マルチボディ・システムの統一的定式化法*
(可変ゲインペナルティ法による数値解析アルゴリズム)長 田 隆*¹A Unified Approach to Multibody Dynamics Formulation
(Variable-Gain Penalty Algorithm)Takashi NAGATA*²*² Kyushu Institute of Technology, Dept. of Mechanical Engineering,
1-1 Sensuicho, Tobata, Kitakyushu, Fukuoka, 804-8550 Japan

A new dynamical simulation algorithm applicable to a very large class of rigid and flexible multibody systems is presented. It is based on a variable-gain penalty method with scaling, and has the following distinctive features: (i) All kinds of holonomic and nonholonomic equality constraints can be treated in a plain and unified manner; (ii) Stability and specified admissible error of the constraints are always attained; (iii) The formulation has an order N computational cost in terms of both the constrained and unconstrained degrees of freedom, regardless of the system topology; (iv) Unlike the traditional recursive order N algorithms, it is quite amenable to parallel computation; and (v) Since no matrix operations are involved, it can be implemented to very simple general-purpose simulation programs. Versatility, dynamical validity and efficiency of the approach are checked through numerical studies of several particular systems.

Key Words: Dynamics of Machinery, Computer Aided Analysis, Modelling, Flexible Structure, Multibody Dynamics, Nonholonomic Constraints, Penalty Method, Parallel Computation, Order N Algorithm

1. 緒 言

多くの機械は、複数の構成要素が結合されたマルチボディ・システムとして捉える事ができる。この種のシステムの動力学的な定式化を困難にする主たる要因は、幾何学的拘束の取り扱いである。ホロノミック系では、独立な一般化座標を選択することで比較的容易に運動方程式を導出できる場合が多い。一方非ホロノミック拘束には、普遍的な数学的記述法すら存在しない。その中で典型的なのは速度を含んだ等式として表される拘束であるが、ラッチ機構の様に不等式拘束となる場合も有る。非ホロノミック等式拘束は通常ラグランジュの未定乗数によって処理され、その結果ダイナミクスは微分-代数方程式で記述される事になるが、これは一般にステイフで数値的不安定に陥りやすい。この問題を解決するため、多くの近似解法が提案されている。

Baumgarte^{(1),(2)} は幾何学的拘束を適当な微分方程式で置き換え、拘束誤差が指数減衰する様に設定する事で安

定化をはかった。この方法は単純で理解しやすい反面、 N を拘束される自由度として一般に $O(N^3)$ の計算コストがかかるため、大規模なシステムの解析には適さない。また拘束が特異な場合に精度が著しく損なわれる事も指摘されている⁽³⁾。Park ら^{(3),(4)} はこの不具合を回避する一種のペナルティ法を開発した。この手法はペナルティを小さくすると数値的に不安定となり得るが、安定性を確保するのに必要な最小値は一般に時変であり予測も困難である。従って通常ペナルティは極めて大きく設定されるが、これは無用な計算コストを増大させる。Bayo ら⁽⁵⁾ および Kurdila ら⁽⁶⁾ のアルゴリズムは拘束誤差に比例する力以外に仮想的な慣性力や減衰力を付加するが、同じペナルティ法の範疇に入り、数値的な特性も類似していると考えられる。

この様に、既存の手法は何らかの形で運動方程式を緩和するため、数値解がエネルギーや運動量等の観点から見て力学的にどの程度妥当なのか厳しく検証せねばならない。しかし関連する論文の多くは拘束の安定性ばかりに注目し、この点を疎かにしている感がある。またアルゴリズムのパラメタと実際に得られる解の精度との関係が複雑で決定に経験

* 原稿受付 2000年2月16日。

*¹ 正員, 九州工業大学工学部 (〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

E-mail: nagata@mech.kyutech.ac.jp

を要求される。しかも殆どの場合ホロノミック拘束と非ホロノミック拘束で定式化が異なるため、両者が混在するシステムを扱うのが困難である。従って実用上の制約も大きい。

上記の背景から、本論文では非常に広範囲の剛体／柔軟マルチボディ・システムに適用できる新たな一定式化手法を提案する。これは続く 2 節で詳述する様にペナルティ法であるが、拘束の安定性を保証し、かつ誤差の目標値を確実に維持させるため、ゲインを可変とする。本手法は、ホロノミック・非ホロノミックを問わず、あらゆる等式拘束を統一的に扱える。またシステム自由度のみならず拘束される自由度に関しても計算コストが $O(N)$ であって効率が高く、しかもボディ・ジョイント毎に計算を分散できるので、並列計算に適している。更に、固定数のベクトル演算だけで順ダイナミクスが解けるため、行列を使用しない極めて簡潔なコーディングを可能にする。本理論に基づく汎用プログラムを開発し、幾つかのシステムのシミュレーションを通じて計算結果の妥当性を検証し、有用性を確認した。その結果は 3 節で紹介する。

