滑りを伴う剛体ブロックのロッキング振動に関する研究*

(二次元正弦波励振の場合)

鄭 萬 溶^{*1}, 鈴木 浩 平^{*2}

A Study on Rocking Vibration of Rigid Block Structure Accompanying Sliding Motion (In the Case of Two Dimensional Sinusoidal Excitation)

Man Yong JEONG^{*3} and Kohei SUZUKI^{*3} Numazu College of Technology, Dept. of Electronic & Control Engineering,
Oka 3600, Numazu-shi, Shizuoka-ken, 410-8501 Japan

This research deals with the nonlinearities of rocking vibration which are associated with impact and sliding on the rocking behavior of rigid block under two dimensional sinusoidal excitation of horizontal and vertical direction. The nonlinearities of the rocking vibration strongly depend on the impact between block and base, which should take place abrupt reduction in kinetic energy, and sliding motion which occurs during rotation and impact. Particularly, when the sliding motion occurs, the rocking behavior are massively changed by the effect of the sliding motion. The response analysis by nondimensional rocking equation is carried out for the variety of excitation level and excitation frequency. The chaotic responses are observed in the wide response region, particularly, in the case of high vertical level and small friction coefficient, and the chaotic characteristics of rocking response will be explained by the time history, Poincare map, power spectra and Lyapunov Exponent. The complex behavior of chaotic response, in the phase space, were illustrated by Poincare map. The distribution of rocking response is described as the bifurcation diagram and the effects of sliding motion are examined through the several examples of rocking response.

Key Words: Nonlinear Rocking Vibration, Chaos, Poincare Map, Sliding Motion, Lyapunov Exponents

1. 緒 論

剛体ブロックのロッキング振動に関する多くの研究によって、ロッキング応答がシステムパラメータや励振パラメータの微小変化に鋭敏に反応することが明らかになっている^{(1)~(7)}。

著者らは、これまでの研究で正弦波励振によるロッキング振動実験を行い、一部の励振パラメータ領域において同一励振条件下における繰返し実験結果により応答の再現性がないことを確認した。そのおもな原因は滑り運動とそれによる衝突時のエネルギー消耗率の変化にあり、これらによってカオス応答になる領域が存在することも確認した。また、滑り止め用のシートを敷いた場合でも高い振幅領域では滑りが発生しており、ロッキング応答に大きな影響を及ぼすことも明らかにした⁽⁸⁾。

次に、実地震波励振によるロッキング応答解析では、ブロックの寸法比と大きさと滑り運動との関係を検討し、同一入力と同一ブロック寸法に対して従来安定運動をするとされていた寸法比の小さいブロックでも滑りによって転倒に至ることがあり、必ずしも安定運動ではないことを明らかにした⁽⁹⁾。

実際、兵庫県南部地震による工作機械などのブロック形構造物の被害例からもブロック構造物の横滑りによる被害報告が多く、滑りはブロックの安定条件を定める際、考慮すべき重要な因子であるといえよう。

本論文では、水平と垂直の二次元同時励振によるブロック構造物のロッキング応答解析を行い、ブロックとベース間の摩擦力と励振振幅の変化が応答に与える影響を調べることを目的とする。問題を簡単にするため、水平と垂直の励振振動数を同一にすることによってベースの振動方向を一定にし、振動方向の変化による影響は考察しないことにする。

2. ロッキング振動モデル

2.1 ブロックの回転

滑り運動を考慮する場合、垂直と水平入力が同時に受けるブロックのロッキング

* 原稿受付 1999年9月6日。

^{*1} 正員, 沼津工業高等専門学校電子制御工学科(〒410-8501 沼津市大岡 3600)。^{*2} 正員, 東京都立大学大学院工学研究科(〒192-0397 八王子市南大沢 1-1)。

