鉛直励振を受ける弾性構造物と長方形容器内スロッシングの
非線形連成振動*

(第2報, 同調条件のずれの影響)

池田 隆^{*1}, 村上 新^{*1}Nonlinear Vibrations of an Elastic Structure Subjected to Vertical Excitation and Coupled with Sloshing in a Rectangular Tank
(2nd Report, Influences of the Deviation of Tuning Condition on Resonance Curves)Takashi IKEDA^{*2} and Shin MURAKAMI^{*2} Shimane University, Faculty of Science and Engineering, 1060 Matsue, Shimane, 690-8504 Japan

This paper deals with the nonlinear coupled-vibrations of an elastic structure and liquid sloshing in an attached rectangular tank. The structure is vertically subjected to a sinusoidal excitation. The natural frequencies of the structure and the liquid sloshing are in the ratio of two to one, which is called a tuning condition. Influence of a deviation of the tuning condition on the resonance curves is focused on. In the theoretical analysis, the following results were obtained: (a) the small deviation of the tuning condition leads to causing an almost periodic oscillation and a chaotic oscillation, (b) these oscillations appear for a negative detuning in high liquid levels, and a positive deviation in low liquid levels, and (c) the coupled vibrations can occur separately in two regions of excitation frequency when the comparatively large deviation exists. In experiments, the experimental resonance curves were in agreement with the theoretical results, and almost periodic oscillations were observed.

Key Words: Vibration Coupled with Fluid Motion, Sloshing, Nonlinear Vibration, Rectangular Tank, Vertical Excitation, Autoparametric Resonance, Resonance Curve, Tuning Condition, Almost Periodic Oscillation, Chaotic Oscillation

1. 緒 言

部分的に液体で満たされた容器をもつ弾性構造物の振動問題は高架の貯水槽や液化ガスのタンクなどに見られ, 防災上の観点から重要な問題である. 一方, 最近では容器内液体のスロッシングを利用した液体ダンパーが構造物の制振装置として実用化されている^{(1)~(3)}. これらの例のように, 液体スロッシングが構造物の動的挙動に及ぼす影響を予測することは工業的に重要な問題である.

スロッシングにより生じる流体の慣性力の本質的に非線形であるため, その理論的解析は複雑である. 従来, 構造物に作用する水平方向の正弦励振を扱った研究は, 線形解析^{(4)~(6)}. 実験的解析^{(7)~(11)} がほとんどであるが, 非線形解析^{(12)~(19)} もいくつか行われている. その中で, 著者ら^{(17)~(19)} は, 解析結果が実験結果とも

定量的によく一致することを報告した. 一方, 鉛直方向の正弦励振を受ける場合を扱った研究は, Ibrahim らによる円筒容器^{(20)~(24)}, および著者らによる長方形容器⁽²⁵⁾ を用いた場合の非線形解析に限られる. 後者⁽²⁵⁾ では, 構造物と液体スロッシングモードの固有振動数比が2:1となる同調条件が満たされる場合の非線形連成系を対象とし, おもに液体の深さによる共振曲線の変化について理論的, 実験的に調べた.

本論文はその続報であり, 同様の系において同調条件にずれが存在する場合を対象とし, 流体力の非線形性を考慮して, 共振曲線を解析的に求め, 数値シミュレーション結果と比較した. また, 実験においても, 理論解析結果と同様の特徴が現れることを確認した.

2. 理論解析

2・1 運動方程式 図1に理論解析モデルを示す. ここで, x 軸を静止状態の液面にとり, 容器とともに移動する直交座標系 $O-xyz$ を図1に示すように定義する. 液体の挙動は xz 平面内の二次元問題とする. 弾性構造物を, 質量 m , ばね定数 k , 減衰係数 c をも

* 原稿受付 1999年12月22日.

^{*1} 正員, 島根大学総合理工学部 (☎ 690-8504 松江市西川津町1060).