2. 定式化

2.1 運動方程式 N_B 個のボディから成る多体システムを定式化する事を考える。幾何学的拘束を付加する前は、システムを構成する個々のボディの運動方程式が以下の様に表せる(長田⁽⁷⁾ Section 1.4 参照)。

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{u}}_i = \bar{\mathbf{Q}}_i + \bar{\mathbf{F}}_i = \bar{\mathbf{G}}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N_B) \quad (1)$$

但しここで、 $\mathbf{u}_i$ が第 i ボディ (B_i) の一般化速度ベクトル¹であり、一般化座標の変化率 $\dot{\mathbf{q}}_i$ でも良いし、またこれに関して線形で相互に変換可能な関数であれば何でも構わない。 $\bar{\mathbf{Q}}_i$ は対応する一般化力、 $\bar{\mathbf{F}}_i$ はそれ以外の項で、遠心力やコリオリ力等が含まれる。そしてこれらを合わせた力の総計を $\bar{\mathbf{G}}_i$ で表している。左辺の $\mathbf{M}_i$ は質量行列である。どの様な柔軟体であっても、一般化速度ベクトル $\mathbf{u}_i$ を選択し、ボディ内に在る任意の微小質量 dm の位置ベクトル $\mathbf{x}$ とこれに作用する力のベクトル $d\mathbf{f}$ (共に慣性系表示とする) が与えられたとすると、これらの関数は次式より計算する事ができる。

$$\mathbf{M}_i \equiv \int_{B_i} \left[\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}} \right]^T \left[\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}} \right] dm \quad (2a)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_i \equiv \int_{B_i} \left[\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}} \right]^T d\mathbf{f} \quad (2b)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_i \equiv \int_{B_i} - \left[\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{u}} \right]^T \ddot{\mathbf{x}}|_{\dot{\mathbf{u}}=0} dm \quad (2c)$$

但し上式を含め本稿では一貫して、ベクトル関数 $\bar{\mathbf{a}}$ のベク

トル $\bar{\mathbf{b}}$ に関するヤコビ行列 $\partial \bar{\mathbf{a}} / \partial \bar{\mathbf{b}}$ を $\left[\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}}{\partial \bar{\mathbf{b}}} \right]$ と略記し、また $\bar{\mathbf{b}}$ が零の時に $\bar{\mathbf{a}}$ が取る値を $\bar{\mathbf{a}}|_{\bar{\mathbf{b}}=0}$ で表す。

幾何学的拘束を付加する前のシステム方程式は、以下の如く各ボディの方程式を並べるだけで簡単に得られる。

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{G}} \quad (3a)$$

$$\mathbf{M} \equiv \text{diag} [\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_{N_B}] \quad (3b)$$

$$\mathbf{u} \equiv \{ \mathbf{u}_1^T, \mathbf{u}_2^T, \dots, \mathbf{u}_{N_B}^T \}^T \quad (3c)$$

$$\bar{\mathbf{G}} \equiv \{ \bar{\mathbf{G}}_1^T, \bar{\mathbf{G}}_2^T, \dots, \bar{\mathbf{G}}_{N_B}^T \}^T \quad (3d)$$

システムに幾何学的拘束が与えられると、これを満足させるための拘束力が必要となるので、運動方程式が以下の様に変化する。

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{G}} + \bar{\mathbf{C}} \quad (4)$$

上式の $\bar{\mathbf{C}}$ が拘束力である。

2.2 幾何学的拘束の緩和 本稿では、次式で与えられる等式拘束を考える。

$$\bar{\Delta}(t, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{0}} \quad (5a)$$

$$\bar{\delta}(t, \bar{\mathbf{q}}) = \bar{\mathbf{0}} \quad (5b)$$

但し $\bar{\mathbf{q}}$ は式 (3c) と同様に定義されたシステムの一般化座標ベクトルであり、 $\bar{\mathbf{0}}$ は零ベクトルである。通常式 (5a) と式 (5b) は各々非ホロノミック拘束及びホロノミック拘束に対応する。但し後者も、式 (5a) の形に容易に変換できる。例えば時間の逆数の次元を持つ適当な正の定数² ω を用いて

$$\bar{\Delta} = \dot{\bar{\delta}} + \omega \bar{\delta} \quad (6)$$

と置けば、右辺が一般化速度 $\bar{\mathbf{u}}$ を含み、かつ $\bar{\Delta} \rightarrow \bar{\mathbf{0}}$ で $\bar{\delta} \rightarrow \bar{\mathbf{0}}$ となるので、非ホロノミック等式拘束として扱う事ができる。更に、別報⁽⁹⁾ で詳述する様にラッチ型の不等式拘束も式 (5a) または式 (5b) の形で表現する事が出来る。よって以降は式 (5a) の非ホロノミック等式拘束だけを仮定して話を進める。

