油圧駆動系におけるスティック・スリップの発生限界について*

(第1報, 最大静止摩擦力が孤立点とならない場合)

高野 英 資^{*1}, 佐伯 暢 人^{*2}熊倉 亮^{*3}, 高澤 秀 樹^{*3}On the Occurrence Conditions of Stick-Slip Phenomena
in a Hydraulic Driving System(1st Report, In Case of Maximum Static Friction Equal
to Kinetic Friction without Slipping)Eisuke TAKANO, Masato SAEKI,
Ryo KUMAKURA and Hideki TAKASAWA^{**} Niigata University, Department of Mechanical and Production Engineering,
Faculty of Engineering, Igarashi, Niigata, Niigata, 950-2181 Japan

When the critical value of static friction is equal to the value of kinetic friction without slipping, oscillations caused by solid friction in a hydraulic driving system are treated theoretically. The system consists of a table lying on a rectilinear sliding surface, an actuator cylinder, a 4-way servo-valve, a relief valve, an oil pump and so on. The solid friction force considered is assumed to vary with the relative sliding velocities between the table and sliding surface. Namely, the friction-velocity characteristic function is given by a polygon having two straight line segments. The stick-slip motions of the table are analysed considering the 4-way valve pressure-flow characteristic, friction-velocity relation, oil compressibility and the sizes of the hydraulic driving elements. Several types of limit cycles and the regions which they occur are shown in figures according to the parameters mentioned above.

Key Words: Vibration, Frictional Vibration, Nonlinear Vibrations, Solid Friction, Hydraulic Driving System, Self-excited Oscillations, Limit Cycles, 4-Way Valve, Sliding Surface, Piecewise Linear System

1. 緒 言

直動形しゅう動面を有する油圧駆動系に発生するスティック・スリップについて著者らはいくつかの理論的, 実験的検討の結果を報告^{(1)~(4)}してきたが, スティック・スリップの発生限界については, 松崎らの論文⁽⁵⁾⁽⁶⁾を除くと, 明確な記述を与えているものはほとんどない. 杉本⁽⁷⁾, 高野⁽⁸⁾は摩擦振動について総括的な記述を行い, 高野ら⁽⁹⁾は最近の摩擦による振動の解析について展望を行っている. Bell ら, Bo ら, Oden らは多くの研究者が摩擦振動の解析に当たり使用して来た運動摩擦係数の速度特性モデルをまとめ, 考察を行っている⁽¹⁰⁾.

本研究は, 高野らが機械駆動系におけるスティック・スリップの発生限界について示した論文⁽¹¹⁾と同じような立場から, 油圧駆動系についてのスティック・スリップの発生限界について同様の適用を試みたものである. 摩擦力が滑り速度によって一義的に定まるとして, 運動摩擦係数速度特性を2本の折れ線で近似し, その発生限界を明らかにしている. 本報においては, 最大静止摩擦力が孤立点とならない場合を扱う.

2. 油圧駆動系の基礎式と
位相面上の解曲線

図1に四方弁を用いた直動形油圧駆動系の回路図を示す. 式(1), (2)はそれぞれ可動部分の運動方程式

a : Table b : Actuator cylinder
c : Servo valve d : Relief valve
e : Oil tank

Fig. 1 Hydraulic driving system

* 原稿受付 1999年9月2日.

^{*1} 正員, 新潟大学工学部 (〒950-2181 新潟市五十嵐2町8050).^{*2} 正員, 新潟工科大学 (〒945-1103 柏崎市藤橋1719).^{*3} 准員, 新潟大学大学院.

E-mail: takano@eng.niigata-u.ac.jp

Fig. 2 Solution curve in the v - p_m plane

並びに圧縮性を考慮した作動油の連続の式であり、式(3)は四方弁の特性式を示す。

$$mdv/dt + f_N(v) = A_p p_m \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$q_m = A_p v + cd p_m/dt \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$q_m = q_m(x, p_m) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $m = m_T + m_e$ は可動部分の質量 (m_T : テーブルの質量, m_e : 配管中の油の等価質量), v はテーブル速度, t は時間, $f_N(v)$ は配管中の粘性抵抗をふくむ可動部分の摩擦特性, A_p はピストンの有効断面積を表す。また p_m, q_m はそれぞれ四方弁出口の出力圧力差並びに出力流量を, c はシリンダおよび配管の容積変化並びに作動油の圧縮性によって定まる係数である。式(3)は四方弁のスプール変位 x および p_m の値が小さい範囲では

$$q_m = k_x x - k_p p_m \quad \dots\dots\dots (4)$$

のように書ける⁽⁵⁾。ここで $k_x = \partial q_m / \partial x$, $k_p = -\partial q_m / \partial p_m$ はそれぞれ無負荷流量特性, 圧力流量特性から定まる定数で, 供給圧力 P_s を変えた場合に大きく変わる。テーブルがしゅう動面上に停止する場合は

$$dp_m/dt = q_m(x, p_m)/c \quad \dots\dots\dots (5)$$

から圧力差 p_m の時間的変化を求めることができる。しかし, p_m は供給圧力 P_s を越えることはできない。

式(1)~(3)から得られる次式(6)は, 拡張されたリーナードの図的解法が適用できる形をしており, v - p_m 位相平面での解曲線の取扱いが可能であることを示している。

$$\frac{dp_m}{dv} = \frac{m}{c} \cdot \frac{-A_p v + q_m(x, p_m)}{A_p p_m - f_N(v)} \quad \dots\dots\dots (6)$$