E-mail: tiked@riko.shimane-u.ac.jp

Fig. 1 The model for theoretical analysis

つ—自由度系にモデル化し、静止状態から測定した質量 m の鉛直変位を z_1 とする。質量 m の上には、深さ h の液体で満たされた長さ l 、幅 d の長方形剛体容器が取付けられ、位置 x における液面変位を η とする。液体については、容器に対して相対運動する液体の速度ポテンシャルを ϕ 、圧力を P 、粘性係数を μ 、密度を ρ 、質量を m_l 、および容器底面に働く z 方向の流体力を F_l とする。また、鉛直方向の正弦外力の振幅を F_0 、その振動数を ω 、時間を t 、重力加速度を g とする。ここで、次の無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} z_1' &= z_1/l, \quad \eta' = \eta/l, \quad x' = x/l, \quad z' = z/l, \\ h' &= h/l, \quad d' = \rho d l^2 / M, \quad \phi' = \phi / (l^2 p_1), \\ \nu &= m/M, \quad k' = k / (M p_1^2), \quad c' = c / (M p_1), \\ \mu' &= \mu / p_1, \quad F_l' = F_l / (M l p_1^2), \quad P' = P / (\rho l^2 p_1^2), \\ F_0' &= F_0 / (M l p_1^2), \quad \lambda_n' = n\pi, \quad \omega' = \omega / p_1, \quad t' = p_1 t, \\ [M &= m + m_l, \quad p_n = \sqrt{g \lambda_n \tanh(\lambda_n h)}, \quad \lambda_n = n\pi/l] \\ (n &= 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

式(1)の [ ] 内は有次元量であり、 p_n は液面スロッシングの n 次モードの固有振動数を表す。式(1)の無次元量を用いると、流体挙動に対する連続の式、および圧力方程式は無次元表示で次式となる⁽²⁶⁾。ただし、以下では無次元量を表す記号' をすべて省略する。

$$\Delta \phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\phi_x'^2 + \phi_z'^2) + \frac{z}{\phi_1} + P - \frac{1}{2} \dot{z}_1'^2 + \mu \phi = -\dot{z}_1 z \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $\phi_1 = \lambda_1 \tanh(\lambda_1 h)$ であり、 ϕ_x などの添字はその座標に関する偏微分、記号' は時間 t に関する微分を表す。容器壁面と底面における流速の境界条件、お

よび液面の運動学的境界条件⁽²⁶⁾ は、次式となる。

$$\phi_x = 0 \quad (\text{at } x = \pm 1/2), \quad \phi_z = 0 \quad (\text{at } z = -h) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \phi_z - \phi_x \eta_x \quad (\text{at } z = \eta) \quad \dots\dots\dots (5)$$

自由液面 $z = \eta$ では圧力 $P = 0$ であるので、式(3)より、流体の圧力方程式に対する境界条件は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\phi_x'^2 + \phi_z'^2) + \frac{z}{\phi_1} - \frac{1}{2} \dot{z}_1'^2 \\ + \mu \phi + \dot{z}_1 z = 0 \quad (\text{at } z = \eta) \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

構造物についての運動方程式は、次式となる。

$$\nu \ddot{z}_1 + c \dot{z}_1 + k z_1 = F_l + F_0 \cos \omega t + dh / \phi_1 \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(7)中の流体力 F_l は、次式で与えられる。

$$F_l = -d \int_{-1/2}^{1/2} P(x, z, t) |_{z=-h} dx \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(8)の $P(x, z, t)$ は式(3)より得られる。

2.2 モード方程式 線形系の自由振動解析から得られる固有関数を用い、 ϕ および η の解を次式のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, z, t) &= a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{2n-1}(t) \sin(\lambda_{2n-1} x) \right. \\ &\quad \left. \cosh\{\lambda_{2n-1}(z+h)\} / \cosh(\lambda_{2n-1} h) \right. \\ &\quad \left. + a_{2n}(t) \cos(\lambda_{2n} x) \cosh\{\lambda_{2n}(z+h)\} \right. \\ &\quad \left. / \cosh(\lambda_{2n} h) \right] \\ \eta(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_{2n-1}(t) \sin(\lambda_{2n-1} x) \right. \\ &\quad \left. + b_{2n}(t) \cos(\lambda_{2n} x) \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

