$\begin{cases} \left[\left(N_{x0} + \sigma_c h + \frac{1}{2} P_0 w_0 \right) \delta u_0 \right]_{\xi} = 0 \\ \left[(N_{x\varphi 0} - \tau_s h) \delta v_0 \right]_{\xi} = 0 \\ \left[\left(N_{zx 0} - \frac{1}{2} P_0 u_0 \right) \delta w_0 \right]_{\xi} = 0 \\ [M_{x0} \delta \psi_{x0}]_{\xi} = 0 \\ [M_{x\varphi 0} \delta \psi_{\varphi 0}]_{\xi} = 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで δ は変分記号を表し, また $\xi = x/a$ で, カンマ (,) はそれに続く変数に関する微分, τ_s は初期せん断応力, P_0 は初期外圧, σ_c は初期軸圧縮応力を表す.

2・6 振動変位成分に関する基礎方程式 次に, 初期応力により静的変位が生じた状態から, 微小振動する際の基礎方程式を誘導する. 振動変位に関するひずみエネルギー, 運動エネルギー, 外力による仕事を求め, Hamilton の原理を適用し, 振動変位に関する自乗項を省略すると振動変位に関する釣合方程式と境界条件が次のように求まる.

釣合方程式:

$$\begin{cases} \bar{E}_1 \equiv N_{x1,\xi} + N_{\varphi x 1,\varphi} + \frac{1}{a}(N_{x0} u_{1,\xi})_{,\xi} + \frac{1}{a} N_{\varphi 0} u_{1,\varphi\varphi} + \frac{2}{a} N_{\varphi x 0} u_{1,\xi\varphi} + \frac{1}{a} N_{\varphi x 0,\xi} u_{1,\varphi} + (N_{zx 0} \psi_{x1})_{,\xi} + N_{z\varphi 0} \psi_{x1,\varphi} \\ \quad + P_0 w_{1,\xi} - \rho h a(u_{1,tt} + k a \psi_{x1,tt}) = 0 \\ \bar{E}_2 \equiv N_{\varphi 1,\varphi} + N_{x\varphi 1,\xi} + N_{z\varphi 1} + \frac{1}{a}(N_{x0} v_{1,\xi})_{,\xi} + \frac{1}{a} N_{\varphi 0}(v_{1,\varphi\varphi} + 2 w_{1,\varphi} - v_1) + \frac{2}{a} N_{\varphi x 0} v_{1,\xi\varphi} + \frac{1}{a} N_{\varphi x 0,\xi} v_{1,\varphi} + \frac{2}{a} N_{\varphi x 0} w_{1,\xi} \\ \quad + \frac{1}{a} N_{\varphi x 0,\xi} w_1 + (N_{zx 0} \psi_{\varphi 1})_{,\xi} + N_{z\varphi 0} \psi_{\varphi 1,\varphi} - \rho h a(v_{1,tt} + k a \psi_{\varphi 1,tt}) - P_0(v_1 - w_1) = 0 \\ \bar{E}_3 \equiv N_{\varphi 1} - N_{zx 1,\xi} - N_{z\varphi 1,\varphi} - \frac{1}{a}(N_{x0} w_{1,\xi})_{,\xi} + \frac{1}{a} N_{\varphi 0}(w_{1,\varphi\varphi} + 2 v_{1,\varphi} - w_1) + \frac{2}{a} N_{\varphi x 0} v_{1,\xi} + \frac{1}{a} N_{\varphi x 0,\xi} v_1 - \frac{2}{a} N_{\varphi x 0} w_{1,\xi\varphi} \\ \quad - \frac{1}{a} N_{\varphi x 0,\xi} w_{1,\varphi} + N_{z\varphi 0} \psi_{\varphi 1} + \rho h a w_{1,tt} + P_0(u_{1,\xi} + v_{1,\varphi} + w_1) = 0 \\ \bar{E}_4 \equiv \frac{1}{a} M_{x1,\xi} + \frac{1}{a} M_{\varphi x 1,\varphi} + N_{zx 1} + \frac{1}{a} N_{zx 0} u_{1,\xi} + \frac{1}{a} N_{z\varphi 0} u_{1,\varphi} + k \rho h a(u_{1,tt} + a \psi_{x1,tt}) = 0 \\ \bar{E}_5 \equiv \frac{1}{a} M_{\varphi 1,\varphi} + \frac{1}{a} M_{x\varphi 1,\xi} + N_{z\varphi 1} + \frac{1}{a} N_{zx 0} v_{1,\xi} + \frac{1}{a} N_{z\varphi 0}(v_{1,\varphi} + w_1) + k \rho h a(v_{1,tt} + a \psi_{\varphi 1,tt}) = 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (7)$$