図2はこの位相面上に描かれた解曲線の一例を示し, 式(6)の分子, 分母を零とおいた次の両曲線

$$v = q_m(x, p_m)/A_p \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$p_m = f_N(v)/A_p \quad \dots\dots\dots (8)$$

の交点は位相面上の特異点 (v_s, p_{ms}) を与える。

Fig. 3 Friction-velocity function

Fig. 4 Characteristic polygon in the v - p_m plane

3. 運動摩擦力速度特性とテーブルの運動

テーブルの運動を解析的に求めるために系の線形化を行う。四方弁については式(4)が適用できるものとし, 可動部分の摩擦特性については図3のように2本の折れ線で近似し, $f_N(v)$ (添字 $i=1, 2$) は次式(9)で表されるものとする。式中の F_s は最大静止摩擦力を示す。また, $v=0$ に近づけたときの運動摩擦力を F_d とおく。 b_i は i 番め折れ線の傾斜で, その延長線が縦軸と交わる点の高さが F_{di} であり, 特性折れ線の i 番め折れ点に対応する速度を V_i としている。ここで $F_{d2} = F_{d1} - (b_2 - b_1) V_2$, $F_{d1} = F_d = F_s$, $V_1 = 0$ である。

$$f_N(v) = \begin{cases} b_1 v + F_{d1} & (V_i < v < V_{i+1}) \\ -F_s \sim F_s & (v=0) \\ b_i v - F_{di} & (-V_{i+1} < v < -V_i) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (9)$$

線形化の結果, $x = x_0$ のとき式(7)は

$$p_m = (k_x/k_p)x_0 - (A_p/k_p)v \quad \dots\dots\dots (10)$$

となり, 図4のように点 $(0, k_x x_0 / k_p)$ を通る直線となる。また式(8)は座標原点に関し対称な折れ線 III-II-I-IV-V-VI に変換される。この折れ線と式(10)の直線との交点は特異点 (v_s, p_{ms}) を与えるが, このとき特異点速度が $v_s = V_2$ となるスプール変位 x を x_{02} , 圧力差 $p_m = P_s$ となる x を $x_{\max} = P_s k_p / k_x$ とおくと, v_s と x_0 との間には次の関係がある。

$$k_p F_s / k_x A_p \leq x_0 \leq x_{02} \quad \text{のとき}$$

Table 1 Classification of types of limit cycles

Position of the origin of the coordinates			On segment I - II $u_s \leq 1$		On segment II - III $1 < u_s < u_{max}$
			$u_s < u_{max} \leq 1$	$u_s < 1 < u_{max}$	
Existence of limit cycle					
Existent	Segment I - IV is a portion of the trajectory of limit cycle	$u_{min} = 0$	Type (i)-(α)	Type (ii)-(α)	Type (iii)-(α)
		$u_{min} < 0$	Type (i)-(β)	Type (ii)-(β)	Type (iii)-(β)
	Segment I - IV is inside or outside the trajectory of limit cycle	$u_{min} < 0$	—	Type (ii)-(γ)	Type (iii)-(γ)
		$u_{min} > 0$	—	Type (ii)-(δ)	Type (iii)-(δ)
Nonexistent			Type (i)-(ϵ)	Type (ii)-(ϵ)	Type (iii)-(ϵ)

Fig. 5 Several types of limit cycles

Fig. 6 Additional symbols

$$v_s = (k_x x_0 A_p - k_p F_s) / (A_p^2 + b_1 k_p) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$x_{02} < x_0 \leq x_{\max}$ のとき

$$v_s = (k_x x_0 A_p - k_p F_{a2}) / (A_p^2 + b_2 k_p) \quad \dots\dots\dots (12)$$

いうまでもなく、 $0 \leq x_0 \leq k_p F_s / k_x A_p$ ではテーブルは動かない。

$v-p_m$ 位相面上のテーブルの滑り運動を規定する微分方程式は前報⁽¹⁾によれば式(13)のように、またテーブルが停止している場合($v=0$)の p_m の変化は式(14)から得られる。

$$\left. \begin{aligned} cmd^2 v / dt^2 + (b_1 c + k_p m) dv / dt \\ + (A_p^2 + b_1 k_p) v = (A_p^2 + b_1 k_p) v_{sc} \\ cmd^2 p_m / dt^2 + (b_1 c + k_p m) dp_m / dt \\ + (A_p^2 + b_1 k_p) p_m = (A_p^2 + b_1 k_p) p_{msc} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$dp_m / dt + (k_p / c) p_m = k_x x / c \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで、特異点が j 番め折れ線上にある場合、すなわち $V_j \leq v_s \leq V_{j+1}$ ($j=1, 2$)にある場合、テーブルが i 番め折れ線に支配される速度領域 $V_i \leq v \leq V_{i+1}$ または $-V_{i+1} \leq v \leq -V_i$ ($i=1, 2$)を運動するときの v_{sc} , p_{msc} は、 i 番め折れ線またはその延長線と式(10)の直線が交わる点の v , p_m 座標を示し、 $i=j$ の場合には $v_{sc}=v_s$, $p_{msc}=p_{ms}$ となる。