上式中の $a_0(t)$ 、 $a_n(t)$ 、 $b_n(t)$ ($n=1, 2, \dots$) は時間に関する未知関数である。いま、式(7)で表される構造物系の固有振動数を $p_0 \equiv \sqrt{k/(\nu + dh)}$ と定義し、本報では $p_0 \approx 2p_1$ の内部共振の条件がほぼ満たされ、 $p_0 \approx \omega$ 付近における応答挙動を解析する。ここで微小パラメータ ε を導入し、 ε のオーダーを記号 $O(\varepsilon)$ で表す。式(9)の解の精度を $O(\varepsilon)$ として、各量を次式のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} a_1, b_1; c, \mu &= O(\varepsilon^{1/3}), \\ a_0, a_2, b_2 &= O(\varepsilon^{2/3}), \\ a_3, b_3; F_0 &= O(\varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ただし、式(10)に示されていない a_n, b_n は $O(\varepsilon)$ よりも小さいとする。 η を微小と考えて式(5)、(6)を $\eta = 0$ のまわりでテーラー展開した後、式(9)を代入し、式(10)を考慮して $O(\varepsilon)$ の精度で両辺の定数項、 $\sin(\lambda_1 x)$ 、および $\cos(\lambda_1 x)$ の係数を等置する。また、式(7)と合せて、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 &Q_1 \ddot{z}_1 + c \dot{z}_1 + k z_1 + Q_2 \dot{a}_0 + \mu Q_2 a_0 + Q_3 a_1^2 + Q_4 \dot{z}_1^2 \\
 &= F_0 \cos \omega t, \\
 &\dot{a}_1 + \mu a_1 + \left(\frac{1}{\phi_1} + \dot{z}_1 \right) b_1 - \frac{1}{2} \phi_1 \dot{a}_1 b_2 - \frac{1}{2} \phi_2 \dot{a}_2 b_1 \\
 &\quad + Q_5 \dot{a}_1 b_1^2 + Q_6 a_1 a_2 + Q_7 a_1^2 b_1 = 0, \\
 &\dot{b}_1 - \phi_1 a_1 + Q_8 a_1 b_2 + Q_9 a_2 b_1 + Q_{10} a_1 b_1^2 = 0, \\
 &\dot{a}_0 + \mu a_0 + \frac{1}{2} \phi_1 \dot{a}_1 b_1 + Q_{11} a_1^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} \mu \phi_1 a_1 b_1 = 0, \\
 &\dot{a}_2 + \mu a_2 + \left(\frac{1}{\phi_1} + \dot{z}_1 \right) b_2 - \frac{1}{2} \phi_1 \dot{a}_1 b_1 + Q_{12} a_1^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \mu \phi_1 a_1 b_1 = 0, \\
 &\dot{b}_2 - \phi_2 a_2 + Q_{13} a_1 b_1 = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ここに, $\phi_n = \lambda_n \tanh(\lambda_n h)$ であり, Q_i ($i=1, 2, \dots, 13$) は定数で第1報⁽²⁵⁾のものと同一である. ここでは式(11)をモード方程式と呼ぶ.

2・3 同調点付近の共振曲線 式(11)の第1, 第4式より a_0 を消去すると, 次式を得る.

$$\begin{aligned}
 &Q_{14} \ddot{z}_1 + c \dot{z}_1 + k z_1 + Q_{14} \dot{a}_1 b_1 + Q_{15} a_1^2 \\
 &\quad + \mu Q_{14} a_1 b_1 = F_0 \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (12)
 \end{aligned}$$

ここに, $Q_{14} = -\phi_1 Q_2/2$, $Q_{15} = Q_3 - Q_2 Q_{11}$ である. また, 式(11)の第2, 第3式より次式が得られる.

$$\begin{aligned}
 &\dot{b}_1 + \mu \dot{b}_1 + (1 + \phi_1 \dot{z}_1) b_1 + S(\dot{a}_n, a_n, \dot{b}_n, b_n) = 0 \\
 &\quad \dots\dots\dots (13)
 \end{aligned}$$

ここに, $S(\dot{a}_n, a_n, \dot{b}_n, b_n)$ ($n=1, 2$) は非線形項を表す. 式(12), (13)では, z_1 と b_1 (または a_1) の線形の連成項は存在せず, 非線形項のみで連成し, 内部共振の条件 $p_0 \approx 2p_1$ が成立している. また, 式(13)より $\dot{z}_1$ は b_1 モードに対して係数励振作用をもつことがわかる. このような系はオートパラメトリック系⁽²⁷⁾⁽²⁸⁾と呼ばれている.