式 (5a) 左辺の $\bar{\Delta}$ は拘束の誤差ベクトルであって、理想的な状態では常に零であるが、これは数値的な困難を生じるので、微小な値は許すものとする。そのため、ここでは誤差ベクトルの重み付きノルム

$$J \equiv \left(\bar{\Delta}^T \mathbf{S} \bar{\Delta} \right)^{1/2} \quad (7)$$

(以下誤差ノルムと呼ぶ) を適当な許容値に維持する方法を考える。但し上式の $\mathbf{S}$ は、数値的特性を良好にするための正定値な対角行列(定数)である。その導出は 2.4 節に譲るが、これを以下スケーリング行列と呼ぶ事にする。

¹行列とベクトルは汎用プログラミング上の扱いが全く異なる点が重要なので、本論文では後者を上付き線分で表し、敢えて行列と区別する。

²通常これは拘束の減衰係数(後述)と一致させる。

さて、ノルム J を収束させる方法は無数に考えられるが、最も簡単なのは、以下の微分方程式を設定する事であろう。

$$\dot{J} + \omega J = 0 \quad (8)$$

ここで ω は式 (6) にも登場した時間の逆数の次元を持つ定数である。これを拘束の減衰係数と名付ける。上式が満足されれば誤差ノルムが零に向って指数的に減少するが、 ω はその時定数の逆数に相当する。

ここで、数値計算を行う上で重要な注意点が有る。式 (8) を満足する様に拘束力を設定すれば時間と共に幾らでも拘束誤差が減少する様に錯覚するが、実際にはそうならない。何故なら数値積分の許容打ち切り誤差 ε_{int} より小さい拘束誤差は原理的に追跡不能だからである。それにも拘らず式 (8) を厳密に満たす様に要求すると、拘束誤差が零付近で意味も無く激しく変動し、積分刻みが異様に小さくなったり却って誤差が増大したりする。同様の問題は Baumgarte の方法を始めとする既存アルゴリズムの殆どに内在するが、これが最終的に得られる解の精度を予測困難とし、手法のパラメタを選択する際に経験を必要とする主因になっている。式 (8) においてこの不具合を避けるには、誤差ノルムの目標を完全な零とせず、微小ではあるが積分の許容誤差 ε_{int} よりも大きい適当な正の定数 ε とすれば良い。即ち、式 (8) で零にすべき量を J から $J - \varepsilon$ に置き換えて、拘束誤差の満たすべき微分方程式を

$$\dot{J} + \omega(J - \varepsilon) = 0 \quad (9)$$

の如く変更し、実際の計算ではこちらを用いる様になると、数値的特性及び計算効率が格段に改善される。

2.3 拘束力の緩和 前節で緩和された幾何学的拘束において、誤差ベクトルのノルムが式 (9) に従うという条件は与えられているが、ベクトルの各成分には特別な制約が無いため、このままでは式 (4) の拘束力 $\bar{C}$ が一意に決まらない。そこで、以下に挙げる 2 つの条件を拘束力に付加する。その第 1 は殆ど全ての研究者が仮定しているが、拘束力は緩和しても理想的な拘束力と同様に仮想変位と直交するというものである。すると拘束力は、適当な未定乗数 $\bar{\lambda}$ を用いて以下の様に表せる。

$$\bar{C} \equiv [\bar{\Delta} \bar{u}]^T \bar{\lambda} \quad (10)$$

そして第 2 の条件として、上式における未定乗数 $\bar{\lambda}$ が常に誤差ベクトルと重み付きの比例関係に在ると仮定する。即ち、

$$\bar{\lambda} \equiv -\alpha(t) S \bar{\Delta} = -\alpha(t) \bar{\Delta}_S \quad (11)$$

上式の S は式 (7) で導入したスケーリング行列で、

$$\bar{\Delta}_S \equiv S \bar{\Delta} \quad (12)$$

はスケーリングされた拘束誤差ベクトルである。また α は時変のスカラーであり、これをここではゲインと呼ぶ事にする。

これを定数と置くのが通常のパナルティ法^{(3)・(6)}であるが、拘束を安定化するゲインの最小値は一般に変動するので、余程大きな値にしておかないと危険である。しかしこれは運動方程式をスティフにし、無用な計算コストを増大させる。またゲインを定数とすると、仮に安定であっても一般に拘束誤差は指数減衰せず、より複雑な履歴をたどるため、計算効率も提案する可変ゲインの場合より劣ると考えられる。