4. 位相面上のリミットサイクルの分類

次にこれらの微分方程式に支配される $v-p_m$ 位相面上の解曲線はどのような定常振動解を与えるのだろうか。図5は最大静止摩擦力が孤立点となる場合を含め、摩擦特性折れ線の各速度境界において解の接合を行いながら求めたそれらの発生例を示す。いずれも同じ特異点速度で複数個のリミットサイクルが発生する

る場合の例である。実線の閉曲線 $I \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow I$ および $C_s \rightarrow D_s \rightarrow C_s$ は安定な解、破線の閉曲線 $C_s \rightarrow D_s \rightarrow C_s$ および $I_u \rightarrow C_u \rightarrow D_u \rightarrow H \rightarrow I_u$ は不安定な解である。また、 I , C など各点の記号はそれぞれ特性折れ線の折れ点を通る速度境界線を横切る点につけた名前である。前報⁽¹⁾⁽²⁾では、主として特性折れ線の I 点から出発する安定なリミットサイクルに着目し、特性折れ線上的特異点位置や解軌道の最小速度や最大速度の大きさなどによって表1のような分類を行い、その種類と形状に Type (iii)-(α) などの名称を付して呼んでいた。ここで、表中の変数については、 $u_s = v_s / V_2$, $u_{\max} = v_{\max} / V_2$, $u_{\min} = v_{\min} / V_2$ を示す。また、 I 点を通る解軌道が折れ点 II の速度を越えない場合を(i)形、越える場合にはさらに特異点が第1の特性折れ線上にあるものを(ii)形、第2の特性折れ線上にあるものを(iii)形として区別して来た。しかし、同じ(α)形でも図5の例のように、単に特異点位置等の違いのみではなく、複数個のリミットサイクルが発生することがあるなど、(i)形~(iii)形の区別と(α)形~(ε)形の区別の組合せのみでは発生するリミットサイクルの種類を十分に区別して表現することができなかった。そこで機械駆動系⁽¹¹⁾でも行ったように、Type (iii)-(α)形に続けて T , TU , Tu , TUs などの付加記号をつけて、リミットサイクルの発生形態を呼ぶことにした。ここで、 T は I 点を通り付着運動を含む安定なリミットサイクルであり、 TU はこの安定な解以外に付着運動を含む不安定なリミットサイクルの U 形が発生する

Fig. 7 Wave forms of velocity, displacement and pressure difference

場合である。付加記号の S, s, u は滑り運動のみからなる定常振動解で、 S, s は安定なりミットサイクルを、 u は不安定なりミットサイクルを表す。 s 形は条件によって単独に現れることがあり、この場合これを (δ) 形と称している。図6は位相面上に生じる解曲線のみ(実線は安定解、破線は不安定解)を取出し、付加記号とリミットサイクルの発生形態の関係を示したものである。図6中の TU 形や TUs 形などは $F_s \neq F_d$ のときのみ発生するものであり、これらの定常振動解の特性については次報(第2報)で述べる。

図7は、横軸に時間 t をとり、縦軸にそれぞれテーブル速度 v 、テーブル変位 y 、圧力差 p_m をとって描いたそれらの時間経過曲線の一例で、主として I 点を通る定常振動解について示した。

Table 2 Values of i and j

Position of the singular point Velocity range of motion	On segment I-II ($V_1=0 < V_2 < V_3$)		On segment II-III ($V_2 < V_3$)	
	i	j	i	j
I - II	1		1	
II - III	2	1	2	2
IV - V	1		1	
V - VI	2		2	

5. 無次元変数とリミットサイクルを表す曲線

次式(15)は、図1の系や摩擦特性式などにおける各種の因子、すなわち $A_p, m, c, k_p, k_x, x_0, b_1, b_2, V_2, F_s (=F_d)$ の10個の変数に無次元化の操作を行い、全部で5個の変数に整理したものである。

$$\left. \begin{aligned} k &= \sqrt{m/c} k_p / A_p, \quad B_1 = (b_1 / A_p) / \sqrt{m/c} \\ B_2 &= (b_2 / A_p) / \sqrt{m/c}, \\ \varphi_s &= (F_s / A_p) / \sqrt{m/c} \quad V_2 = \varphi_d \\ \varphi_x &= (k_x x_0 / k_p) / \sqrt{m/c} \quad V_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