数値シミュレーション波形を基に, 同調点(または内部共振の条件) $p_0 \approx 2p_1 \approx \omega$ 付近における式(11), (12)の強制振動解を次のように仮定する.

$$\left. \begin{aligned}
 &z_1 = u_1 \cos \omega t - v_1 \sin \omega t \\
 &a_1 = u_2 \cos \frac{1}{2} \omega t - v_2 \sin \frac{1}{2} \omega t \\
 &\quad + c_2 \cos \frac{3}{2} \omega t - d_2 \sin \frac{3}{2} \omega t \\
 &b_1 = u_3 \cos \frac{1}{2} \omega t - v_3 \sin \frac{1}{2} \omega t \\
 &\quad + c_3 \cos \frac{3}{2} \omega t - d_3 \sin \frac{3}{2} \omega t \\
 &a_2 = e_1 \cos \omega t - f_1 \sin \omega t \\
 &b_2 = e_2 \cos \omega t - f_2 \sin \omega t + r_2
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

(a) Amplitude of the component of ω in z_1

(b) Amplitude of the component of $(1/2)\omega$ in b_1

Fig. 2 Theoretical resonance curves for $\nu=0.930$, $k=4.0$, $h=0.6$, $d=0.116$, $c=0.02$, $\mu=0.025$ and $F_0=0.0013$ when the relationship $p_0 - 2p_1 = 0$ holds

ここに, 振幅 $u_i, v_i, c_i, d_i, e_i, f_i$, および定数項 r_2 は時間的に緩やかに変化する変数である. 式(14)を式(11), (12)に代入し, $O(\epsilon)$ の精度で振動数 ω , $(1/2)\omega$, $(3/2)\omega$, および定数成分について調和バランスをとると, 式(14)の未知変数に関する非線形代数方程式が既報⁽²⁶⁾と同様に得られる. ここでは, その具体的な表示は省略する.

液体を同質量の固体で置き換えた場合には図1の系は完全に一自由度系となり, その構造物系(主振動系と呼ぶ)の変位 z_1 についての強制振動解の振幅 R は次式で与えられる.

$$R = F_0 / \sqrt{\{k - (\nu + dh)\omega^2\}^2 + (c\omega)^2} \quad \dots\dots\dots (15)$$

3. 数値計算例

図2(a), (b)は, 2章で得られた非線形代数方程式を数値的に解き, それぞれ構造物の鉛直変位 z_1 の ω 成分(振幅 $\sqrt{u_1^2 + v_1^2}$), 液面スロッシングの一次モード b_1 の $(1/2)\omega$ 成分(振幅 $\sqrt{u_3^2 + v_3^2}$)についての共振曲線を示す. パラメータの値には液位が比較的深い場合の後述の実験装置Aにほぼ対応する値を選び, $\nu=0.930$, $k=4.0$, $h=0.60$, $d=0.116$, $c=0.02$, $\mu=0.025$, および $F_0=0.0013$ である. このときには, p_0

$=2p_1 (=2.0)$ の同調条件が正確に満たされている。図2中の実線は安定解、破線は不安定解を表す。また、●印は、式(11)を直接数値積分し、そのシミュレーション波形をFFT分析して得られた各振動成分の振幅を表す。理論解析による共振曲線と数値シミュレーション結果はよく一致している。図2(a)の曲線 P_1 は同図(b)の曲線 P_2 に対応する。 z_1 の曲線 $A_1B_1C_1D_1$ は完全に式(15)と一致し、対応する b_1 の曲線 $A_2B_2C_2D_2$ の振幅は零である。線形系では区間 BC は振幅が発散する Mathieu 形の不安定領域となる。しかし、本報で議論している非線形系では安定な分枝 EFC が現れ、その各分枝 $E_1F_1C_1$, $E_2F_2C_2$ 上では、それぞれ振動数 ω の調和振動、振動数 $(1/2)\omega$ の分数調波振動が発生する。

次に、離調パラメータ $\sigma_1 \equiv p_0 - 2p_1$ を定義し、共振曲線に及ぼす同調条件のずれ(内部共振の条件のずれ)の影響を調べる。図2からばね定数だけを $k=3.80$ に変えた場合の共振曲線を図3に示す。このとき $\sigma_1 = -0.0503$ である。図3では、図2の安定な分枝 EF に対応する分枝上に不安定区間 GH が現れる。数値シミュレーションによると、その区間では振幅は発散せず、振幅変調が生じる。したがって、点 G, H はホップ分岐点であることがわかる。図3中に示す細い縦線は振幅の変調範囲を示す。

(a) Amplitude of the component of ω in z_1

(b) Amplitude of the component of $(1/2)\omega$ in b_1

Fig. 3 The influence of the detuning parameter $\sigma_1 \equiv p_0 - 2p_1$ on the resonance curves as Fig. 2 but $k=3.80$, i. e., when $\sigma_1 = -0.0503$

