フーリエ解析の高分解能化*

堀 康郎^{*1}, 佐々木 実^{*1}, 藤澤 二三夫^{*2}

High Frequency Resolution Technique of FFT

Yasuro HORI^{*3}, Minoru SASAKI and Fumio FUJISAWA^{*3} Gifu University, Dept. of Mechanical and Systems Engineering,
1-1, Yanagido, Gifu, Gifu, 501-1193 Japan

FFT (Fast Fourier Transformation) is used for frequency analysis in many areas. Frequency resolution is given as the inverse of window length, i. e. observing time. Therefore, if high frequency resolution is required, a long window length is needed. This means that it is difficult to analyze short duration signals. This paper proposes a high frequency resolution technique of FFT in which interpolations to the data obtained in one sampling process and extractions of frequency components are applied. Simulations using this technique show higher frequency resolution, more accurate amplitude and phase compared to those of conventional FFT.

Key Words: FFT, Resolution, Interpolation, Extraction of Frequency, High Frequency Resolution Technique of FFT

1. まえがき

FFTはCooley,Turkeyによる高速アルゴリズム発表後、計算機の性能向上と相俟って、時系列信号の周波数分析法として広く用いられている。しかし、この方法はアナログ信号をA/D変換し、デジタル信号にして演算するため、1) Nyquistのサンプリング定理により、サンプリング周波数の1/2の周波数までしか、情報が得られない。2) 計算される周波数は観測時間の逆数の周波数ピッチで得られ、これと一致しない周波数では、洩れ現象として周囲に広がり、振幅、位相を正確に把握することが困難になる。窓関数はこれを軽減するが、十分とは言えない。3) 周波数分解能は観測時間の逆数になるので、これを小さくしようとすると観測時間が長くなり、継続時間の短い信号では分析が困難になる。これに対して、概周期関数として、前述の周波数ピッチに無関係に高分解能で周波数分析を行う方法が牛山等により発表されており、高い周波数分解能が得られている¹⁾。しかし、処理時間がかかる問題がある。

本論文では回転機の振動のエンジンオーダアナリシスで用いた周波数、振幅の推定法を利用して、1回のサンプリングのみで、高精度の周波数、振幅、位相の予測法を提案するものである。

2. 従来の周波数分析法の概要と問題点

2. 1 FFTによる方法²⁾

信号を正弦波と考え、式(1)に示す。

$$x(t) = a \sin\{2\pi(k + \alpha) \frac{f_s}{N} t\} \quad \text{----- (1)}$$

ここに k : 整数 $\alpha: -1 \leq \alpha \leq 1$ a : 振動振幅

f_s : サンプリング周波数

N : フーリエ変換のデータ数

すなわち、振動の周波数を $(k + \alpha)f_s / N$ として表すのである。式(1)を離散化して示すと次式(2)が得られる。

$$x(n) = a \sin\{2\pi(k + \alpha) \frac{n}{N}\} \quad \text{----- (2)}$$

フーリエ変換は次式で与えられる。

$$F(k, \alpha) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left\{ \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right\} \quad \text{----- (3)}$$

周波数成分は図1に示すように周波数ピッチ $f_p = \frac{f_s}{N}$ ごとの飛び飛びの値 $R_k (k = 1, \dots, N/2)$ となる。 R_k は、 α が0でないときは真の振幅 V よりも小さい値となる。

Fig. 1 Result of FFT

* 原稿受付 1999年12月9日.

^{*1} 正員, 岐阜大学工学部 (〒501-1193 岐阜市柳戸1-1).^{*2} 正員, 科学技術振興事業団 (〒509-0108 各務原市須衛町4-179-1 岐阜県研究開発財団内).