式(16)~(18)は微分方程式(13)の解曲線式であり、各特性折れ線に支配される運動がすべて振動的であるよう、後述する ε_i の値が $|\varepsilon_i| < 1 (i=1, 2)$ を満たす場合について、それらの解曲線式を与えた。これらの式は、特異点が j 番め折れ線上にあるとき、 $t=0$ において i 番め折れ線が支配する速度領域内を、その速度境界上の任意の一点 (v_0, p_{m0}) から出発するテーブルが滑り運動するときの運動方程式の解である。これらは式(15)の無次元変数を用い、無次元化された解曲線式で示されている。すなわち任意の無次元時間 $\tau = \omega_{n1} t$ におけるテーブルの無次元速度 $u = v/V_2$ 、無次元圧力差 $\rho_m = p_m / \sqrt{m/c} V_2$ 並びにテーブルの無次元変位 $\eta = A_p y / \sqrt{m/c} V_2$ の値が、次の各式から得られることを示している(前報⁽¹⁾参照)。ここで、 $\omega_{n1} = \sqrt{(A_p^2 + b_1 k_p) / cm}$ であり、式中の η_0 は η の初期値である。式(18)の $\varphi_{dj}, \varphi_{di}$ はそれぞれ $\varphi_{dj} = (F_{dj} / A_p) / \sqrt{m/c} V_2$ 、 $\varphi_{di} = (F_{di} / A_p) / \sqrt{m/c} V_2$ を表しており、 $\varphi_{d2} = \varphi_{d1} - (B_2 - B_1)$ 、 $\varphi_{d1} = \varphi_d = \varphi_s$ なる関係がある。なお、添字の i, j の値は、特異点が存在する特性折れ線と各特性折れ線が支配する運動速度範囲により表2のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_{sc} + \exp(\varepsilon_i N_i \tau / N_1) \{ C_{1i} \cos(\sqrt{1-\varepsilon_i^2} \\ &\quad \times N_i \tau / N_1) + C_{2i} \sin(\sqrt{1-\varepsilon_i^2} N_i \tau / N_1) \} \\ \rho_m &= \rho_{msc} + \exp(\varepsilon_i N_i \tau / N_1) \{ C_{3i} \cos(\sqrt{1-\varepsilon_i^2} \\ &\quad \times N_i \tau / N_1) + C_{4i} \sin(\sqrt{1-\varepsilon_i^2} N_i \tau / N_1) \} \\ \eta &= \eta_0 + u_{sc} \tau / N_1 + \exp(\varepsilon_i N_i \tau / N_1) \\ &\quad \times \{ \varepsilon_i \cos(\sqrt{1-\varepsilon_i^2} N_i \tau / N_1) + \sqrt{1-\varepsilon_i^2} \sin \\ &\quad \times (\sqrt{1-\varepsilon_i^2} N_i \tau / N_1) \} (C_{1i} / N_i) + \exp(\varepsilon_i N_i \tau / \\ &\quad N_1) \{ \varepsilon_i \sin(\sqrt{1-\varepsilon_i^2} N_i \tau / N_1) - \sqrt{1-\varepsilon_i^2} \\ &\quad \times \cos(\sqrt{1-\varepsilon_i^2} N_i \tau / N_1) \} (C_{2i} / N_i) - C_{1i} \varepsilon_i / \\ &\quad N_i + C_{2i} \sqrt{1-\varepsilon_i^2} / N_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_i &= -(B_i + k) / 2N_i, \quad N_i = \sqrt{1+B_i k}, \\ C_{1i} &= (v_0 - v_{sc}) / V_2, \quad C_{3i} = (p_{m0} - p_{msc}) / \\ &\quad \sqrt{m/c} V_2, \\ C_{2i} &= \{ C_{3i} / N_i - (\varepsilon_i + B_i / N_i) C_{1i} \} / \sqrt{1-\varepsilon_i^2} \\ C_{4i} &= (N_i \varepsilon_i + B_i) C_{2i} - N_i \sqrt{1-\varepsilon_i^2} C_{1i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} u_s &= v_s / V_2 = k(\varphi_x - \varphi_{d_j}) / (1+B_j k), \\ \rho_{ms} &= p_{ms} / \sqrt{m/c} V_2 = \varphi_{di} + B_j u_s \\ u_{sc} &= u_s + k\{\varphi_{dj} - \varphi_{di} + (B_j - B_i)u_s\} / (1+B_i k) \\ \rho_{msc} &= \rho_{ms} - \{\varphi_{dj} - \varphi_{di} + (B_j - B_i)u_s\} / (1+B_i k) \\ &\quad (V_i / V_2 \leq u \leq V_{i+1} / V_2) \\ u_{sc} &= \text{同上} + 2k\varphi_{di} / (1+B_i k) \\ \rho_{msc} &= \text{同上} - 2\varphi_{di} / (1+B_i k) \\ &\quad (-V_{i+1} / V_2 \leq u \leq -V_i / V_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

また、停止時の時間的变化などは次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u &= 0, \quad \eta = \eta_0 \\ \rho_m &= \varphi_x - (\varphi_x - \rho_{m0}) \exp(-k\tau / N_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