境界条件: $\xi = \pm \frac{l}{2a}$ で,

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{B}_1 \delta u_1 \\ \equiv \left[\left(N_{x1} + \frac{1}{a} N_{x0} u_{1,\xi} + \frac{1}{a} N_{\varphi x0} u_{1,\varphi} \right. \right. \\ \left. \left. + N_{zx0} \phi_{x1} + \frac{1}{2} P_0 w_1 \right) \delta u_1 \right]_{\xi} = 0 \\ \bar{B}_2 \delta v_1 \\ \equiv \left[\left\{ N_{x\varphi 1} + \frac{1}{a} N_{x0} v_{1,\xi} + \frac{1}{a} N_{\varphi x0} (v_{1,\varphi} + w_1) \right. \right. \\ \left. \left. + N_{zx0} \phi_{\varphi 1} \right\} \delta v_1 \right]_{\xi} = 0 \\ \bar{B}_3 \delta w_1 \\ \equiv \left[\left\{ N_{zx1} + \frac{1}{a} N_{x0} w_{1,\xi} + \frac{1}{a} N_{\varphi x0} (w_{1,\varphi} - v_1) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} P_0 u_1 \right\} \delta w_1 \right]_{\xi} = 0 \\ \bar{B}_4 \delta \phi_{x1} \equiv [M_{x1} \delta \phi_{x1}]_{\xi} = 0 \\ \bar{B}_5 \delta \phi_{\varphi 1} \equiv [M_{x\varphi 1} \delta \phi_{\varphi 1}]_{\xi} = 0 \end{array} \right. \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで, $k = h^2/(12a^2)$ とし, t は時間, ρ は円筒殻の密度を表す.

3. 基礎方程式の解法

3・1 静的変位の一般解 静的変位の釣合方程式(5)に合応力, 合モーメントを静的成分で表した式を代入し, 整理すると静的変位成分($u_0, v_0, w_0, \phi_{x0}, \phi_{\varphi 0}$)に関する常微分方程式となり, この方程式の一般解が求まるが, この詳細については文献(8)を参照されたい.

3・2 修正 Galerkin 法 式(7), (8)で表される振動変位に関する基礎方程式は, 静的変位に関する N_{x0} などの合応力, 合モーメントを係数にもつ. これらは, 一般に軸方向座標 ξ の関数になっているので, 基礎方程式は変数係数の偏微分方程式となる. したがって本研究では修正 Galerkin 法を用いて固有値解析を行う. まず, 振動変位成分($u_1, v_1, w_1, \phi_{x1}, \phi_{\varphi 1}$)は円周方向に関しては周期関数であるので, 円周方向波数を n とし, $(u_1, v_1, w_1, \phi_{x1}, \phi_{\varphi 1})$ を次のように, 変数分離する.

$$\begin{aligned} & \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \phi_{x1} \quad \phi_{\varphi 1}\} \\ & = e^{jn\varphi} \{U_1 \quad V_1 \quad W_1 \quad \Psi_{x1} \quad \Psi_{\varphi 1}\} \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