式 (10) に式 (11) を代入すると、上記の 2 条件を満たす拘束力は次の形で与えられる事が分かる。

$$\bar{C} = -\alpha \bar{c} \quad (13)$$

但しここで、以下の記号を定義した。

$$\bar{c} \equiv [\bar{\Delta} \bar{u}]^T S \bar{\Delta} = [\bar{\Delta} \bar{u}]^T \bar{\Delta}_S \quad (14)$$

これを本稿では拘束力方向ベクトル (constraint force direction vector) と名付ける。式 (13) の拘束力を式 (4) の運動方程式に代入し、一般化加速度 $\ddot{\bar{u}}$ に関して解くと、

$$\ddot{\bar{u}} = M^{-1} (\bar{G} - \alpha \bar{c}) = \ddot{\bar{u}}_0 - \alpha \ddot{\bar{u}}_c \quad (15)$$

の様になる。但しここで、

$$\ddot{\bar{u}}_0 \equiv M^{-1} \bar{G} \quad (16a)$$

$$\ddot{\bar{u}}_c \equiv M^{-1} \bar{c} \quad (16b)$$

なる記号を導入した。上式の $\ddot{\bar{u}}_0$ は拘束力が無い場合の一般化加速度であり、 $\ddot{\bar{u}}_c$ はゲイン α を -1 とした時の拘束力によって生じる一般化加速度に相当する。

ゲイン α を適切に与えれば、誤差ノルムを式 (9) に従って指数的に収束させられる事を次に示す。式 (5a) 左辺の誤差ベクトルを時間で微分すると、次式を得る。

$$\dot{\bar{\Delta}} = [\bar{\Delta} \bar{u}] \dot{\bar{u}} + \dot{\bar{\Delta}} \Big|_{\dot{\bar{u}}=0} \quad (17)$$

特にホロノミック拘束を式 (6) で変換した場合、上式右辺の諸量はその定義に従うと

$$[\bar{\Delta} \bar{u}] = [\dot{\delta} \bar{u}] \quad (18a)$$

$$\dot{\bar{\Delta}} \Big|_{\dot{\bar{u}}=0} = \ddot{\delta} \Big|_{\dot{\bar{u}}=0} + \omega \dot{\delta} \quad (18b)$$

で与えられる。式 (15) を式 (17) に代入すると、拘束誤差は以下の様なダイナミクスを持つ事が分かる。

$$\dot{\bar{\Delta}} = [\bar{\Delta} \bar{u}] (\ddot{\bar{u}}_0 - \alpha \ddot{\bar{u}}_c) + \dot{\bar{\Delta}} \Big|_{\dot{\bar{u}}=0} \quad (19)$$

式 (9) を満たすゲイン α を得るため、式 (7) を

$$J = (\bar{\Delta}^T S \dot{\bar{\Delta}}) / J \quad (20)$$

の如く時間微分する。これを式 (9) に代入し分母を払うと、

$$\bar{\Delta}^T S \dot{\bar{\Delta}} + \omega J (J - \varepsilon) = 0 \quad (21)$$

となる。上式左辺の第 1 項は式 (19) 及び式 (14) より

$$\bar{\Delta}^T S \dot{\bar{\Delta}} = \bar{c}^T (\ddot{\bar{u}}_0 - \alpha \ddot{\bar{u}}_c) + \bar{\Delta}^T S \dot{\bar{\Delta}} \Big|_{\dot{\bar{u}}=0} \quad (22)$$

と置けるので、これを代入して整理すると、ゲイン α に関する 1 次方程式

$$P\alpha = P_0 \quad (23)$$

を得る。但しここで、以下のスカラー量を導入した。

$$P \equiv \bar{c}^T \ddot{\bar{u}}_c \quad (24a)$$

$$P_0 \equiv \bar{c}^T \ddot{\bar{u}}_0 + \bar{\Delta}^T S \bar{\Delta} \Big|_{\ddot{\bar{u}}=0} + \omega J (J - \varepsilon) \quad (24b)$$

式 (24a) の係数 P は、式 (16b) より $\bar{c}^T M^{-1} \bar{c}$ であり、質量行列 M が正定値である事を考えると、拘束力方向ベクトル $\bar{c}$ が零でない限り常に正となる事に注意されたい。これは拘束の正則性よりかなり緩い条件である。何故なら式 (14) においてヤコビ行列 $[\bar{\Delta}_{\bar{u}}]$ のランク落ちが生じて拘束が特異になっても、 $\bar{\Delta}_S$ が偶然その零空間内に在って $\bar{c} = \bar{0}$ となる事は実用上まず無いからである。よって本手法は特異な拘束に対して頑健である事が分かる。この特性は 3.1 節の数値例で実証する。式 (14) より拘束誤差が全く無い場合には拘束力方向ベクトルも零となるため式 (23) からゲイン α を求める事はできないが、拘束が完璧に満たされている瞬間は拘束力も与える必要が無いので、ゲインも零としておけば良い。即ち、

$$\alpha = \begin{cases} P_0 / P & (P \neq 0) \\ 0 & (P = 0) \end{cases} \quad (25)$$