Fig. 8 Equivalent curves of ε_i in the B_i - k plane

ここで、 $\eta_0 = A_p y_0 / \sqrt{m/c} V_2$, $\rho_{m0} = p_{m0} / \sqrt{m/c} V_2$ である。

次に先ほど触れた ε_i について若干説明をしておこう。これは特性折れ線の傾斜 b_i ($i=1, 2$) に相当する B_i と圧力流量特性 k_p に相当する k を含んでいる。それにもともと ε_i は式(13)の各項の係数を用い、 $\alpha_i = -(b_i c + k_p m) / 2cm$, $\omega_{ni} = \sqrt{(A_p^2 + b_i k_p) / cm}$ とおくとき、 $\varepsilon_i = \alpha_i / \omega_{ni}$ と定義したものである。このように定義した ε_i を用いると、式(13)の微分方程式の解が振動的であるためには、 $|\varepsilon_i| < 1$ となる必要がある。図8は k, B_i を両軸にとった平面において $\varepsilon_i = \text{一定}$ の曲線を描いたもので、平行な2本の直線 $|\varepsilon_i| = 1$ に挟まれた部分では振動的な解が与えられ、 $1 > \varepsilon_i > 0$ となる B_i と k の部分では運動が発散的、また $-1 < \varepsilon_i < 0$ では減衰的となることがわかる。このことは機械駆動系の場合と異なり、運動摩擦力特性曲線の傾斜 B_i が負となる場合でも、 k の値により運動が減衰的となる場合があることを示している。本報では縦軸に近い k の値の小さな場合を扱う。このとき ε_i と B_i は互いに異符号となる。

6. 各種形態の発生境界曲線

6・1 (i)形, (ii)形, (iii)形の境界 次にこれらの定常振動解がどのような条件下で発生するかについて考察しよう。(i)形, (ii)形, (iii)形の発生範囲については特異点速度 u_s を用いれば、前報⁽¹⁾を参照し、次式のように与えることができる(図9参照)。

Fig. 9 Boundary curves among the types of [i], [ii] and [iii] for $\Delta\varphi = 0$

Fig. 10 Boundary curves between types of (α) and (ε) or between types of (α) and (δ) for $\Delta\varphi=0$ under $\Delta\varphi_d=\infty$

Fig. 11 Boundary curves between types of (α) and (β) and between types of (β) and (γ) for $\Delta\varphi=0$ under $\Delta\varphi_d=0$

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{[i] 形:} \\
 & 0 \leq u_s \leq 1 / \{1 + \exp(\varepsilon_1 \pi / \sqrt{1 - \varepsilon_1^2})\} \\
 & \text{[ii] 形:} \\
 & 1 / \{1 + \exp(\varepsilon_1 \pi / \sqrt{1 - \varepsilon_1^2})\} / < u_s \leq 1 \\
 & \text{[iii] 形: } 1 < u_s
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

これらは、横軸に ε_1 、縦軸に $1/u_s$ を用いて示した各種形態の発生境界曲線や発生形態変化図に関する後述の図 10, 11 などの中で、細い点線の曲線や横軸に平行な直線として描かれている。

6.2 (α)形の発生範囲と発生境界曲線 $v-p_m$ 平面での議論は、5章における無次元化の定義により、 $u-\rho_m$ 平面でも同様に行うことができる。 $u-\rho_m$ 位相面において I 点を出発する解軌道が、C 点、D 点を

経由し、あるいは直接に I-IV 線分上で A 点に達し、付着運動を行い、再び I 点で閉軌道を完成する定常振動解を含む (α) 形は、 $\rho_{mI} \geq \rho_{mA} \geq \rho_{mIV}$ なる条件下で得られる。 $\rho_{mI} = \rho_{mA}$ は (α) 形と (ε) 形または (α) 形と (δ) 形の発生境界条件を与え、 $\rho_{mIV} = \rho_{mA}$ は (α) 形と (β) 形の発生境界条件を与える。

次にこれらの条件を満たす発生境界曲線をいくつかの線図に示そう。図 10 は、運動摩擦係数が十分に高摩擦特性である場合 (図 10 中では $\Delta\varphi_d = \varphi_d - \varphi_{d\min} = \infty$ と表記) に、最大静止摩擦係数が孤立点にならない $\Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_d = 0$ の場合の (α) 形と (ε) 形、または (α) 形と (δ) 形の発生境界曲線を示す。 ε_2 を副変数として横軸には ε_1 が、縦軸には $1/u_s$ が取られている。例えば上に凹形の摩擦特性の場合 ($\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 < 0$ の場合)、これらの境界曲線の上側は (α) 形の範囲であり、下側は (ii) 形の領域内で (δ) 形、(iii) 形の範囲内で (ε) 形となる (後述の図 16 参照)。ここで、点線の曲線は (i) 形と (ii) 形の境界を、同じく点線の直線 $1/u_s = 1$ は (ii) 形と (iii) 形の境界を示す。これらの図から、(α) 形の発生境界曲線は $\Delta\varphi = 0$ のとき ε_1 と ε_2 が異符号の場合に存在し、 $\varepsilon_1 = 0$ では $1/u_s = 2$ となる。(β) 形の発生境界については後で述べる。