図4, 5に図3の $\omega=1.943$ [図4(a), (b)], 1.946 [図5(a), (b)] における定常状態のシミュレーション波形、および対応する $(z_1, \dot{z}_1)$ 平面上のポアンカレマップを示す。図4(a)では振幅が時間的に緩やかに変調する概周期振動が発生し、図4(b)のポアンカレマップがループ状になっていることより、同じ形状の包絡線が規則的に繰返されていることがわかる。一方、図5(a)では包絡線の規則性は崩れており、また、図5(b)ではポアンカレマップが限られた範囲内に分布していることによりカオスの振動が現れている。

(a) Time histories

(b) Poincaré map

Fig. 4 Time histories and Poincaré map at $\omega=1.943$ in Fig. 3

(a) Time histories

(b) Poincaré map

Fig. 5 Time histories and Poincaré map at $\omega=1.946$ in Fig. 3

(a) Amplitude of the component of ω in z_1 (b) Amplitude of the component of $(1/2)\omega$ in b_1 Fig. 6 The influence of the detuning parameter σ_1 on the resonance curves as Fig. 2 but $k=3.68$, i.e., when $\sigma_1=-0.0813$ (a) Amplitude of the component of ω in z_1 (b) Amplitude of the component of $(1/2)\omega$ in b_1 Fig. 8 Theoretical resonance curves for $\nu=0.930$, $k=4.0$, $h=0.25$, $d=0.28$, $c=0.02$ and $\mu=0.025$ when the detuning parameter $\sigma_1=0$ (a) Amplitude of the component of ω in z_1 (b) Amplitude of the component of $(1/2)\omega$ in b_1 Fig. 7 The influence of the detuning parameter σ_1 on the resonance curves as Fig. 2 but $k=4.30$, i.e., when $\sigma_1=+0.0741$ (a) Amplitude of the component of ω in z_1 (b) Amplitude of the component of $(1/2)\omega$ in b_1 Fig. 9 The influence of σ_1 on the resonance curves as Fig. 8 but for $k=4.18$, i.e., when $\sigma_1=+0.0445$

ることがわかる。

図3の場合からさらにばね定数を小さくし、 $k=3.68$ とした場合の共振曲線を図6に示す。このとき、離調度の絶対値は図3より大きく、 $\sigma_1=-0.0813$ である。図6(b)に示すように、 b_1 の振幅零の不安定解が区間 B_2C_2, I_2J_2 の2箇所に見れるため、非線形連成振動は対応する ω の二つの範囲に分離して発生する。この場合も区間 GH で概周期振動が現れる。

図7は、図2からばね定数だけを $k=4.30$ に変えて、 $\sigma_1=+0.0741$ となった場合の共振曲線である。図7では、図2の点Bに対応する点が亜臨界ピッチフォーク分岐から超臨界ピッチフォーク分岐に変化し、点Cに対応する点は点Bとは逆に変化している。ばね定数をさらに $k=4.32$ に増すと、 b_1 の振幅零の不安定解が ω の二つの領域に分かれ、対応する連成振動が二つに分かれて発生する(図は省略する)。このように、液位が比較的深い場合、離調度 σ_1 の値が正のときには、図3に示したような概周期振動は発生しないことを確認している。

次に、図2の場合よりも液位が浅く、 $h=0.25$, $d=0.28$ (他のパラメータの値は図2と同じ)の場合の共振曲線を図8に示す。このときは、 $\sigma_1=0$ である。前報⁽²⁵⁾に示したように、 b_1 の共振曲線は右側に傾く漸硬形となっている。

図9は、図8からばね定数だけを $k=4.18$ に変えて、 $\sigma_1=+0.0445$ となった場合の共振曲線である。液位が浅い場合には、深い場合とは逆に離調度 σ_1 の値が正のとき、不安定解の区間 GH が現れ、概周期振動が発生する。また、液位が浅い場合、 σ_1 の値が負のときには概周期振動の発生は見られなかった。