より簡単にゲイン α が得られる。但し実際の計算においては、拘束誤差が零でなくても非常に小さく（例えば $J < \varepsilon/2$ 程度）機械精度の限界に近い時は、上式右辺の分母 P が有効桁を失って意味の無い過大な拘束力が出る恐れがあるため、強制的に $\alpha = 0$ とするべきである。

結局、順ダイナミクスに必要な一般化加速度 $\ddot{\bar{u}}$ の計算は、以下の手順で行えば良い事が分かる。

- システムの状態変数と時刻 t から、運動方程式 (4) におけるシステムの質量行列 M (式 3b) と拘束力以外の力 $\bar{G}$ (式 3d) を計算し、これより拘束力が無い場合の一般化加速度 $\ddot{\bar{u}}_0$ (式 16a) を求める。
- 拘束誤差ベクトル $\bar{\Delta}$ (式 5a) を計算し、そのノルム J (式 7) が十分小さい ($J < \varepsilon/2$ 程度) 時は上記の $\ddot{\bar{u}}_0$ をシステムの一般化加速度とする。そうでない場合は以下を実行する。
- 拘束誤差の速度オフセット $\bar{\Delta} \Big|_{\ddot{\bar{u}}=0}$ (式 17)、拘束力方向ベクトル $\bar{c}$ (式 14)、および対応する一般化加速度 $\ddot{\bar{u}}_c$ (式 16b) を計算する。
- 上記の諸量を用いて、式 (24) の係数 P, P_0 を計算し、式 (23) を解いてゲイン α を計算する。
- すると式 (15) の右辺より、拘束力も含めた一般化加速度 $\ddot{\bar{u}}$ が直ちに求まる。

対応する式を見れば明らかであるが、このアルゴリズムは主要部分が固定数の内積と一次結合のみで構成されており、これに関与するベクトルはシステムの一般化速度 $\ddot{\bar{u}}$ もしくは拘束誤差 $\bar{\Delta}$ の次元である。行列演算が式 (16) (拘束前の質量行列の逆行列とベクトルの積) 及び式 (14) (拘束のヤコビ行列の転置とベクトルの積) に現れるが、アルゴリズムは行列そのものを必要としない。しかもこれらの演算は式 (3b) 等を利用するとボディまたはジョイント毎に分割して実行できる。従って計算コストがシステムの自由度 (ボディ数) のみならず拘束される自由度 (ジョイント数) に関しても 1 乗のオーダーであって効率が良く、並列計算にも適している。また最終的に扱う行列の次元が極めて小さくなり、殆どの場合行列を用いず直接インラインに式を展開できる。実際、後述する汎用プログラムは行列というデータ型を用いず、ベクトルのみを使って極めて簡潔に実装されている。

2.4 誤差ベクトルのスケーリング 式 (7) で導入したスケーリング行列 S については正定値かつ対角という以外何も説明していなかったが、この選択が数値的特性を大きく左右する。確かにゲインを式 (23) から計算すれば、スケーリング行列 S が正定値である限り誤差ノルム J は式 (9) に従って全く同じ指数減衰をするが、誤差ベクトル $\bar{\Delta}$ の各成分の挙動は大きく異なる。この点を明らかにするため、ゲインの方程式 (23) 左辺の係数 P に注目する。これは現在の誤差ベクトルがどの程度誤差ノルムに影響を与えるかを表すものと考えられるが、その定義式 (24a) を式 (16b) と式 (14) を用いて以下の様に書き直してみる。

$$P = \bar{\Delta}^T S D S \bar{\Delta} \quad (26)$$

但し行列 D は

$$D \equiv [\bar{\Delta}_{\bar{u}}] M^{-1} [\bar{\Delta}_{\bar{u}}]^T \quad (27)$$

で与えられ、幾何学的拘束を選択した時点で決まってしまうものである。ここで S を単位行列としてスケーリングを行わない最も素朴なペナルティ法を考えて見ると、行列 D の最大・最小固有値が非常に異なる時には、感度の高い前者の固有ベクトルに対応する方向に集中して拘束力を出そうとする。そしてこれが限界に達すると他の固有ベクトル方向に急激に移行する、という過程を繰り返すので、例え誤差ノルムが滑らかに指数減衰しても拘束力の向きが激しく変動する事になる。スケーリング行列 S は、行列 D の条件数を小さくして上記の不具合を防止するために必要となる。

スケーリングには行列 D の固有値が必要となるが、これを正確に求める事は非現実的である。しかし幸い式 (27) より行列 D は常に対称で、しかも質量行列 M が正定値なので非負定値 (拘束が特異でなければ正定値) である事が保証されている。従って行列 D の固有値はその対角成分の