変数分離された振動変位成分を振動変位の基礎方程式に代入し, さらに修正ガラーキン法を適用すると, 次式で表される.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_t \int_{\varphi} \int_{\xi} \bar{E}_1 \delta U_1 d\xi - \int_t \int_{\varphi} [\bar{B}_1 \delta U_1]_{\xi} = 0 \\ \int_t \int_{\varphi} \int_{\xi} \bar{E}_2 \delta V_1 d\xi - \int_t \int_{\varphi} [\bar{B}_2 \delta V_1]_{\xi} = 0 \\ \int_t \int_{\varphi} \int_{\xi} \bar{E}_3 \delta W_1 d\xi - \int_t \int_{\varphi} [\bar{B}_3 \delta W_1]_{\xi} = 0 \\ \int_t \int_{\varphi} \int_{\xi} \bar{E}_4 \delta \Psi_{x1} d\xi - \int_t \int_{\varphi} [\bar{B}_4 \delta \Psi_{x1}]_{\xi} = 0 \\ \int_t \int_{\varphi} \int_{\xi} \bar{E}_5 \delta \Psi_{\varphi 1} d\xi - \int_t \int_{\varphi} [\bar{B}_5 \delta \Psi_{\varphi 1}]_{\xi} = 0 \\ \dots\dots\dots (10) \end{array} \right.$$

式(10)において, $U_1, V_1, W_1, \Psi_{x1}, \Psi_{\varphi 1}$ を次式のように N 項の試験関数の和で評価する.

$$\begin{aligned} U_1 &= \sum_{m=1}^N a_m U_1^m(\xi), \quad V_1 = \sum_{m=1}^N b_m V_1^m(\xi) \\ W_1 &= \sum_{m=1}^N c_m W_1^m(\xi), \quad \Psi_{x1} = \sum_{m=1}^N d_m \Psi_{x1}^m(\xi) \\ \Psi_{\varphi 1} &= \sum_{m=1}^N e_m \Psi_{\varphi 1}^m(\xi) \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ここで, $U_1^m(\xi), V_1^m(\xi), W_1^m(\xi), \Psi_{x1}^m(\xi), \Psi_{\varphi 1}^m(\xi)$ は, それぞれ与えられた幾何学的な境界条件を満足する ξ の関数である. また変分関数は次式となる.

$$\begin{aligned} \delta U_1 &= \sum_{s=1}^N \delta a_s U_1^s(\xi), \quad \delta V_1 = \sum_{s=1}^N \delta b_s V_1^s(\xi) \\ \delta W_1 &= \sum_{s=1}^N \delta c_s W_1^s(\xi), \quad \delta \Psi_{x1} = \sum_{s=1}^N \delta d_s \Psi_{x1}^s(\xi) \\ \delta \Psi_{\varphi 1} &= \sum_{s=1}^N \delta e_s \Psi_{\varphi 1}^s(\xi) \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

式(11), (12)を式(10)に代入し, $\delta a_s, \delta b_s, \delta c_s, \delta d_s, \delta e_s (s=1, 2, \dots, N)$ が任意であることを考えると, $a_m, b_m, c_m, d_m, e_m (m=1, 2, \dots, N)$ に関する $5N$ 元の連立微分方程式が求まり, 次のようになる.

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^N [M_{sm}^{(i)a} \ddot{a}_m + M_{sm}^{(i)b} \ddot{b}_m + M_{sm}^{(i)c} \ddot{c}_m \\ & + M_{sm}^{(i)d} \ddot{d}_m + M_{sm}^{(i)e} \ddot{e}_m] \\ & + \sum_{m=1}^N [K_{sm}^{(i)a} a_m + K_{sm}^{(i)b} b_m + K_{sm}^{(i)c} c_m \\ & + K_{sm}^{(i)d} d_m + K_{sm}^{(i)e} e_m] \\ & = 0 \quad (i=1, 2, 3, 4, 5; s=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここで, $(\cdot)$ は時間 t に関する微分を表す.