E-mail: hori@mech.gifu-u.ac.jp

周波数分解能は周波数ピッチである $\frac{f_s}{N}$ 、すなわち、観測時間の逆数であり、これをよくするには観測時間を増加させる必要がある。また、図1で最大の振幅は R_k であるが、真の振幅は V である。 $N \gg k \gg 0$ の場合について、この関係を図2に示す。

Fig. 2 Relationship between α and amplitude with rectangular window

図2より、振幅が正確に求められるのは、 $\alpha = 0, 1$ の場合のみで、 $\alpha = 0.5$ のとき63%になることがわかる。また、ハニング窓の場合の結果を図3に示す。ハニング窓にすると $\alpha = 0.5$ のとき、85%と改善されるが、十分とはいえない。

Fig. 3 Relationship between α and amplitude with Hanning window

2. 2 一般調和解析による波形分析^{1), 3)}

この方法は、信号を概周期関数と仮定して周波数分析を行うもので、以下の手順になる。 $t = 0$ から nT の時間間隔で観測された信号 $x(t)$ を考えると、フーリエの係数は

$$S(f) = \frac{2}{nT} \int_0^{nT} x(t) \sin(2\pi ft) dt \quad (4)$$

$$C(f) = \frac{2}{nT} \int_0^{nT} x(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (5)$$

式(4)、(5)により、周波数 f での原信号との残差 ε とそのエネルギー $E(f)$ を求めると

$$\varepsilon(t, f) = x(t) - S(f) \sin(2\pi ft) - C(f) \cos(2\pi ft) \quad (6)$$

$$E(f) = \int_0^{nT} \varepsilon(t, f)^2 dt \quad (7)$$

エネルギーを最小にする周波数 f_1 の成分を原波形から抜き取る

$$x_1(t) = x(t) - S(f_1) \sin(2\pi f_1 t) - C(f_1) \cos(2\pi f_1 t) \quad (8)$$

これを N 回繰り返して原信号 $x(t)$ は以下のように近似される

$$x(t) = \sum_{k=1}^N (S(f_k) \sin(2\pi f_k t) + C(f_k) \cos(2\pi f_k t)) \quad (9)$$

この方法は従来のFFTに比べ、桁違いの分解能が実現できるが、計算量が膨大となる問題がある。

2. 3 FFT結果から周波数、振幅を求める方法²⁾

回転機の振動測定に開発されたもので、サンプリング周波数を固定して得られたFFT結果から真の周波数、振幅を求めるものである。

式(3)において、 $N \gg 2k \gg 0$ の場合、式(10)～式(12)により、真の周波数 $(k + \alpha)f/N$ 、真の振幅 V が求められる。

$$\alpha = \frac{R_{k+1}}{R_k + R_{k+1}} \quad (10)$$

$$V = \frac{\pi \alpha}{\sin \pi \alpha} R_k \quad 0 \leq \alpha \leq 0.5 \quad (11)$$

$$V = \frac{\pi(1-\alpha)}{\sin \pi \alpha} R_{k+1} \quad 0.5 < \alpha \leq 1 \quad (12)$$

$N \gg 2k \gg 0$ が成立しない場合にはこのように陽な形で求められず、式(10)～式(12)では誤差が大きくなる問題がある。

3. 新しい周波数分析法⁴⁾

3. 1 理論

新しい方法は、2. 3の方法から出発する。位相を含めた信号波形を式(13)に示す。

$$x(n) = a \sin\{2\pi(k + \alpha) \frac{n}{N} + \theta\} \quad (13)$$

矩形窓を用いて、フーリエ変換すると、 i 番目の周波数成分は

$$F(i, k, \alpha, \theta) =$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} a \sin\{2\pi(k + \alpha) \frac{n}{N} + \theta\} \cos \frac{2\pi i n}{N} - j \sum_{n=0}^{N-1} a \sin\{2\pi(k + \alpha) \frac{n}{N} + \theta\} \sin \frac{2\pi i n}{N} \quad (14)$$

整理すると

$$F(i, k, \alpha, \theta) =$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{a \cos \theta}{2} \left\{ \sin 2\pi(k + i + \alpha) \frac{n}{N} + \sin 2\pi(k - i + \alpha) \frac{n}{N} \right\} + \frac{a \sin \theta}{2} \left\{ \cos 2\pi(k + i + \alpha) \frac{n}{N} + \cos 2\pi(k - i + \alpha) \frac{n}{N} \right\} + \frac{j a \cos \theta}{2} \left\{ \cos 2\pi(k + i + \alpha) \frac{n}{N} - \cos 2\pi(k - i + \alpha) \frac{n}{N} \right\} - \frac{j a \sin \theta}{2} \left\{ \sin 2\pi(k + i + \alpha) \frac{n}{N} - \sin 2\pi(k - i + \alpha) \frac{n}{N} \right\} \quad (15)$$