E-mail: jeong@ece.numazu-ct.ac.jp

Fig. 1 Rocking of rigid block

振動は、図1のようにベースから見たブロック中心の水平変位 x 、垂直変位 y と回転変位 θ で表すことができる。ブロック底面とベース表面との接触が完全に滑らかで、ブロックは O 、 O' 以外の支点をもたないとする。ベースの水平方向に $a_h(t)$ 、垂直方向に $a_v(t)$ の加速度入力を加えると、ロッキング開始条件は次のようになる。

$$a_h > \frac{B}{H}(g + a_v) \quad (1)$$

ここで、 g は重力加速度である。

また、水平方向の反力を f_x とし、垂直方向の反力を

f_y とすると、 f_x と f_y はそれぞれ次のようになる。

$$f_x = ma_h(t) + m\ddot{x} \quad (2)$$

$$f_y = m\ddot{y} + mg + ma_v \quad (3)$$

回転時にブロックが滑り出す条件は

$$\mu_s < \left| \frac{\ddot{x} + a_h}{\ddot{y} + g + a_v} \right| \quad (4)$$

となる。ここで、 μ_s は回転時の静摩擦係数である。ブロックが滑り始めてからの f_x 、 f_y とブロックとベースの間の動摩擦係数 μ_k の関係は次のように表される。

$$f_x = -S(\dot{x}_o)\mu_k f_y \quad (5)$$

また、点 O と点 O' 回りの回転運動に対する運動方程式は次式になる。

$$I_o \ddot{\theta} = -(m\ddot{y} + mg + ma_v)R\{S(\theta)\sin(\psi - |\theta|) + S(\dot{x}_o)\mu_k \cos(\psi - |\theta|)\} \quad (6)$$

式(5)と(6)の中の、 $S(\theta)$ と $S(\dot{x}_o)$ は符号関数である。これらの式から次のようなブロック重心に対する回転運動と並進運動の運動方程式を得ることができる。

$$\ddot{\theta} + p^2 f_1(\theta, \dot{\theta}_p, \dot{x}) = 0 \quad (7)$$

$$\ddot{x} + p^2 f_2(\theta, \dot{\theta}_p, \dot{x}) = -a_h(t) \quad (8)$$

ここで

$$f_1(\theta, \dot{\theta}_p, \dot{x}) = \frac{S(\theta)\{\sin(\psi - |\theta|) + S(\theta)S(\dot{x}_o)\mu_k \cos(\psi - |\theta|)\}}{\{1 + \gamma \sin^2(\psi - |\theta|) + \gamma S(\theta)S(\dot{x}_o)\mu_k \cos(\psi - |\theta|)\sin(\psi - |\theta|)\}} \left\{ 1 + \frac{a_v}{g} - \gamma \cos(\psi - |\theta|)\dot{\theta}_p^2 \right\} \quad (9)$$

$$f_2(\theta, \dot{\theta}_p, \dot{x}) = \frac{\mu_k RS(\dot{x}_o)S(\theta)}{\gamma\{1 + \gamma \sin^2(\psi - |\theta|) + \gamma S(\theta)S(\dot{x}_o)\mu_k \cos(\psi - |\theta|)\sin(\psi - |\theta|)\}} \left\{ 1 + \frac{a_v}{g} - \gamma \cos(\psi - |\theta|)\dot{\theta}_p^2 \right\} \quad (10)$$

である。ここで I_o はブロックの慣性モーメント、 p はロッキング振動数である。 I_o 、 p 、 γ 、 $\dot{\theta}_p$ はそれぞれ下記の式で表される。

$$I_o = \frac{4mR^2}{3} \quad (11)$$

$$p^2 = \frac{mgR}{I_o} \quad (12)$$

$$\gamma = \frac{mR^2}{I_o} \quad (13)$$

$$\dot{\theta}_p = \frac{\dot{\theta}}{p} \quad (14)$$

ブロックがベースに衝突するときのブロック端の変位 x_o と速度 $\dot{x}_o$ は次式のように表せる。

$$x_o = x - S(\theta)R \sin(\psi - |\theta|) \quad (15)$$

$$\dot{x}_o = \dot{x} + R \cos(\psi - |\theta|)\dot{\theta} \quad (16)$$

2・2 ブロックとベースの衝突

ブロックとベースの衝突を考える際に、最も重要なことは回転時の滑り発生有無と衝突時の滑り発生の有無、滑り発生時のエネルギー消費率である。これらのブロックの滑りと衝突時のエネルギー消費はロッキング応答に大きく影響し、そのモデリングには詳細な検討が必要である。本研究では、前報⁽¹⁾同様滑りによる衝突時のエネルギー消費の変化を考慮した Shenton のモデル⁽¹⁰⁾を用いた。以下において回転時と衝突時の滑りを考慮しない場合のエネルギー消費は反発係数と呼び、双方の滑りを考慮した場合のエネルギー消費はエネルギー消費率と呼ぶことにする。