3・3 境界条件および試験関数 本研究では, 境界条件として(A)軸方向拘束両端固定支持, (B)軸方向不拘束両端単純支持, (C)軸方向拘束両端単純支持および(D)軸方向不拘束両端固定支持の四とおりを考えた. 境界条件はすべて両端において等しいとすると, 半径方向変位 w_1 が円筒殻の中央に関して対称となるモード形(SM形)と, 逆対称になるモード形(AS形)とに分離して試験関数を考えることができる⁽⁸⁾.

3・4 複素固有値問題 各境界条件に応じて3・1節の一般解より静的変位を求め, さらに三角関数で表した試験関数を代入することにより, 振動方程式(13)

の係数を決定することができる。これにより、 $a_m, b_m, c_m, d_m, e_m (m=1, 2, \dots, N)$ に関する $5N$ 元振動方程式が定まる。そこでいま $M_{sm}^{(1)a}, K_{sm}^{(1)a}$ などを成分とするマトリックスを、それぞれ $[M], [K]$ と簡略化して表すと一般に次のような MK 型の振動方程式となる。

$$[M]\{\ddot{A}\} + [K]\{A\} = \{0\} \quad (14)$$

ここで、 $\{A\} = (a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, \dots, c_N, d_N, e_N)$ である。式(14)は係数が複素数であることを除けば通常の固有値問題に帰着することができ、複素固有値 ω^2 を求めると、系の固有振動数 ω_n と系の損失係数 η' が以下の形で求められる。

$$\omega^2 = \omega_n^2(1 + j\eta') \quad (15)$$

4. 計算結果および考察

以上の理論を基に、複合材料積層円筒殻の固有振動数と損失係数の数値解析を行った。材料はCFRPを想定し⁽⁷⁾、以後の解析に共通する材料定数・円筒殻形状のパラメータを表1に示す。また、軸方向モードについては最低次固有振動数となる軸方向1次のモードについて調べ、円周方向波数については、 $n=1 \sim 10$ までを考慮した。境界条件については軸方向不拘束両端単純支持の場合の結果を示す。

4.1 初期応力を受ける場合と受けない場合の振動特性の比較 同じ積層構成・円筒殻形状について、初期応力を受ける場合と受けない場合の振動特性の比較を行った。肉厚 h は、0.001 m とし、積層構成については内層から各層等厚の $90^\circ/0^\circ/90^\circ, 0^\circ/90^\circ/0^\circ, 90^\circ/0^\circ$ の3種類について調べた。初期応力は、それを加えても座屈もしくは破損しない程度の大きさとし⁽⁹⁾、ここでは初期せん断応力 τ_s が加わる場合の結果の例についてのみ図5～7に示す。

計算結果より、固有振動数は加える初期せん断応力を大きくしていくほど低下していくが、損失係数は逆に上昇することがわかる。この傾向は本研究で考えた他の2種類の初期応力の場合についても同様であった。固有振動数が低下するのは、初期応力を受けるこ

とにより円筒殻全体の剛性が低下することが原因であると考えられる。また、減衰が特に大きくない自由振動の場合については、損失係数 η' は近似的に、

$$\eta' = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{D_s}{W_s} \quad (16)$$

ここで、

W_s : 1 サイクル中のひずみエネルギーの最大値

D_s : 1 サイクル中に減衰により失う散逸エネルギー

で表される⁽¹⁰⁾。式(16)より、損失係数が上昇するのは、減衰により失う散逸エネルギーは、初期応力を加えることにより変化しないが、ひずみエネルギーの最大値は、初期応力を受けることにより低下することが原因であることがわかる。以上のように、本研究で考慮したような初期応力が加わる場合には、固有振動数と損失係数の変化の傾向は相反関係にあることがわかる。

4.2 積層構成が振動特性に与える影響 4.1 節のように初期応力を受ける場合には、材料の座屈や破損を考える必要があるため、積層構成を変化させたとき、すべての場合において座屈や破損が起こらないように初期応力を設定することは極めて難しい。したがって、本節では座屈や破損といった実際上問題となる力学的な問題を考慮しなくてもよいように、初期応力を加えず、純粋に積層構成を変えることによる振動特性の変化を考えることにする。積層構成は、3層に