6.3 (β)形および(γ)形の発生境界 前述したように、I 点を出発した解曲線の A 点が IV 点と一致する場合には (α) 形と (β) 形の発生境界条件を与える。さらに A 点が IV 点より下側で $u = 0$ となり、逆向きの滑り摩擦係数を受けて $u < 0$ の側から B 点において付着運動に移ると、定常振動解は (β) 形となる。このとき、B 点が I 点と一致する場合は (β) 形と (γ) 形の発生境界条件を与える。図 11 には、これらの (α) 形と (β) 形の発生境界曲線と (β) 形と (γ) 形の発生境界曲線が併記された一例が示されていて、 $\varepsilon_1 < 0$ の範囲ではこれらの境界曲線は存在しない。言うまでもなく、(β) 形は (α) 形の発生領域内で、また (γ) 形は (β) 形の発生領域内でそれらの発生範囲を有する。

7. s 形および u 形の解軌道

次に図 1 の油圧駆動系においてスプール変位 x_0 を変えたとき、すなわち特異点速度 u_s を変化させたときに発生する s 形および u 形のリミットサイクルの発生境界曲線について考察しよう。このリミットサイクルは $u > 0$ の速度範囲において滑り運動のみを行う閉じた定常振動解である。図 10 に示した各曲線は (α) 形と (δ) 形、または (α) 形と (ε) 形のリミットサイクルの発生境界上の定常振動解に属する。これらは第 1, 第 2 の特性折れ線の傾斜が互いに異符号となる

Fig. 12 Formation conditions of limit cycles of the type s or u

場合に存在し、したがって $\varepsilon_1 > 0$ かつ $\varepsilon_2 < 0$ となる上に凹形の摩擦特性の場合か、 $\varepsilon_1 < 0$ かつ $\varepsilon_2 > 0$ となる凸形の摩擦特性の場合にのみ s 形、あるいは (δ) 形として、あるいは u 形については T-u 形のリミットサイクルとして発生し得るに過ぎない。

それでは特異点速度が、図 10 の発生境界速度と少しでも異なる値をもつと、 u - ρ_m 位相面において I 点を出発し、I 点に復帰した解曲線はどのような定常振動解となるのだろうか。ここでは $\varepsilon_1 > 0$ かつ $\varepsilon_2 < 0$ の上に凹形の摩擦特性の場合 (図 12 参照) を例に、得られる定常振動解を求めてみよう。図 5 では、十分な時間 τ の経過に対して到達する I-IV 線分の内側の閉じた定常振動解を $C_s \rightarrow D_s \rightarrow C_s$ として描いているが、任意の u_s では、この定常振動解が通るべき C_s 点または D_s に相当する点をどのように定めるかが問題となる。このとき II 点を通る縦軸に平行な直線上の任意の一点 E から、時間 τ を負の方向に逆上るときに再び $u = u_{II} = 1$ となる S_0 点と、時間の経過に対して再び $u = u_{II} = 1$ となる F 点が一致することが、定常振動解が s 形または u 形となるための必要条件となる。

このとき S_0 点と E 点間および E 点と F 点間の所要時間をそれぞれ τ_s, τ_E (いずれも正) とすると、 $\phi_s = \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} \tau_s$, $\phi_E = \sqrt{1 - \varepsilon_2^2} \tau_E$ を用いて u - ρ_m 平面での E 点の縦座標 ρ_{mE} および特異点速度 u_s とこれらの間の関係を求めることができる。特異点が第 1 特性折れ線にある (ii) 形の場合には、次式 (21), (22) が得られ、これらを等置すればさらに式 (23) が求められる。ここで、 $\pi \leq \phi_s \leq 2\pi$, $0 \leq \phi_E \leq \pi$ である。また、同じく S_0 点と F 点の縦座標 ρ_{mS0} と ρ_{mF} を等置し、式 (21) の関係を代入すると次の式 (24) が得られる。

$$\begin{aligned} & (\rho_{mE} - \phi_s - B_1)/(1 - u_s) \\ &= N_1 \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} [\varepsilon_1 / \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} + \{\cos \phi_s \\ & - \exp(\varepsilon_1 \phi_s / \sqrt{1 - \varepsilon_1^2})\} / \sin \phi_s] \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