大きさで見積もれる。この考察から、最も簡便には、スケーリング行列 $\mathbf{S}$ を行列 $\mathbf{D}$ の両側から乗じると対角成分が全て同じ値になる様に設定すれば良い事が分かる。即ち

$$\mathbf{S} = \text{diag} [\dots, s_i, \dots] / s_{\max} \quad (28a)$$

$$s_i \equiv \begin{cases} 1/\sqrt{D_{i,i}} & (0 < D_{i,i}) \\ s_{\max} & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (28b)$$

但し $D_{i,i}$ は行列 $\mathbf{D}$ の第 i 対角成分である。また式 (28a) の $s_{\max}$ は $0 < D_{i,i}$ なる s_i の内最大のものを表すが、これで割っているのは、スケーリング行列 $\mathbf{S}$ の成分の最大値が 1 となる様に正規化するためである。対角成分 $D_{i,i}$ は式 (27) の右辺の両側から単位ベクトル

$$\bar{e}_i = \{0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0\}^T \quad (29)$$

を乗じる事で得られるが、これは

$$D_{i,i} = \bar{c}_i^T \ddot{u}_{c,i} \quad (30a)$$

$$\bar{c}_i \equiv [\bar{\Delta} \bar{u}]^T \bar{e}_i, \quad \ddot{u}_{c,i} \equiv \mathbf{M}^{-1} \bar{c}_i \quad (30b)$$

の様に書く事ができるため、拘束力方向ベクトル (式 14)、対応する加速度 (式 16b) 及び係数 P (式 24a) のサブルーチンを使って簡単に計算する事ができる。

スケーリング行列 $\mathbf{S}$ は少なくとも初期時刻で計算しておく必要が有るが、積分ステップ毎に評価するべきものではなく、多くの問題では定数としても構わない。但し行列 $\mathbf{D}$ が時変でしかも条件数が大きく変動する場合には、適当な間隔 (通常は 1000 ステップに 1 回程度で十分) で行列 $\mathbf{S}$ を更新するのが望ましい。但し再スケーリングを行う場合には、その前後で誤差ノルム J の値が不連続にならない様、行列 $\mathbf{S}$ に定数倍の補正を行う。

3. 数値計算例

本手法に基づいて汎用柔軟多体動解析プログラムを開発し、その妥当性と有効性を幾つかのシステムについて検証した。典型的な解析例を以下に 2 つ紹介する。

3.1 剛体 3 リンク自由振り子の動解析 図 1 に示す 2 次元剛体システムのシミュレーションを行う。システムは線密度 $\rho = 1 \text{ kg/m}$ の剛体棒 B_1, B_2, B_3 と、 B_2 上に固定された質点 $m = 5 \text{ kg}$ より成り、全体が一様重力 ($-y$ 方向) のみを受けている。剛体棒の長さは

$$L_1 = 0.05\sqrt{5} \text{ m}, \quad L_2 = 0.3 \text{ m}, \quad L_3 = 0.15 \text{ m}$$

とし、図中の寸法 d は 0.05 m と置く。また、同図の如く、剛体棒 B_1, B_2, B_3 の各々に沿って質量中心を原点とした座標軸 r_{x1}, r_{x2}, r_{x3} が固定されている。剛体 B_1, B_3 は各々回転ジョイント J_1, J_4 で水平なベース上に拘束されており、更に回転ジョイント J_2, J_3 によって剛体 B_2 と連結されている。従ってこのシステムのトポロジは閉じており、

独立な一般化座標に関して記述される通常の定式化では解析が困難な問題である。

Fig. 1 Configuration of the rigid three-link pendulum.

なお、図 1 においてジョイント角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_2 = \pi/2 = 90 \text{ deg} \\ \theta_3 &= -\cos^{-1}(2/3) \approx -48.19 \text{ deg} \end{aligned} \quad (31)$$

と置くと剛体棒 B_2 が水平となり、しかも幾何学的拘束が満足される。この静止状態を $t = 0$ として、重力によって誘起される振り子運動を $t = 1.5 \text{ sec}$ まで計算した結果を図 2 に示す。但し式 (9) における拘束の減衰係数は $\omega = 10^3 \text{ sec}^{-1}$ 、目標誤差は $\varepsilon = 10^{-2}$ 、数値積分の許容打ち切り誤差は $\varepsilon_{\text{int}} = 10^{-5}$ とした。なお、目標誤差 ε は式 (6) で定義される変換された誤差ベクトル $\bar{\Delta}$ に対するものであるから、実際のホロノミック拘束誤差 $\bar{\delta}$ のノルムに換算すると $\varepsilon/\omega = 10^{-5}$ となる点に注意されたい。本システムにおいて誤差ベクトル $\bar{\delta}$ は距離 [m] の次元を持つので、これは即ちジョイント結合部のずれを約 $10 \mu\text{m}$ に抑える事に相当する。