(a) The variation of natural frequencies

(b) The variation of loss factors

Fig. 5 Stacking sequence $90^\circ/0^\circ/90^\circ$, Prestress τ_s

Table 1 Parameters used in the analysis

Radius	a	=	0.1 [m]
Length	l	=	1.0 [m]
Density	ρ	=	1555 [kg/m ³]
Poisson's ratio	ν_{12}	=	0.26
Young's modulus	E_1^*	=	$172(1 + 0.0014j)$ [GPa]
	E_2^*	=	$7.2(1 + 0.0134j)$ [GPa]
Shearing modulus	G_{12}^*	=	$3.76(1 + 0.0224j)$ [GPa]
	G_{z1}^*	=	$3.76(1 + 0.0224j)$ [GPa]
	G_{z2}^*	=	$3.76(1 + 0.0224j)$ [GPa]

(a) The variation of natural frequencies

(b) The variation of loss factors

Fig. 6 Stacking sequence $0^\circ/90^\circ/0^\circ$, Prestress τ_s

(a) The variation of natural frequencies

(b) The variation of loss factors

Fig. 8 Influences of stacking sequences, Thickness $h=0.001$ m

(a) The variation of natural frequencies

(b) The variation of loss factors

Fig. 7 Stacking sequence $90^\circ/0^\circ$, Prestress τ_s

いては $90^\circ/0^\circ/90^\circ$, $0^\circ/90^\circ/0^\circ$, 2 層については $90^\circ/0^\circ$, $15^\circ/-15^\circ$, $30^\circ/-30^\circ$, $45^\circ/-45^\circ$, $60^\circ/-60^\circ$, $75^\circ/-75^\circ$ の場合について調べた。肉厚 h は, 0.001 m と 0.01 m の二とおりについて調べ, その結果をそれぞれ図 8

と 9 に示す。

図 8, 9 よりわかるように固有振動数と損失係数は積層構成を変えることにより大きく変化する。本研究で想定した CFRP の材料で, 肉厚 $h=0.001$ m の場合には, 90° に近い繊維方向角の層を多く含むもののほうが軸方向の剛性は低くなるが, 逆に円周方向の剛性は高くなる。したがって, 高次の円周方向波数ではその影響が大きく出てくることになり, 固有振動数は他の積層構成のものよりも高くなっている。例えば, $90^\circ/0^\circ$ の積層構成では, 90° 層が含まれているけれども, 円周方向の剛性を高くすることには寄与していない 0° 層も同時に含まれている。一方, $75^\circ/-75^\circ$ の積層は 90° 層を含んでいないけれどもともに 90° に近い層同士である。したがって, 0° 層も含む $90^\circ/0^\circ$ の積層構成よりも, $75^\circ/-75^\circ$ の積層構成のほうが円周方向の剛性が高いと考えられ, 高次の円周方向波数において固有振動数が高くなっている。これと同様のことが肉厚 $h=0.01$ m の場合についてもいえる。

損失係数については, 積層構成, 厚さによって複雑に変化しているが, 高次の円周方向波数においてはモードが異なってもその差は小さく, 一方基本振動数を与えるモードの円周方向波数の周辺の低次の円周方向波数では, 損失係数はモードが異なるとその値の変化も大きい。