2・2・1 滑りが発生しない場合 ブロック中心の衝突後速度は次のように衝突前の速度を用いて表せる。以下の式において、添字1は衝突前の、2は衝突後の物理量を表す。

$$\dot{x}_2 = -\frac{H\delta_i}{2}\dot{\theta}_1 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\dot{y}_2 = -S(\theta_1)\frac{B}{2}(\delta_i+2e)\dot{\theta}_1 \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\dot{\theta}_2 = \delta_i\dot{\theta}_1 \quad \dots\dots\dots (19)$$

滑り発生を伴わない衝突では、回転軸になるブロック端(回転端)での水平と垂直速度成分がすべて零となるので、衝突時のエネルギー消耗率は反発係数とブロックの形状によって決まる。エネルギー消耗率 δ_i と速度比 λ_x はそれぞれ次式のように表せる。

$$\delta_i = 1 - \frac{3}{4}(1+\lambda_x)\cos^2\psi - \frac{3}{2}(1+e)\sin^2\psi \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\lambda_x = \frac{2\dot{x}_1}{H\dot{\theta}_1} \quad \dots\dots\dots (21)$$

e は反発係数であり、次の式で表される。

$$e = 1 - \frac{3}{2}\sin^2\psi \quad \dots\dots\dots (22)$$

また、 λ_x は滑りによる水平方向の速度と回転速度の比である。このとき、衝突前の回転が滑りを伴わなければ、 λ_x の値は-1となり、衝突時のエネルギー消耗率は反発係数と等しくなる($\delta_i=e$)。衝突前の回転運動が滑りを伴う場合には、この λ_x が変化し、衝突時のエネルギー消耗率 δ_i も変化する。

2・2・2 滑りが発生する場合 衝突時に滑りが発生する条件は次式となる。

$$\bar{\mu}_s < \frac{H}{B} \left| \frac{\delta_i + \lambda_x}{1 + 2e + \delta_i} \right| \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 $\bar{\mu}_s$ は衝突時における静摩擦係数である。衝突時、滑りを伴う場合の衝突後速度は衝突前の速度を用いて次のように表される。

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + S(\theta_1)S(\dot{x}_{i2})\bar{\mu}_k\frac{B}{2}(1+\bar{\delta}_i+2e)\dot{\theta}_1 \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\dot{y}_2 = -S(\theta_1)\frac{B}{2}(\bar{\delta}_i+2e)\dot{\theta}_1 \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\dot{\theta}_2 = \bar{\delta}_i\dot{\theta}_1 \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここで、エネルギー消耗率 δ_i は次式のようにになる。

$$\bar{\delta}_i = \frac{1-3\left\{1-S(\theta_1)S(\dot{x}_{i2})\bar{\mu}_k\frac{H}{B}\right\}(1+2e)\sin^2\psi}{1+3\left\{1-S(\theta_1)S(\dot{x}_{i2})\bar{\mu}_k\frac{H}{B}\right\}\sin^2\psi} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$\bar{\mu}_k$ は衝突時における動摩擦係数である。

3. ロッキング応答解析

ロッキング応答解析では、Ralstonの最適ルンゲクッタ法と用いて非線形ロッキング運動方程式を解いた。数値解析にあたって無次元化時間刻みは0.004とし、応答のデータ数は12000個とした。また、運動方程式の切り換えは回転変位の絶対値が 10^{-6} より小さくなってときに回転変位0と見なして行った。また、入力振動数は高次ロッキングモードが存在し、滑りやエネルギー消耗率や励振振幅の変化に敏感に反応するという両条件を満足する無次元化振動数8と10に限定し、ブロックのサイズは幅1m高さ4mにしている。

3・1 ブロックの回転 非線形モデルを用いたロッキング応答解析では、まず、ロッキング運動方程式をロッキング振動数に対して無次元化するため、 $\Theta = \theta/\psi$, $pt = \tau$, $\dot{\Theta} = \dot{\theta}/\psi$, $\Omega = \omega/p$, $X = x/R$, $X_o = x_o/R$ を用いて無次元化を行った。無次元化ロッキング運動方程式は

$$\ddot{\Theta} + p^2 f_1(\Theta, \dot{\Theta}_p, \dot{X}) = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\ddot{X} + p^2 f_2(\Theta, \dot{\Theta}_p, \dot{X}) = -\frac{a_h(t)}{R} \quad \dots\dots\dots (29)$$