なお、液位の高低にかかわらず、概周期振動は離調

度 σ_1 の絶対値がある値以上になって初めて発生することを確認している。

以上のように、同調条件にずれが存在し、液位が比較的深い場合には離調度がその閾値 $\sigma_{s1}(<0)$ より小さくなると(すなわち $\sigma_1 \leq \sigma_{s1} < 0$ のとき)、安定な分枝上に二つのホップ分岐点が見れ、その区間で概周期振動が発生する。一方、液位が浅い場合には閾値 $\sigma_{s2}(>0)$ より大きくなると(すなわち $\sigma_1 \geq \sigma_{s2} > 0$ のとき)概周期振動が発生する。この種の概周期振動は、単振子をもつばね質量系^{(29)~(31)}、ピッチングとローリングが連成する船⁽³²⁾、および集中質量をもつL字型はり⁽³³⁾のような、固有振動数振動数比が2:1のオートパラメトリック系においても発生することが報告されている。

Table 1 Dimensions of apparatuses A, B and C

Apparatus	A	B	C
Structure mass: m kg	4.807	4.954	5.025
Spring constant: k N/m	6036	6037	5919
Damping coefficient: c Ns/m	1.178	1.211	1.240
Tank length: l mm	100	100	100
Tank width: d mm	60	60	85
Water depth: h mm	60	60	60
Water mass: m_l kg	0.359	0.359	0.509
Viscosity: μ 1/s	0.439	0.439	0.439
Force: F_0 N	0.112	0.112	0.241
Position of sensor S_2 : x mm	34.0	34.5	14.0
Natural frequency: p_0 Hz	5.44	5.37	5.21
Natural frequency: p_1 Hz	2.73	2.73	2.73

(a) Amplitudes of z_1

(b) Amplitudes of η

Fig. 11 A comparison of the theoretical and experimental resonance curves for apparatus A when the detuning $\sigma_1 = -0.018$ Hz ($\sigma_1/p_1 = -0.0066$)

Fig. 10 Experimental apparatus

4. 実験装置および実験結果

図10に実験装置の概略を示す。その構成は第1報⁽²⁵⁾とまったく同様である。片持ばり(Spring steel)の他端にT字型の構造物を取付け、その構造物は支持部に玉軸受を装着した2本のアームによって支持され、近似的に鉛直運動をするように組立てられた。供試液体には水性絵の具を添加した水道水を用いた。構造物の上には長方形容器を取付け、薄いアルミニウム板を介して電磁加振器(Exciter)および振動加振制御装置により大きさが一定に制御された正弦力で構造物を鉛直に加振し、レーザ式変位センサ S_1, S_2 により構造物の変位 z_1 と液面変位 η を測定した。表1に、実験に用いた装置A~Cの諸元を示す。各装置では、構造物の質量 m とばね定数 k の値を調整することにより、構造物の固有振動数 $p_0[(1/2\pi)\sqrt{k/(m+m_i)} \text{ Hz}]$ と液面スロッシングの固有振動数 $p_1[(1/2\pi)\sqrt{g\lambda_1 \tanh(\lambda_1 h)} \text{ Hz}]$ の間に $p_0 \approx 2p_1$ の同調条件がほぼ満たされている。

図11(a), (b)は、それぞれ装置Aで得られた構造物および液面の共振曲線を示す。 $\sigma_1(\equiv p_0 - 2p_1) = -0.018 \text{ Hz}$ であった。無次元量では $\sigma_1/p_1 = -0.0066$

であり、同調条件のずれは非常に小さい。○, ●印は、それぞれ水の入った長方形容器をもつ場合と、水と同じ質量の固体に置き換えた主振動系の場合に、実験で得られた振動波形の全振幅を表す。図11中の実線と破線は理論解析による共振曲線を表し、その定義は図2と同じである。●印は式(15)の共振曲線とよく一致している。図11中の矢印の位置B, E点では振幅が跳躍した。図11は水深が $h=60 \text{ mm}$ ($h/l=0.6$) の深い場合であり、理論曲線とほぼ一致している。

図12に、装置Aの場合から構造物の質量 m を増やした装置Bで得られた共振曲線を示す。このときの固有振動数 p_0 は装置Aの場合よりわずかに小さくなり、 $\sigma_1 = -0.093 \text{ Hz}$ ($\sigma_1/p_1 = -0.034$) であった。図

Fig. 13 Time histories for an almost periodic oscillation obtained at $f=5.33 \text{ Hz}$ in Fig. 12

(a) Amplitudes of z_1

(a) Amplitudes of z_1

(b) Amplitudes of η

Fig. 12 A comparison of the theoretical and experimental resonance curves for apparatus B when the detuning $\sigma_1 = -0.093 \text{ Hz}$ ($\sigma_1/p_1 = -0.034$)