級数の和をとり、整理すると

$$F(i, k, \alpha, \theta) = \frac{ja \sin \pi \alpha}{2} \left[\frac{(-1)^{k+i} e^{-j\{\pi(k+i+\alpha)(1-\frac{1}{N})+\theta\}}}{\sin \frac{\pi(k+i+\alpha)}{N}} - \frac{(-1)^{k-i} e^{-j\{\pi(k-i+\alpha)(1-\frac{1}{N})+\theta\}}}{\sin \frac{\pi(k-i+\alpha)}{N}} \right] \quad \cdots (16)$$

$i = k$ の場合には

$$F(k, k, \alpha, \theta) = \frac{ja \sin \pi \alpha}{2} \left[\frac{e^{-j\{\pi(2k+\alpha)(1-\frac{1}{N})+\theta\}}}{\sin \frac{\pi(2k+\alpha)}{N}} - \frac{e^{-j\{\pi\alpha(1-\frac{1}{N})+\theta\}}}{\sin \frac{\pi\alpha}{N}} \right] \quad \cdots (17)$$

式(17)の値から a 、 α 、 θ を求めるのは困難であることがわかる。

式(17)で $\alpha = 0$ の場合には

$$F(k, k, 0, \theta) = \frac{aN}{2} (\sin \theta - j \cos \theta) \quad \cdots (18)$$

a 、 θ は式(19)、(20)により求めることができる。

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Real}\{F(k, k, 0, \theta)\}}{-\text{Imag}\{F(k, k, 0, \theta)\}} \right] \quad \cdots (19)$$

$$a = - \frac{2 \text{Imag}\{F(k, k, 0, \theta)\}}{N \cos \theta} \quad 0 \leq |\theta| < \frac{\pi}{4} \quad \left. \begin{aligned} &= \frac{2 \text{Real}\{F(k, k, 0, \theta)\}}{N \sin \theta} \quad \frac{\pi}{4} \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad \cdots (20)$$

ここで、何らかの方法で $\alpha = 0$ に出来れば、 k 番目の周波数成分のみとなり、他の周波数成分が 0 になること、また、式(20)により、 a 、 θ を求めることができることがわかる。

3. 2 原波形の補間

前節で $\alpha = 0$ に出来れば、振幅、位相が正確に求められることを示した。実現するには、信号に含まれている周波数毎に $\alpha = 0$ になるようにサンプリング周波数を選定すればよいが、周波数そのものがわかっていない状態ではそれは不可能である。また、何度もサンプリングを行うことも一般には難しい。そこで、サンプリング工程は 1 回のみとして、補間によって等価的にサンプリング周波数を変化させることを考える。

最初にサンプリングされた原データに対して、FFT を実行する。得られた結果のなかで振幅の絶対値が最大となる成分と隣の成分の値から、式(10)により、信号の周波数を推定し、その周波数から α が 0 になるサンプリング周波数、周期を求め、そのサンプリング周期ごと

の振幅を原データから補間して求めるのである。

新しいサンプリング周期 $\Delta t'$ は

$$(k+\alpha) \frac{f_s}{N} = k \frac{f'_s}{N} \quad \text{より}$$

$$\Delta t' = \frac{1}{f'_s} = \frac{k}{(k+\alpha)f_s} = \frac{k}{k+\alpha} \Delta t \quad (21)$$

ここに Δt : もとのサンプリング周期 (s)

$\Delta t'$: 新しいサンプリング周期 (s)

f'_s : 新しいサンプリング周波数 (Hz)

原データは Δt ごとにサンプリングされているので、補間により、 $\Delta t'$ ごとのデータに変換するのである。つぎに、補間されたデータを用いて再度フーリエ変換し、新しい α を求める。これを繰り返すことにより、 α を最小にすることが出来るはずである。

最初 α が 0.5、すなわち、正弦波信号の周波数が周波数ピッチで決まる周波数の中間に来る場合について、補間を行った。原アナログ波形を α が 0 になるようにサンプリングしたもの (正解) との差の 2 乗平均を補間の精度として図 4 に示した。補間式としては 1 次から最大 20 次まで各種変え、補間の精度を調べた。周波数は分析できる最大周波数 $f_s/2$ との比で示した。