となる。ここで、

$$f_1(\Theta, \dot{\Theta}_p, \dot{X}) = \frac{S(\Theta)\{\sin\psi(1-|\Theta|) + S(\Theta)S(\dot{X}_o)\bar{\mu}_k\cos\psi(1-|\Theta|)\}}{\{1+\gamma\sin^2\psi(1-|\Theta|) + \gamma S(\Theta)S(\dot{X}_o)\bar{\mu}_k\cos\psi(1-|\Theta|)\sin\psi(1-|\Theta|)\}} \times \left\{1 + \frac{a_v}{g} - \gamma\cos\psi(1-|\Theta|)\dot{\Theta}_p^2\right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$f_2(\Theta, \dot{\Theta}_p, \dot{X}) = \frac{\bar{\mu}_k S(\Theta)S(\dot{X}_o)\left\{1 + \frac{a_v}{g} - \gamma\cos\psi(1-|\Theta|)\dot{\Theta}_p^2\right\}}{\gamma\{1+\gamma\sin^2\psi(1-|\Theta|) + \gamma S(\Theta)S(\dot{X}_o)\bar{\mu}_k\cos\psi(1-|\Theta|)\sin\psi(1-|\Theta|)\}} \quad \dots\dots\dots (31)$$

となる。また、ブロック端の変位と速度を $X_o = x_o/R$ でブロック中心の変位と速度を $X = x/R$ で無次元化するとブロック端の変位とブロック中心の変位の関係式は

$$X_o = X - S(\Theta)\sin\psi(1-|\Theta|) \quad \dots\dots\dots (32)$$

となり、ブロック端の速度とブロック中心の速度の関係式は

$$\dot{X}_o = \dot{X} + \cos\psi(1-|\Theta|)\dot{\Theta} \quad \dots\dots\dots (33)$$

となる。水平と垂直方向の無次元化励振力はそれぞれ

$$a_h(t) = A_h \phi g \sin(\Omega \tau + \Phi) \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$a_v(t) = A_v \phi g \sin(\Omega \tau + \Phi) \quad \dots\dots\dots (35)$$

となる。

3・2 ブロックとベースの衝突 衝突前後の無次元化速度関係式は、衝突時の滑り発生如何によって次の二つの場合に分けられる。

3・2・1 滑りが発生しない場合 ブロック中心における衝突前後の無次元化速度の関係式は次式で与えられる。

$$\dot{X}_2 = -\frac{H\phi\delta_i}{2R}\dot{\theta}_1 \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$\dot{Y}_2 = -S(\theta_1)\frac{B\phi}{2R}(\delta_i + 2e)\dot{\theta}_1 \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$\dot{\theta}_2 = \delta_i\dot{\theta}_1 \quad \dots\dots\dots (38)$$

エネルギー消耗率 δ_i は式(20)と同様であり、速度比 λ_x は次式のように表せる。

$$\lambda_x = \frac{2\dot{X}_1}{H\dot{\theta}_1} \quad \dots\dots\dots (39)$$

3・2・2 滑りが発生する場合 衝突後の無次元化速度は衝突前の無次元化速度を用いて次のように表される。

$$\dot{X}_2 = \dot{X}_1 + S(\theta_1)S(\dot{X}_{i2})\bar{\mu}_k\frac{B\phi}{2R}(1 + \bar{\delta}_i + 2e)\dot{\theta}_1 \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$\dot{Y}_2 = -S(\theta_1)\frac{B\phi}{2R}(\bar{\delta}_i + 2e)\dot{\theta}_1 \quad \dots\dots\dots (41)$$

$$\dot{\theta}_2 = \bar{\delta}_i\dot{\theta}_1$$

ここで、エネルギー消耗率 δ_i は次式のようにになる。

$$\bar{\delta}_i = \frac{1 - 3\left\{1 - S(\theta_1)S(\dot{X}_{i2})\bar{\mu}_k\frac{H}{B}\right\}(1 + 2e)\sin^2\phi}{1 + 3\left\{1 - S(\theta_1)S(\dot{X}_{i2})\bar{\mu}_k\frac{H}{B}\right\}\sin^2\phi} \quad \dots\dots\dots (42)$$

4. 解析の結果と評価

応答解析結果の考察においては、無次元化時間 35 までの応答時系列、入力加速度 0 に対する応答を位相平面に表したポアンカレ写像、時系列応答の 3 000 個めから 7 096 個めまでのパワースペクトルなどを用いた。また、応答解析で得られたロッキング振動応答がカオス応答であることを証明し、そのカオス性を定量的に評価するため、それぞれの応答に対して最大リアプノフ指数を計算した。そして、無次元化振幅の変化に伴う応答の変化を調べるため、入力加速度 0 に対す