(b) Amplitudes of η

Fig. 14 A comparison of the theoretical and experimental resonance curves for apparatus C when the detuning $\sigma_1 = -0.253 \text{ Hz}$ ($\sigma_1/p_1 = -0.093$)

12 中の区間 $G_1H_1(G_2H_2)$ における振動は●印で示された最大振幅となり、振幅が変調する概周期振動 (Almost Periodic Oscillation を略して図 12 中に A. P. O. と略記している) が発生した。その発生位置は破線で示された解析結果ともほぼ一致し、この共振曲線の特徴も理論解析結果の図 3 の場合と同じである。

図 13 は、図 12 の●印で示された $f=5.33$ Hz において観測された定常振動波形である。図 13 より、同じ形状の包絡線が繰返されており、図 4(a) の特徴と同じであることがわかる。

図 14 は、装置 B よりもさらに離調度が大きい装置 C ($\sigma_1 = -0.253$ Hz, および $\sigma_1/p_1 = -0.093$) の場合の共振曲線である。図 6 の理論解析結果に示したように、構造物と液面スロッシングの連成振動が励振振動数 f の 2 箇所に現れた。

5. 結 言

長方形剛体容器が取り付けられた弾性構造物が鉛直方向の正弦励振を受ける場合、共振曲線に及ぼす同調条件のずれの影響について理論的、実験的に調べた結果、下記の結論を得た。

(1) 構造物と液面スロッシングの固有振動数の間に 2:1 の同調条件がほぼ満たされる場合、構造物および液面の応答には、それぞれ調和振動、1/2 次分数調波振動が現れる。離調度 $\sigma_1 \equiv p_0 - 2p_1$ を定義すると、液位が深い場合には $\sigma_1 \leq \sigma_{s1} < 0$ のとき、一方、液位が浅い場合には $\sigma_1 \geq \sigma_{s2} > 0$ のときに振幅が変調する概周期振動が現れる。振幅変調の様式には、同じ包絡線が規則的に繰返されるもの、および包絡線がカオス的に変化するものがある。

(2) 液面に対する共振曲線は、離調度が正の場合には右側に、負の場合には左側に傾く傾向がある。

(3) 離調度が比較的大きくなると、構造物と液体スロッシングの連成振動が励振振動数の二つの領域に分かれて発生する場合がある。

(4) 実験では、理論解析による共振曲線とほぼ一致する共振曲線が得られた。概周期振動の発生が観察され、その発生位置も解析結果とほぼ一致した。

最後に、本研究は文部省科学研究費より一部の補助を受けたことを付記する。

文 献

- (1) 萩生田弘, 水のスロッシングを利用した制振装置, 三井造船技報, 137(1989), 13-20.
- (2) 植田利夫・ほか 4 名, 塔状構造物の耐風制振装置, 日立造船技報, 52-1(1991), 25-30.
- (3) 鉄鋼土木事業部, 斜張橋の塔とケーブルの制振対策—“幸