Fig. 4 Accuracy of interpolation (1)

Fig. 5 Accuracy of interpolation (2)

補間の次数を増すに従い、精度は向上するが、周波数が高くなると、精度が低下し、補間次数を増しても精度が上がらないことがわかる。図5に周波数比、1周期内のサンプリング点数を横軸にしたときの補間精度を示す。1周期内のサンプリング点数が少なくなると精度が低下しており、補間を行う場合、1周期内のサンプリング点数を出来るだけ多くするとよいことがわかる。

分析できる周波数範囲の上限の500 Hz ($f_s=1\text{kHz}$)に近い450 Hzで5次補間を行った場合、精度は図5から0.234となるが、この場合の補間波形を図6に示す。

Fig. 6 Interpolated waveform

図6 (a) は450 Hzで $\alpha=0$ になるようにサンプリング周期を選定してサンプルした波形で、(b) は $\alpha=0.5$ となるようにサンプルした波形に対して5次補間を行った波形である。(a) の波形に比べて (b) では包絡線が大きく変化しており、1周期内のサンプリング点数が $2/0.9=2.2$ と少なくなり、補間しても回復出来ないのが原因と考えられる。

3.3 周波数、振幅、位相の推定

サンプリングしたデータに対してフーリエ変換を行い、式(10)により α を求め、式(21)により、新しいサンプリング周期を求め、補間を行う。補間後のデータに対して再度フーリエ変換、補間を行う。この操作を繰り返すことにより α を最小化することができる。

Fig. 7 Procedure of frequency estimation

α が最小になったときの周波数、振幅、位相を推定値とする。図7に手順を示す。表1にこのようにして求めた周波数、振幅、位相の精度を示す。周波数は400 Hzまで精度よく求まるが、振幅、位相は300 Hzまでしか精度が確保出来ないことがわかる。

Table 1 Estimated results of frequency, Amplitude and phase

Frequency (Hz)	Order of Interpolation	Estimation		
		Δf	$\Delta V/V$	$\Delta \theta$
50	1	3.3×10^{-5}	0.0082	-1.4×10^{-4}
	5	1.2×10^{-8}	0.000003	4.2×10^{-7}
100	1	1.3×10^{-5}	0.033	-3.3×10^{-4}
	5	8.3×10^{-8}	0.00019	-2.3×10^{-6}
200	1	6.5×10^{-4}	0.13	0.2
	5	4.0×10^{-5}	0.0095	2.5×10^{-2}
300	1	0.019	0.278	0.63
	5	0.02	0.081	1.4
	20	3.5×10^{-4}	9×10^{-4}	-0.11
400	1	0.28	0.46	-25
	5	0.20	0.27	-19
	20	0.056	0.062	-7.6
450	1	0.23	0.55	-21
	5	0.25	0.44	-23
	20	0.17	0.27	-20

$f_s = 1\text{kHz}$

Fig. 8 procedure of frequency extraction

Table 2 Results of frequency extraction (1)

Real value		Estimation error		
Frequency (Hz)	Amplitude	Frequency (Hz)	Amplitude	Phase (deg)
100	1.0	2×10^{-7}	1.2×10^{-5}	2.4×10^{-3}
		2×10^{-6}	1.3×10^{-5}	2.4×10^{-3}
200	1.5	3×10^{-7}	4×10^{-4}	-2.4×10^{-2}
		3×10^{-7}	4×10^{-4}	-2.4×10^{-2}
300	0.9	1.2×10^{-2}	-0.0099	-2.4
		8×10^{-6}	-0.005	-0.82
400	0.7	0.02	0.081	-8.8
		6×10^{-6}	-0.11	-5.3

Interpolation order : 10

Upper line : With extraction

Lower line : Without extraction

3. 4 周波数成分の抜取

前節では一つの周波数の場合なので、複数の周波数成分が含まれる場合には推定精度が低下することが考えられる。振幅が大きい周波数成分を推定した後、原波形から抜き取ることにすれば、次の周波数成分の推定精度の向上が期待できる。そこで、周波数成分の抜取を行うことにした。図8に周波数成分の抜取の手順を示す。表2に正弦波の周波数成分が4個あり、周波数間が離れている場合の抜取の効果を示す。上段が抜き取りあり、下段が抜き取りなしの場合である。4個の周波数が離れているため、抜き取らない場合に既にながりの精度が得られており、抜き取りの効果はあまり出ていない。