Fig. 2 Bifurcation diagram for rocking response ($Q_h=Q_v=8$, $A_h=2$, $A_v=0\sim3$)

Fig. 4 Bifurcation diagram for rocking response ($Q_h=Q_v=10$, $A_h=2$, $A_v=0\sim3$)

Fig. 3 Bifurcation diagram for rocking response ($Q_h=Q_v=8$, $A_h=3$, $A_v=0\sim3$)

Fig. 5 Bifurcation diagram for rocking response ($Q_h=Q_v=10$, $A_h=3$, $A_v=0\sim3$)

るポアンカレ点による分岐図を作成した。リアプノフ指数の計算には佐藤らによって提案された手法⁽¹¹⁾を用い、50 000 個の時系列データを使用した。また、分岐図は150 000 個から200 000 個までの時系列データに基づいて作成した。

4・1 滑りなしの場合 ここでは、まず、ブロックとベースが剛体である場合にブロックの形状から計算される反発係数の式(22)を利用し、二次元励振を受けるブロックのロッキング振動応答の一般的特性を把握することにする。

振動数比8および10、水平方向の無次元化振幅を2および3、垂直方向励振の無次元化振幅が0から3までの滑りなしのロッキング応答に対する分岐図をそれぞれ図2から5に示す。これらの分岐図において空白の部分はブロックの転倒を表す。図2は垂直方向励振の振幅0から約0.7までは(1,1)モードの周期応答、0.7から約1.25までは(1,2)モードの周期応答を示しているが、それ以上の振幅になると高次モードの周期応答、(1,2)モードの周期応答、さらにカオス応答、転倒が混在している。ここで、(1,2)モードとは、2周期分の入力加わる間に応答が1周期分励起される周期応答の形態を意味する。図3の振動数比8で水平方向の励振振幅3の場合の分岐図では、垂直励振振幅0から約1.7までは(1,1)モードの周期応答を、1.7から約2.25までは(1,2)モードの周期応答を、2.25から2.3までは(1,4)モードの周期応答を示し、その後は2.6付近の狭い領域を除くすべての領域で転倒を示す。図4も図2と同じような傾向を示すが、転倒はほとんど見られなくなり、垂直方向の振幅2.5から2.8までのカオス応答領域で2箇所存在するだけとなる。これらの図からは励振振動数の増加によって周期応答や準周

期応答の領域は拡大され、カオス領域は狭くなるとともに転倒する確率も低くなることがわかる。

次は同一振動数に対する水平振幅の変化がロッキング応答に与える影響について考察することにする。図2と4の分岐図をみると、周期応答とカオス応答が混在している間欠性分岐があらわれており、ここでは周期応答、カオス応答、転倒が交互に入れ混じっている。また、図3および5においては、周期倍分岐の様子が明確にあらわれており、最初は(1,1)モード、次は周期倍分岐して(1,2)モード、その次はさらに周期倍分岐して(1,4)モードがあらわれ、最後はカオス応答に変動していく。また、転倒はカオス応答の領域だけに存在し、図中の空白が転倒を表す。

そして、これらの図では、同一励振振幅に対して振動数の増加は応答の分岐形態にはそれほど大きく影響を与えないが、応答の吸引領域を狭くしていることがわかる。なお、分岐形態は水平振幅の大きさに依存しない。これについてはさらなる検討が必要とされる。

図2と4の分岐図において、カオス応答の例を図6と7に示す。これらの図において、(a)と(b)と(c)はそれぞれロッキング応答、ロッキング応答のパワースペクトル、入力加速度0に対する応答の位相を示したポアンカレ写像を表す。両図中のポアンカレ写像に表されているように応答は複数の吸引領域を有するアトラクタを形成し、反時計回りに渦巻く二次元励振によるカオスアトラクタの一般的形状を示している。これらのロッキング応答に対するリアプノフ指数は、それぞれ0.74、1.02であった。

4・2 滑り発生の場合 次に滑りが発生する場合のロッキング振動応答について明らかにする。まず図2の滑りなしの系に対応する例として、水平と垂直方

Fig. 6 Rocking response (without sliding)
($Q_h=Q_v=8$, $A_h=2.0$, $A_v=2.5$)

Fig. 7 Rocking response (without sliding)
($Q_h=Q_v=10$, $A_h=3.0$, $A_v=2.5$)