Fig. 13 Velocity ranges of u_s in which limit cycles of the type s or u will occur

$$\begin{aligned} & (\rho_{mE} - \phi_s - B_1)/(1 - u_s) \\ &= \{N_2 \sqrt{1 - \varepsilon_2^2} (1 + B_1 k) / (1 + B_2 k)\} \\ & \times [\varepsilon_2 / \sqrt{1 - \varepsilon_2^2} - \{\cos \phi_E - \exp(-\varepsilon_2 \phi_E \\ & / \sqrt{1 - \varepsilon_2^2})\} / \sin \phi_E] \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1/N_1) [\varepsilon_1 + \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} \{\cos \phi_s \\ & - \exp(\varepsilon_1 \phi_s / \sqrt{1 - \varepsilon_1^2})\} / \sin \phi_s] \\ &= (1/N_2) [\varepsilon_2 + \sqrt{1 - \varepsilon_2^2} \{\cos \phi_E \\ & - \exp(\varepsilon_2 \phi_E / \sqrt{1 - \varepsilon_2^2})\} / \sin \phi_E] \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1/N_1) [\varepsilon_1 - \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} \{\cos \phi_s \\ & - \exp(\varepsilon_1 \phi_s / \sqrt{1 - \varepsilon_1^2})\} / \sin \phi_s] \\ &= (1/N_2) [\varepsilon_2 + \sqrt{1 - \varepsilon_2^2} \{\cos \phi_E \\ & - \exp(\varepsilon_2 \phi_E / \sqrt{1 - \varepsilon_2^2})\} / \sin \phi_E] \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

これらの両式はそれぞれ ϕ_s と ϕ_E の関係を示す独立の式であり、連立超越方程式を構成する。 ϕ_s と ϕ_E を両軸に選んだ平面において、これら両者の関係を示す二つの曲線の交点が、 S_0 点と F 点が一致する条件、すなわち s 形または u 形のリミットサイクルの通るべき位置を決定する。すなわち、 S_0 点と F 点とが一致したときの E 点、 S_0 点をそれぞれ改めて C_s 点、 D_s 点と呼ぶことにすると、 $C_s - D_s - C_s$ なる解軌道をもつ s 形または u 形のリミットサイクルが得られたことになる。ただし、ここで注意すべきことは、s 形または u 形の閉軌道が通る E 点の座標が、最大静止摩擦力が孤立点とならない場合、すなわち $F_s = F_d$ の場合、I 点を出発する解曲線が折れ点 II を通る縦軸に平行な直線を横切る点 C_0 よりも下側の、II 点と C_0 点との間にあることである。

以上のようにして $\varepsilon_1, \varepsilon_2, N_1, N_2$ が与えられると、すなわち k と B_1, B_2 が与えられると、連立超越方程式 (23), (24) から得られる根を式 (21) の右辺に代入すれば、左辺の分子と分母の比の値が定まる。分母は縦軸に平行な II 点を通る $u = 1$ 直線と特異点 S との水平

Fig. 14 Boundary curves in the ε_1-1/u_s plane in which limit cycles of type s or u will occur under the conditions of $\rho_{mE} = \rho_{mC0}$

Fig. 15 Boundary curves in the $\varepsilon_1-\varepsilon_2$ plane in which limit cycles of type s or u will occur under the conditions of $\rho_{mE} = \rho_{mC0}$

距離を示し、分子は E 点と II 点との高さの差を表す。したがって、特異点が II 点に近づくとき、 II 点から E 点までの高さも減少し、図 13 に示したように、 II 点においてこれらのリミットサイクルの発生は止んでしまう。したがって、図 13 の $\Leftrightarrow$ 印がしめすような特異点速度 u_s の範囲で、(ii) 形の場合には $\varepsilon_1 > 0$ かつ $\varepsilon_2 < 0$ のとき s 形が、 $\varepsilon_1 < 0$ かつ $\varepsilon_2 > 0$ のとき u 形が発生することになる。特異点速度 u_s が (iii) 形の領域に入った場合でも、同様にしてこれらのリミットサイクルの発生範囲を求めることができる。

図 14 および 15 は、 $k=0.01$ のときこれらの s 形 (S. L. C.) と u 形 (U. L. C.) のリミットサイクルの発生境界を、それぞれ ε_1 を横軸に、縦軸に $1/u_s$ をとった平面並びに $\varepsilon_1-\varepsilon_2$ 平面で示したものである。すなわち、図 14 および 15 の曲線は、図 12 において E 点が C_0 点と一致するときの s 形または u 形のリミットサイクルの発生境界である。そして図 14 の曲線は、図

Fig. 16 Occurrence regions of several types of limit cycles for $\Delta\varphi=0$, $\varepsilon_2<0$ and $\Delta\varphi_d=\infty$

Fig. 17 Occurrence regions of several types of limit cycles for $\Delta\varphi=0$, $\varepsilon_2>0$ and $\Delta\varphi_d=\infty$

Fig. 18 Occurrence regions of several types of limit cycles for $\Delta\varphi=0$, $\varepsilon_2<0$ and $\Delta\varphi_d=0$

Fig. 19 Trajectories of limit cycles in the $u-\rho_m$ plane for $\Delta\varphi=0$ and the friction-velocity characteristic polygons of concave and convex type

Fig. 20 Velocity amplitudes A_u of limit cycles versus velocity u_s for $\Delta\varphi=0$