図 8, 9 より, 積層構成と厚さによって固有振動数と

(a) The variation of natural frequencies

(b) The variation of loss factors

Fig. 9 Influences of stacking sequences, Thickness $h = 0.01$ m

損失係数はさまざまな挙動を示し、振動特性の良否に関し固有振動数と損失係数をともに考慮した総合的な評価をすることは非常に難しいことがわかる。

5. 振動特性評価法の検討

減衰の比較的大きい構造物の振動特性のよい積層構成とは、従来の伝統的な研究の流れでいえば、固有振動数と損失係数がともに高い積層構成のことをいうと考えてよいであろう。しかし、4章の結果よりわかるように、固有振動数と損失係数をともに高くするような積層構成を見つけることは非常に困難であるといえる。以上のことを踏まえ、振動特性の評価法を考察してみると、まず損失係数を高くすることは系の減衰特性をよくすることであるので物理的には問題がない。しかし固有振動数については、従来の研究の多くが振動特性の最適化の一つの評価法として基本振動数を最大化することを目的としているが、外部からの動的励振入力を受ける場合や使用条件などを考慮に入れば、必ずしも基本振動数を高くすることが振動特性をよくすることにはならず、かえって共振などの危険な現象を招く恐れもあると思われる。すなわち、厳密な意味での構造物の振動特性の最適化は、一般に動的励振入力あるいは使用条件を特定しないと評価できないと考えることができよう⁽⁵⁾⁽⁶⁾。しかしながらそれらの

条件が指定されない場合に、円筒殻のように固有振動数分布密度が高い構造物そのものの振動特性に関する次善の最適化の基準として、いかなるモードの自由振動が励起された場合であってもその振動ができるだけ短時間で速やかにおさまるという評価法が考えられるように思われる。そこで、ここでは自由振動応答特性に着目した評価法を考える。

構造減衰特性を表す損失係数は、一般には定常強制振動に対して定義されるものではあるが、これを自由振動にも近似的に適用でき、自由振動応答は、式(15)の ω_n と η' を用いて、

$$\{A\} = \exp\left(-\frac{\omega_n \eta'}{2} t\right) \{A_1\} \cos(\omega_d t + \phi) \cdots \cdots (17)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 + (\eta'/2)^2}$$

ここで、

$\{A_1\}$: 定数ベクトル

ϕ : 初期位相

のように表現されることが知られている⁽¹¹⁾。このとき、それぞれのモードにおける減衰項すなわち、 $\omega_n \eta'$ ができるだけ大きいほど振動特性がよいと考えることができるから、異なる積層構成の円筒殻で比較した場合には、軸方向最低次のモードの各円周方向波数における $\omega_n \eta'$ の値を調べ、その中で最も小さい $\omega_n \eta'$ の値をとるモードに注目し、その最小値 $\omega_n \eta'_{\min}$ をできるだけ大きくすることを、本論文ではFRP積層円筒殻のような構造物の振動特性最適化の一評価法として提案したい。これは見方を変えれば、一般の制振器あるいは制御系の特性根最適配置法の概念とほぼ等価のものと考えることができる。

従来の方法との比較を行うために、固有振動数と損失係数の積の最小値 $\omega_n \eta'_{\min}$ と基本振動数 $\omega_{n \min}$ との比較結果を表2と3に示す。計算結果よりわかることは、まず、肉厚 $h = 0.001$ m の場合には、 $\omega_n \eta'$ の最小値が高いのは $30^\circ/-30^\circ$, $45^\circ/-45^\circ$, $60^\circ/-60^\circ$ の積層構成の場合である。最低次固有振動数が最も高い $90^\circ/0^\circ/90^\circ$ の積層構成は従来の基本振動数を最大化するという観点から考えれば最も振動特性がよいということになるが、損失係数は逆に他の積層構成よりもかなり低い値となっているため、この影響が大きく効いて $\omega_n \eta'$ の最小値が小さくなっているものと考えられる。したがって新たに提案した評価法では $90^\circ/0^\circ/90^\circ$ の積層構成は振動特性が必ずしもよくない積層構成であるといえる。本評価法で振動特性がよいと評価される $30^\circ/-30^\circ$, $45^\circ/-45^\circ$, $60^\circ/-60^\circ$ の積層構成は損失係数が $90^\circ/0^\circ/90^\circ$ の積層構成に比べてはるかに高く、これより固有振動数と損失係数の影響を総合して考え

Table 2 The comparisons of $\omega_n \eta'_{\min}$ with $\omega_{n\min}$ for different stacking sequences, Thickness $h=0.001$ m