Fig. 8 Bifurcation diagram for rocking response
($Q_h=Q_v=8$, $A_h=2$, $A_v=0\sim3$, $\mu_s=\bar{\mu}_s=0.4$,
 $\mu_k=\bar{\mu}_k=0.35$)

Fig. 9 Bifurcation diagram for rocking response
($Q_h=Q_v=8$, $A_h=2$, $A_v=0\sim3$, $\mu_s=\bar{\mu}_s=0.35$,
 $\mu_k=\bar{\mu}_k=0.3$)

Fig. 10 Rocking response (with sliding)
($Q_h=Q_v=8$, $A_h=2.0$, $A_v=2.0$, $\mu_s=\bar{\mu}_s=0.4$,
 $\mu_k=\bar{\mu}_k=0.35$)

向励振の無次元化励振振動数 8, 水平励振振幅 2, 静摩擦係数 0.4, 動摩擦係数 0.35 に対するロッキング応答の分岐図と, 静摩擦係数 0.35, 動摩擦係数が 0.3 に対するロッキング応答の分岐図をそれぞれ図 8 と 9 に示す。これらの分岐図を図 2 の分岐図と比較して見る

Fig. 11 Rocking response (with sliding)
($Q_h=Q_v=8$, $A_h=2.0$, $A_v=2.5$, $\mu_s=\bar{\mu}_s=0.4$,
 $\mu_k=\bar{\mu}_k=0.35$)

Fig. 12 Rocking response (with sliding)
($Q_h=Q_v=8$, $A_h=2.0$, $A_v=2.5$, $\mu_s=\bar{\mu}_s=0.35$,
 $\mu_k=\bar{\mu}_k=0.3$)

と, 滑りがロッキング応答に大きく影響し応答の分布を大きく変化させ, カオス応答領域が拡張されていることがわかる。すなわち, 滑りなしの場合には (1,2) モードの周期応答となっていた領域において滑り発生の場合ではカオス応答になっている。その一例を図 10 に示す。この場合, リアプノフ指数は 0.51 であった。次は, 滑りなしの場合でもカオス応答を示すロッキング応答において滑りの影響を調べるため, 次の二つのロッキング応答について考察を行う。図 11 は水平と垂直方向の励振振動数 8, 水平方向の励振振幅 2, 垂直方向の励振振幅 2.5, 静摩擦係数 0.4, 動摩擦係数

0.35 に対するロッキング応答を、図 12 は同一励振条件で静摩擦係数 0.35、動摩擦係数 0.3 のロッキング応答を示す。この図において、(a) はロッキング応答を、(b) は滑りによる無次元化水平変位を、(c) はロッキング応答のパワースペクトルを、(d) は入力加速度 0 に対する応答の位相を示したポアンカレ写像を表す。同一励振条件に対する応答を示す図 6, 11, 12 から、摩擦係数の低下とともにアトラクタ形状が縮小され、ロッキング応答の最大振幅も低下することがわかる。図 6 の場合では転倒に至っていたが、図 11 の場合には最大応答が約 0.75 となり、図 12 の場合には約 0.4 となり、ともに転倒には至っていない。このことから、水平方向と垂直方向の励振振動数が同一であれば、ブロックとベース間の摩擦力の低下、すなわち、滑りによるエネルギー消耗の増加がロッキング応答に対するアトラクタの形状と最大応答振幅を低減させることがわかる。図 11 と 12 のロッキング応答に対するリアプノフ指数はそれぞれ 0.71, 1.34 であった。

水平と垂直方向の振動数比 10、水平励振振幅 3、静摩擦係数 0.4、動摩擦係数 0.35 の場合に対するロッキング応答の分岐図を図 13 に示し、同じく、静摩擦係数 0.35、動摩擦係数 0.3 に対するロッキング応答の分岐図を図 14 に示す。これらの分岐図からも摩擦係数の

Fig. 13 Bifurcation diagram for rocking response ($\Omega_h = \Omega_v = 10$, $A_h = 3$, $A_v = 0 \sim 3$, $\mu_s = \bar{\mu}_s = 0.4$, $\mu_k = \bar{\mu}_k = 0.35$)

Fig. 14 Bifurcation diagram for rocking response ($\Omega_h = \Omega_v = 10$, $A_h = 3$, $A_v = 0 \sim 3$, $\mu_s = \bar{\mu}_s = 0.35$, $\mu_k = \bar{\mu}_k = 0.3$)