10 で示した (a) 形と (ε) 形または (a) 形と (δ) 形との境界曲線でもある。したがって s 形, u 形ともこれらの発生境界曲線と $1/u_s=1$ の直線に挟まれたわずかな特異点速度範囲でしか生じないことになる。すなわち, $\varepsilon_1 > 0$ の場合には, $2 > 1/u_s > 1$ の範囲にあるそれぞれの境界曲線と $1/u_s=1$ 直線に挟まれた (ii) 形の速度領域で s 形 (S. L. C.) が発生し, $0 < 1/u_s < 1$ の範囲にある境界曲線と $1/u_s=1$ 直線に挟まれた (iii) 形の速度領域で u 形 (U. L. C.) が生ずる (図 16 参照). $\varepsilon_1 < 0$ の場合には, $\varepsilon_1 > 0$ の場合と同様に考えればよいが, $\varepsilon_1 > 0$ の場合と比べ, s 形の発生するところでは u 形が, u 形の発生するところでは s 形が生ずる (図 17 参照). 図 15 には $1/u_s$ の値を副変数として $\varepsilon_1-\varepsilon_2$ 平面の第 2, 第 4 象限内に s 形または u 形が発生する境界

曲線が示されている。したがって, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ が与えられると $\varepsilon_1-\varepsilon_2$ 平面上に定まるこの点を通る境界曲線がもつ副変数 $1/u_s$ の値が s 形または u 形の発生する境界速度を与え, この値と $1/u_s=1$ の特異点速度の範囲で s 形または u 形が生ずることになる。図 15 中には $1/u_s=1$ を境として滑り運動のみからなる閉じた解曲線が S. L. C. となるか, U. L. C. となるかが示されている。

8. 発生形態変化図と $u-\rho_m$ 位相面上の解曲線

次に油圧駆動系や摩擦特性折線のもつ 5 個の特性因子による影響を, 7 章までに求めた発生境界曲線をもとに, 発生形態変化図と特異点速度 u_s の変化に伴い発生する位相面上の解曲線の変遷過程として示そう。

図 16~18 は k が小さな値をもつとき, 最大静止摩擦力が孤立点とならない $\Delta\varphi=\varphi_s-\varphi_d=0$ の場合について ε_2 を一定とし, 横軸に ε_1 , 縦軸に $1/u_s$ をとって示した定常振動解の発生形態変化図である。各発生境界曲線の左右, 上下の側の発生形態が, (i)~(iii) 形の区別とともに, (a)-T, (a)-Tu, (δ), (ε) 等として示されている。 φ_d が十分に大きい高摩擦特性の場合 ($\Delta\varphi_d=\varphi_d-\varphi_{d\min}=\infty$ と表示) には (β) 形や (γ) 形の発生はない。図 18 は低摩擦特性の場合の一例である。

図 19 は, φ_d が十分に大きいとき, 最大静止摩擦力が孤立点とならない場合について, 特異点速度 u_s の増加に対する位相面上の定常振動解の変化のようすを示したものである。 ε_1 が正の領域で付した図 16 の①, ②の矢印, および ε_1 が負の領域で付した図 17 の④,

⑤の矢印位置を縦軸に平行に上から下にたどるときの形態変化を、位相面上の解曲線の変化のようすとして示している。図20には、速度振幅特性の変化の一例が、摩擦特性折れ線と対比して定性的に示されている。縦軸は速度振幅 $A_u = u_{\max} - u_{\min}$ を、横軸は特異点速度 u_s を示す。 u_s の小さいときを誇張的に示すために、横軸は対数的に取られており、摩擦力速度特性とは折れ点速度位置のみを一致させて示している。図20中の S. F. P. は特異点が安定な焦点、U. F. P. は不安定な焦点となることを示す。また、実線は速度振幅曲線は安定なりミットサイクル S. L. C. に対するものであり、破線は不安定なりミットサイクル U. L. C. に対するものである。

9. 結 言

以上、最大静止摩擦力が孤立点とならない場合について、2本の折れ線近似の摩擦特性から得られる定常振動解の発生形態について分類し、それらの発生条件

と発生範囲を全部で5個の特性変数を用いて明らかにするとともに、振幅変化のようすを示した。

文 献

- (1) 高野英資・原利昭・佐伯暢人, 機論, **53**-491, C(1987), 1391-1400.
- (2) 佐伯暢人・高野英資・大海毅・磯部尚夫・金沢宏, 機論, **56**-523, C(1990), 561-567.
- (3) 高野英資・大矢吉仁・佐伯暢人, 機論, **57**-540, C(1991), 2539-2547.
- (4) 佐伯暢人・大矢吉仁・高野英資, 機論, **58**-547, C(1992), 910-917.
- (5) 松崎淳・橋本誠也, 機論, **28**-194 (1962), 1394-1404.
- (6) 松崎淳, 機論, **29**-206 (1963), 1615-1625.
- (7) 杉本隆尚, 潤滑, **20**-10 (1975), 834-842.
- (8) 高野英資・張祥永, 新潟大学工学部研究報告, No. 35 (1986), 1-9.
- (9) 高野英資・佐伯暢人, トライボロジスト, **37**-12 (1992), 990-996.
- (10) Oden, J. T. and Martins, J. A. C., *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **52**(1985), 527-634.
- (11) 高野英資・佐伯暢人・佐々本和也・久野武志, 機論, **64**-620, C(1998), 1120-1129.