Stacking sequence	$\omega_n \eta'_{\min}$ [rad/s]	$\omega_{n\min}/2\pi$ [Hz]
90°/0°/90°	4.235	227.2
0°/90°/0°	7.450	161.8
90°/0°	7.458	199.6
15°/-15°	5.688	168.3
30°/-30°	9.951	131.5
45°/-45°	8.788	116.3
60°/-60°	9.100	102.3
75°/-75°	8.197	113.5

Table 3 The comparisons of $\omega_n \eta'_{\min}$ with $\omega_{n\min}$ for different stacking sequences, Thickness $h=0.01$ m

Stacking sequence	$\omega_n \eta'_{\min}$ [rad/s]	$\omega_{n\min}/2\pi$ [Hz]
90°/0°/90°	32.452	433.0
0°/90°/0°	24.278	435.5
90°/0°	26.014	473.4
15°/-15°	21.262	416.5
30°/-30°	28.597	399.1
45°/-45°	27.356	333.0
60°/-60°	28.903	250.6
75°/-75°	20.861	230.8

ると、30°/-30°、45°/-45°、60°/-60°の積層構成が本解析で調べた計算例の中では振動特性がよいものと考えることができる。

肉厚 $h=0.01$ m の場合は 30°/-30°、45°/-45°、60°/-60°の積層構成に加えて 90°/0°/90°の積層構成の場合も、新たに提案した振動特性評価法により振動特性がよいものといえる。これは厚さが変わることにより 90°/0°/90°の積層構成の損失係数が上昇したことが原因であると考えられる。このように、厚さにより振動特性がよい積層構成が変わることにも注意を要する。

以上まとめると、本論文で提案した新しい評価法は固有振動数と損失係数をともに考慮して総合的に評価するという点において、減衰特性の高い構造物そのものとしての評価法としては従来の評価法よりも実用的ではないかと考える。

6. 結 言

本研究では FRP 積層円筒殻について、その減衰も考慮して、まず 3 種類の初期応力の大きさあるいは積層構成が系の振動特性、すなわち固有振動数と損失係数に与える影響を調べた。その結果、本研究で考慮したような初期応力を受ける場合には、損失係数は上昇するが固有振動数は逆に低下するという結果が得られた。さらに、積層構成を変えることにより固有振動数と損失係数は複雑な挙動を示し、固有振動数と損失係数をともに高くする組合せを見つけることは難しいということがわかった。

以上のことを踏まえて、構造物そのものとしての振動特性の最適化という観点から、その自由振動に着目し、各モードにおける固有振動数と損失係数の積の最小値をできるだけ大きくするという、振動特性の最適化の一評価法を提案した。そして従来の伝統的な振動特性の一評価法である基本振動数をできるだけ大きくするという評価法との比較・検討を行い、その違いについて考察した。

文 献

- (1) 成沢哲也・川原正言・鈴木浩平, 機論, **64**-621, C(1998), 1479-1484.
- (2) 成沢哲也・川原正言・鈴木浩平, 機講論, **98**-8(I), B(1998-8), 425-428.
- (3) 新田敏則・成田吉弘, 機講論, **98**-8, B(1998-8), 473-476.
- (4) 太田佳樹・成田吉弘・引地圭, 機講論, **98**-8(I), B(1998-8), 513-516.
- (5) Yamakawa, H., *New Directions in Optimum Structural Designs* (Atrek et al. editors), (1984), 249-266, John Wiley Interscience.
- (6) Yamakawa, H., Koga, T. and Kishimoto, S., Proc. CAD/CAM, Robotics and Automation Int. Conf., (1985), 127-131.
- (7) Sivadas, K. R. and Ganesan, N., *J. Sound Vib.*, **172**-1(1994), 47-61.
- (8) 井川寛隆・山下泰裕・遠藤満, 機論, **62**-600, C(1996), 3005-3012.
- (9) 三木光範・福田武人・元木信弥・北條正樹, 複合材料(1997), 140, 共立出版.
- (10) 立道有年・浦田喜彦・安田弘, 機論, **40**-335, 1(1974), 1899-1907.
- (11) 長松昭男, モード解析, (1985), 49, 培風館.