低下とともにカオス応答領域が拡張されることがわかる。これらの分岐図を同様の条件での滑りなしの場合に対応する図 8 と 9 に示されている分岐図と比較すると、滑りなしの場合には励振振動数の大きい方がカオス応答領域が狭いのに対し滑り発生の場合では、高励振振動数の方でカオス応答領域が拡大することがわかる。すなわち、滑り発生により高励振振動数でのロッキング応答はブロックとベースの摩擦力に影響されやすく、滑り運動も激しいことが明らかになった。

図 14 の分岐図に対する応答例を図 15 と 16 に示す。この場合でも図 10 に示された励振振動数 8 の場合と

Fig. 15 Rocking response (with sliding) ($\Omega_h = \Omega_v = 10$, $A_h = 3.0$, $A_v = 2.0$, $\mu_s = \bar{\mu}_s = 0.4$, $\mu_k = \bar{\mu}_k = 0.35$)

Fig. 16 Rocking response (with sliding) ($\Omega_h = \Omega_v = 10$, $A_h = 3.0$, $A_v = 2.0$, $\mu_s = \bar{\mu}_s = 0.35$, $\mu_k = \bar{\mu}_k = 0.3$)

Fig. 17 Rocking response (with sliding)
 $(\Omega_h = \Omega_v = 8, A_h = 3.0, A_v = 2.5, \mu_s = \bar{\mu}_s = 0.4, \mu_k = \bar{\mu}_k = 0.35)$

Fig. 18 Rocking response (with sliding)
 $(\Omega_h = \Omega_v = 8, A_h = 3.0, A_v = 2.5, \mu_s = \bar{\mu}_s = 0.35, \mu_k = \bar{\mu}_k = 0.3)$

同様に滑りなしの場合には周期応答を示す領域の応答が滑り発生によってカオス応答になることがわかる。これらのロッキング応答に対するリアプノフ指数はそれぞれ 0.1, 0.83 であった。これは、摩擦力の低下とともに応答のカオス性が強くなることを意味する。

4.3 滑りとアトラクタの形状に対する考察 本節では、滑り運動がカオスアトラクタの形状に与える影響を調べる。図 6, 11 と 12 に示されているように水平方向の励振振幅が比較的小さい場合には、摩擦係数が低下するにつれて吸引領域が減りアトラクタが圧縮されたような形に変化していくが、アトラクタの基

本的な形は変化しない。しかし、比較的大きい水平励振振幅 3 の場合には、図 17 と 18 に示されているようにアトラクタの形状が滑りなしの場合に比べて大きく変化している。このことは、滑りによる水平変位の大きさや滑りの発生頻度がアトラクタの形状に大きな影響を与えていることを意味する。滑り運動が常に発生しその滑りによる水平変位が大きい場合には、アトラクタ形状の変化が大きく、また、回転速度軸に対してマイナス方向の片寄った形態になる。すなわち、滑り運動はロッキング応答の対称性を崩す原因となり、滑りが激しければ激しいほど滑りの逆方向の回転運動だけが大きくなり、ブロックは非常に不安定な運動状態になる。これらの応答に対するリアプノフ指数はそれぞれ 1.91, 1.76 であった。すなわち、滑りなしの場合の応答に比べると、リアプノフ指数が相対的に大きくなっている。このことから滑り運動がロッキング応答のカオス性を強めることがわかる。

水平と垂直の励振振動数が同一である二次元入力によるロッキング振動では、ベースの振動方向が水平と垂直の励振振幅によって一定方向に固定されるので、その振動の逆方向だけに滑りが発生し、ロッキングによる滑りと逆方向の回転変位も相対的に大きくなる。

上で述べたように滑りを伴うロッキング振動では、滑り運動の影響によって滑りの逆方向の回転変位だけが大きくなる不安定な運動が生じる。この運動状態でロッキング振動系に何らかの外乱が加われば、その外乱が小さくてもロッキング応答に与える影響は大きくなることが予想される。加振実験⁽⁶⁾⁽⁸⁾において明らかにされた滑りを伴う実験ロッキング応答の非再現性や転倒条件の低下の原因としては解析モデルに容易には考慮できない動揺の存在が考えられる。ブロックのベース間の摩擦力の微小変化や接触条件の微小変化などがその要因になりえよう。