- 魂橋上り線”—三井造船技報, 143(1991), 17-25.
- (4) Senda, K. and Nakagawa, K., On the Vibration of an Elevated Water-Tank—I, *Tech. Rep. Osaka Univ.*, 4-117(1954), 247-264.
- (5) Nakagawa, K., On the Vibration of an Elevated Water-Tank—II, *Tech. Rep. Osaka Univ.*, 5-170(1955), 317-336.
- (6) Nakagawa, K., On the Vibration of an Elevated Water-Tank—III, *Tech. Rep. Osaka Univ.*, 6-193(1956), 53-62.
- (7) 藤野陽三・ほか 4 名, 同調液体ダンパー (TLD) の基本特性に関する実験的検討 (円筒容器の場合), 構造工学論文集, 34-A(1988), 603-616.
- (8) 宮田利雄・ほか 2 名, 塔状構造物制振用水槽ダンパーの開発, 構造工学論文集, 34-A(1988), 617-626.
- (9) 宮田利雄・ほか 2 名, 長方形水槽ダンパー適用に関する諸問題の検討, 構造工学論文集, 35-A(1989), 553-560.
- (10) 野路利幸・ほか 4 名, 水のスロッシングを利用した制振装置の研究, 日本建築学会構造系論文報告集, 411(1990), 97-105.
- (11) Welt, F. and Modi, V. J., Vibration Damping Through Liquid Sloshing, Part 2: Experimental Results, *Trans. ASME, VA*, 114-1(1992), 17-23.
- (12) 藤野陽三・ほか 4 名, 同調液体ダンパーに関する非線形波動シミュレーションとその実験的検証—長方形容器の場合—, 構造工学論文集, 35-A(1989), 561-574.
- (13) Barron, R. and Chng, S. W. R., Dynamic Analysis and Measurement of Sloshing of Fluid in Containers, *Trans. ASME, DS*, 111-1(1989), 83-90.
- (14) Peterson, L. D., Crawley, E. F. and Hansman, R. J., *AIAA J.*, 27-9(1989), 1230-1240.
- (15) Welt, F. and Modi, V. J., Vibration Damping Through Liquid Sloshing, Part 1: A Nonlinear Analysis, *Trans. ASME, VA*, 114-1(1992), 10-16.
- (16) 金子成彦, 液体の共振を利用した制振装置, 日本舶用機関学会誌, 27-4(1992), 323-329.
- (17) 池田隆・ほか 2 名, 長方形水槽内のスロッシングによる構造物の非線形振動, 機論, 60-573, C(1994), 1517-1525.
- (18) 池田隆・ほか 2 名, 円筒水槽内のスロッシングによる構造物の非線形振動 (第 1 報), 機論, 61-591, C(1995), 4131-4139.
- (19) 池田隆・ほか 2 名, 円筒水槽内のスロッシングによる構造物の非線形振動 (第 2 報), 機論, 61-591, C(1995), 4140-4147.
- (20) Ibrahim, R. A. and Barr, A. D. S., Autoparametric Resonance in a Structure Containing a Liquid, Part I: Two Mode Interaction, *J. Sound Vib.*, 42-2(1975), 159-179.
- (21) Ibrahim, R. A. and Barr, A. D. S., Autoparametric Resonance in a Structure Containing a Liquid, Part II: Three Mode Interaction, *J. Sound Vib.*, 42-2(1975), 181-200.
- (22) Ibrahim, R. A., Multiple Internal Resonance in a Structure-Liquid System, *Trans. ASME, EI*, 98-3(1976), 1092-1098.
- (23) Ibrahim, R. A. and Gau, J. S., Soundararajan, A., Parametric and Autoparametric Vibrations of an Elevated Water Tower, Part I: Non-Linear Parametric Resonance, *J. Sound Vib.*, 121-3(1988), 413-428.
- (24) Ibrahim, R. A. and Li, W., Parametric and Autoparametric Vibrations of an Elevated Water Tower, Part II: Autoparametric Resonance, *J. Sound Vib.*, 121-3(1988), 429-444.
- (25) 池田隆・ほか 2 名, 鉛直励振を受ける弾性構造物と長方形容器内スロッシングの非線形連成振動 (第 1 報), 機論, 64-617, C(1998), 77-85.

- (26) 葉山眞治・ほか2名, 長方形容器におけるスロッシングの非線形応答 (第1報, 液面変位の共振応答), 機論, **49**-437, C(1983), 22-30.
- (27) Minorsky, N., *Nonlinear Oscillations*, (1974), 506-509, Robert E. Krieger Publishing Company, New York.
- (28) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., *Nonlinear Oscillations*, (1979), 402-409, A Wiley-Interscience Publication, New York.
- (29) Hatwal, H., Mallik, A. K. and Ghosh, A., Forced Nonlinear Oscillations of Autoparametric System, Part 2: Chaotic Responses, *Trans. ASME, AM*, **50** (1983), 663-668.
- (30) Bajaj, A. K., Chang, S. I. and Johnson, J. M., Amplitude Modulated Dynamics of a Resonantly Excited Autoparametric Two Degree-of-Freedom System, *Nonlinear Dynamics*, **5**-4(1994), 433-457.
- (31) Banerjee, B., Bajaj, A. K. and Davies, P., Resonant Dynamics of an Autoparametric System: A Study Using Higher-Order Averaging, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **31**-1(1996), 21-39.
- (32) Nayfeh, A. H., On the Undesirable Roll Characteristics of Ships in Regular Seas, *J. Ship Research*, **32**-2(1988), 92-100.
- (33) Balachandran, B. and Nayfeh, A. H., Observations of Modal Interactions in Resonantly Forced Beam-Mass Structures, *Nonlinear Dynamics*, **2**-2(1991), 77-117.