図 2(a) は図 1 のジョイント角 θ_1, θ_4 である。周期的な振り子運動が生じている事が分かる。一見滑らかな応答であるが、システムは $t = 0.395 \text{ sec}$ と $t = 1.159 \text{ sec}$ の 2 箇所の特異姿勢を通過している。これは、ジョイント角速度の比

$$\begin{aligned} D(\theta_1, \theta_4) &= \dot{\theta}_4 / \dot{\theta}_1 \\ &= \frac{\alpha (\beta \sin(\theta_1 - \theta_4) + \sin \theta_1)}{\beta (\alpha \sin(\theta_1 - \theta_4) + \sin \theta_4)} \end{aligned} \quad (32)$$

$$(\alpha \equiv L_1/d, \quad \beta \equiv L_3/d)$$

をプロットした図 2(b) が不連続になる事から判断できる。両時刻共にジョイント角は $\theta_1 = 296.5 \text{ deg}$, $\theta_4 = 270.0 \text{ deg}$ である。即ちリンク B_3 が鉛直下方を向いた時に特異姿勢

となる。Baumgarte の方法では特異姿勢になると拘束力が計算できないし、他の多くの数値計算法でも解析が困難となる。しかしながら本シミュレーションにおいては拘束の誤差ノルム J が目標値 $\varepsilon = 10^{-2}$ へ速やかに収束し完全に維持されている (図 2c)。しかも 図 2(d) よりエネルギー保存則も満たされており ($\Delta T, \Delta U, \Delta E$ は各々システムの運動エネルギー、位置エネルギー及び全エネルギーの変化を表す)、力学的に妥当な解が安定に得られている事が分かる。これは提案したアルゴリズムが特異な拘束に対しても頑健である事を示している。図 2(e) はペナルティ法におけるゲイン α の履歴である。式 (11) や 式 (13) から分かる様に、これは全体的な拘束力の大きさに対応しているが、同図を見ると、特異姿勢の通過時に極めて大きな値が生じている事が分かる。また、この様に急峻なピークを持つ力を受ける運動を追跡するには当然積分刻みを小さくする必要があるので、特異姿勢の付近は計算コストが余計にかかる。これは、シミュレーション開始時から計測した CPU 時間 T_{CPU} を示した 図 2(f) を見れば明らかである。また同図から、全体の計算時間が 10 分 36 秒である事も分かる³。但しこれにはアニメーションとデータ出力の時間も含まれており、それを除く純粋な数値計算だけならば 9 分 38 秒で済む。何れにしろ十分実用的な解析ができていると言えるであろう。

Fig. 2 Response of the rigid three-link pendulum.

³Power Macintosh G3 350 MHz を使用した場合。

3.2 柔軟骨組み構造物の動解析 柔軟体の運動方程式は、適当な離散化を施すと殆どの場合 式 (1) の形式に帰着される。本プログラムは剛体のみならず、その様な柔軟体を全て扱うことができる。そこで次に、図 3 に示す柔軟骨組み宇宙構造物⁽⁸⁾のシミュレーションを行った。本システムは 20 枚の正六角形パネルから成っており、正五角形の穴が 12 箇所にある。炭素原子が中空球殻状に結合した分子を一般にフラーレン (fullerene) と呼ぶが、同図の構造物はその典型であるサッカーボール型炭素分子 C60 と同じ形状をしている。正六角形パネルは円管部材を辺と対角線に配したラーメン構造であり、隣接するパネル同士も剛に結合されている。円管部材は全て自然長 2 m、外径 1 cm、厚さ 1 mm であり、密度 $\rho = 2.80 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、縦弾性係数 $E = 7.26 \times 10^{10} \text{ Pa}$ の 7075Al-T6 アルミ合金製とする。各円管の柔軟変形は、3 次のエルミート補間多項式を用いて慣性系で離散化した。この場合システムの一般化座標ベクトル (拘束前) は 2520 次元、拘束式の数 は 1560 となる。

Fig. 3 Configuration of the C60 fullerene structure with a thruster.