本論文では、励振振動数を 8 と 10 にし、水平と垂直の励振振動数が同一である場合のみに限定したため、二次元励振によるロッキング振動特性を十分に把握できたとは言えない。特に、水平と垂直の励振振動数が異なった場合と振幅の変化に鋭敏に影響される低励振振動数の場合のロッキング振動特性の解明が課題とされる。また、上述のように実際のロッキング振動系では、ブロックとベース間の摩擦力の微小変動などの動揺を含むと考えられるので、これらの動揺がロッキング振動特性に与えるを明らかにするためには、実験ロッキング振動応答に対する考察をカオス力学的観点からのより厳密に行うことも必要と思われる。

5. 結 論

本研究では、二次元入力を受けるブロックのロッキング応答解析を行い、滑りなしと滑り発生の両ケースに対して応答特性を調べ、次のような結論を得た。

(1) 滑りなしの場合には、励振振動数の増加とともに周期応答や準周期応答の領域が拡大されてカオス領域は狭くなり、転倒も減少する。また、比較的小さい水平励振振幅に対しては周期応答とカオス応答が混在する間欠性カオスを示すが、高励振振幅では、周期倍分岐によってカオス応答へ推移する。

(2) 滑りなしの場合には周期応答を示す応答領域でも滑り発生によってカオス応答になる場合がある。すなわち、滑り運動が発生する場合には、カオス応答領域が広がる。

(3) 滑り運動が発生する場合のロッキング応答では、ブロックとベース間の摩擦力の低下により応答の成すアトラクタ全体の大きさが小さくなり、応答の最大振幅も小さくなる。また、摩擦力の低下とともに周期応答領域や準周期応答は狭くなり、カオス応答領域は拡大される。

(4) 滑りによる水平変位の大きさと滑りの発生頻度がアトラクタの形状に大きな影響を与え、常に滑りが発生しその滑りによる水平変位が大きい場合には、アトラクタの形状が小さくなり、回転速度軸に対してマイナス方向の片寄った形態となる。また、この場合、リアプノフ指数は大きくなり応答のカオス性が強くなる。

現在、水平方向と垂直方向の励振振動数が異なる場合のロッキング振動特性の把握、ロッキング振動のカ

オス性に対する実験的考察、ブロックとベース間の摩擦力の微小変化がロッキング振動に与える影響の検討などが課題として残されており、今後これらの課題についてさらに研究していく所存である。

文 献

- (1) Spanos, P. D. and Koh, A. S., Rocking of rigid blocks due to harmonic shaking., *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, **110**-11 (1984), 1627-1642.
- (2) Tso, W. K. and Wong, C. M., Steady state rocking response of rigid blocks, Part I: Analysis., *J. Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **18**-106 (1989), 89-106.
- (3) Yim, S. C. S. and Lin, H., Nonlinear impact and chaotic response of slender rocking objects., *J. Eng. Mech., ASCE*, **117**-9 (1991), 2079-2100.
- (4) Lin, H. and Yim, S. C. S., Nonlinear rocking motions. overturning under random excitations I, *J. Eng. Mech., ASCE*, **122**-8 (1996), 719-727.
- (5) Lin, H. and Yim, S. C. S., Nonlinear rocking motions. overturning under random excitations II, *J. Eng. Mech., ASCE*, **122**-8 (1996), 728-735.
- (6) 鄭萬溶・鈴木浩平, 剛体ブロック型構造物のロッキング振動に関する基礎的研究, *機論*, **62**-603, C (1996), 4136-4146.
- (7) 鈴木友和・鄭萬溶・鈴木浩平, 正弦波励振を受けるブロックのロッキング振動に関する研究, D & D 97(日本機械学会機械力学・計測制御部門講演会), **97**-A (1997), 435-438.
- (8) 鄭萬溶・鈴木浩平, 剛体ブロックの非線形ロッキング振動特性に関する研究, D & D 97(日本機械学会機械力学・計測制御部門講演会), **97**-A (1997), 439-442.
- (9) Jeong, Man-Yong and Suzuki, Kohei, Rocking vibration of rigid block structure subjected to two dimensional seismic excitation, *ASME PVP Conference 98', Seismic Eng.*, PVP-Vol. 364 (1998), 327-334.
- (10) Shenton, H. W. and Jones, N. P., Base excitation of rigid bodies: formulation., *J. Eng. Mech.*, **117**-10 (1991), 2286-2306.
- (11) 長島弘幸・馬場良和共著, カオス入門, (1992), 105-110, 培風館.