表3に周波数が5個で周波数が互いに近い場合の抜き取りの効果を示す。上段が抜き取りあり、下段が抜き取りなしの場合である。

Table 3 Results of frequency extraction

Real value		Estimation error		
Frequency (Hz)	Amplitude	Frequency (Hz)	Amplitude	Phase (deg)
100	1.0	0.002 0.41	0.002 -0.088	1.0 -27.7
105	1.2	-0.03 0.03	-0.04 -0.04	-1.66 -1.66
120	0.8	0.034 0.004	-0.023 -0.007	-1.43 0.79
125	0.5	0.4 0.87	-0.022 -0.117	-35.6 -78
128	0.3	0.2 -31.1	0.021 -0.067	-23.3 95

Interpolation order : 10

Upper line : With extraction

Lower line : Without extraction

表3の場合、5組の周波数が接近しているため、表2に比べ精度が低く、特に、位相の誤差が大きいことがわかる。しかし、抜き取りを行うことにより、周波数、振幅は十分な精度で求められており、高精度の周波数分析ができることがわかる。

Fig. 9 Relationship between estimated values and frequency difference (1)

F_p : Frequency pitch dF : Frequency difference

つぎに、2つの周波数が近い場合の弁別限界を調べる。2つの周波数の差が観測時間の逆数、すなわちFFTの最低周波数より小さくなると、理論上分離出来ない。図9、図10に2つの周波数の差と推定精度の関係を示す。図9は100 Hzで大きさ1の成分に対してもう一つの周波数を同じ大きさで101 Hzから110 Hzまで変化させて、100 Hz成分の推定精度を示したものである。横軸は周波数差をFFTの周波数ピッチで基準化して表示した。補間次数は10で、周波数成分の抜き取りを行った。図9を見ると位相の誤差が大きい、周波数差が大きくなるに従い、誤差が小さくなっている。周波数差が1以下でも誤差が小さくなる場合があるのは、周波数抜き取りが効果をあげたため、周波数ピッチ以内でも抜き取りが精度よく行われれば、もう一つの周波数成分の推定精度もよくなると考えられる。なお、補間次数については5次、10次、20次と変化させたがほとんど差がなく、周波数差が精度を支配していることがわかった。図10は400 Hzで大きさ1の成分に対してもう一つの周波数を同じ大きさで401 Hzから410 Hzまで変化させて、400 Hz成分の推定精度を示したものである。100 Hzの場合に比べると全体的に精度が落ちており、周波数差が大きくなっても精度が上がらなくなっている。これは1周期内のデータ数が100 Hzの10に対して2.5と少ないためと考えられる。この場合も周波数ピッチ以下でも精度がよくなる場合があり、抜き取りの効果と考えられる。

Fig. 10 Relationship between estimated values and frequency difference (2)

F_p : Frequency pitch dF : Frequency difference

4. 結論

1回のサンプリングのみで、高精度の周波数、振幅、位相を推定する方法を検討し、以下の結論を得た。

- 1) サンプリングされたデータに対して、補間によってサンプリング周期が異なるデータを作る方法を検討し、1サイクルのデータ点数が多いほど、補間次数が高いほど、高精度で補間できる。
- 2) 周波数ピッチで決まる周波数からのずれを最小にするように、補間処理することにより、高精度に周波数、振幅、位相を推定できる。
- 3) 補間と抜取を組み合わせた周波数抜取法を提案し、複数の周波数成分を効率よく、抽出できる。

参考文献

- 1) 牛山 聡、東山三樹夫他 2, 一般調和解析による波形分析, 信学技報, EA93-103, 1994-3.
  - 2) 堀 康郎、藤澤二三夫, 小型回転機の振動解析手法とその応用、日本機械学会論文集、Vol. 58, No.556-C, pp 3579-3585, 1992.
  - 3) N. Wiener, The Fourier Integral and Certain of Its Applications, Dover Publication Inc., 1958.
  - 4) 堀 康郎、佐々木実他 1、フーリエ解析の高分解能化について、機械力学・計測制御講演論文集 (Vol.A), 320, 1998.
-