この種の球殻状構造は同一表面積の平面形状より剛性を高める事が容易で、オムニ性も有るため、太陽光発電や通信・観測などに有用であると山脇⁽⁸⁾は指摘している。そこで本節では、本構造物の正六角形パネルを太陽電池とし、これを用いて電気推進を行う場合を想定する。スラストは 1 基で、正六角形パネルの中央に置き (図 3)、推力 $f = 0.1 \text{ N}$ とする。なお、骨組み構造自身の剛性に注目するため、パネルに張る太陽電池シートの質量や柔軟性等は無視し、また推力以外の外力は働かないものとする。

本システムのシミュレーションを $t = 3.0 \text{ sec}$ まで行った。但し 式 (9) における拘束の減衰係数は $\omega = 10^3 \text{ sec}^{-1}$ 、目標誤差は $\varepsilon = 10^{-1}$ 、数値積分の許容打ち切り誤差は $\varepsilon_{\text{int}} = 10^{-7}$ とした。得られた結果を図 4 に示す。図 4(a) の Δh は、本構造物の進行方向の高さ h (より正確には、スラストの在るノードと点対称位置のノードの進行方向距離) の変化を表す。静止状態にステップ状の推力が加わることで、構造物全体がこの方向に約 15 mm 縮み、

約 1.8 Hz の残留振動が生じている。図 4(b) と 図 4(c) は、各々システムの力学的エネルギー変化 ΔE 及び運動エネルギー変化 ΔT の履歴である。前者はスラストの行った仕事に相当する。後者には Δh に見られない周波数の振動も乗っているが、これは運動エネルギーが全ての柔軟モードの影響を受けるためである。図 4(d) から明らかな様に、巨大な自由度を持つ本システムにおいても拘束の目標精度が安定かつ完全に達成されている。図 4(e) はペナルティ法におけるゲイン α 、図 4(f) は前節と同一の計算機環境において計測した CPU 時間 T_{CPU} を示す。両図より、強い拘束力が生じている時は計算負荷が比較的大きい事が見て取れる。なお、総計算時間はアニメーションとデータ出力も含めて 563 分であった。このままでは十分実用的とは言いがたいが、これは飽くまで 1 台の PC を使用した場合である。前述した様に、提案した定式化はボディまたはジョイント毎にほぼ完全な並列化が可能である。本システムは 210 個のボディ (部材) で構成されているが、これは同じ PC でも 210 台に分散させると、理想的には計算時間を約 2.7 分に短縮できる事を示唆している。

Fig. 4 Response of the C60 fullerene structure undergoing uniform thrust.

4. 結 言

非常に広範囲の剛体／柔軟マルチボディ・システムに適用できる新たな一定式化手法を提案した。ペナルティ法におけるゲインを可変とすることで、幾何学的拘束の安定性を常に保証し、かつその目標精度が確実に維持される。従ってアルゴリズムのパラメタ選択が容易であり、経験が要求されないため実用的である。またシステム自由度のみならず拘束される自由度に関しても計算コストが $O(N)$ であっ

て効率が良く、しかもボディ・ジョイント毎に計算を分散できるので、並列計算に適している。更に、固定数のベクトル演算だけで順ダイナミクスが解けるため、行列を使用しない極めて簡潔なコーディングを可能にする。本理論に基づく汎用プログラムを開発し、幾つかのシステムのシミュレーションを通じて計算結果の妥当性を検証し、有用性を確認した。

本手法はホロノミック・非ホロノミックを問わず、あらゆる等式拘束を統一的に扱えるが、不等式拘束も等式拘束に変換可能である。この点に関しては、紙面の制約のため別報⁽⁹⁾に譲る。また本アルゴリズムの特徴を生かした超並列計算システムを構築し、従来はマルチボディ・ダイナミクスの枠組みで直接的な解析が困難であった数千自由度を越える問題も実用的に扱える様にすることが今後の課題である。

参 考 文 献

- [1] Baumgarte, J., Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **1** (1972), 1-16.
- [2] Baumgarte, J. W., A New Method of Stabilization for Holonomic Constraints, *J. Appl. Mech.*, **50** (1983), 869-870.
- [3] Park, K. C., and Chiou, J. C., Stabilization of Computational Procedures for Constrained Dynamical Systems, *J. Guidance, Control, and Dynamics*, **11-4** (1988), 365-370.
- [4] Park, K. C., Chiou, J. C., and Downer, J. D., Explicit-Implicit Staggered Procedure for Multi-body Dynamics Analysis, *J. Guidance, Control, and Dynamics*, **13-3** (1990), 562-570.
- [5] Bayo, E., de Jalon, J. G., and Serna, M. A., A Modified Lagrangian Formulation for the Dynamic Analysis of Constrained Mechanical Systems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **71** (1988), 183-195.
- [6] Kurdila, A. J., Junkins, J. L., and Hsu, S., Lyapunov Stable Penalty Methods for Imposing Holonomic Constraints in Multibody System Dynamics, *Nonlinear Dynamics*, **4** (1993), 51-82.
- [7] 長田隆, Dynamics of Flexible Multibody Systems: a Formulation with Applications, 東京大学博士論文, (1995).
- [8] 山脇功次, C60 フラーレン宇宙構造体建設の提案, 第 4 3 回宇宙科学技術連合講演会講演集, (1999), 43.
- [9] 長田隆, マルチボディ・システムの統一的定式化法 (不等式拘束の取り扱い), 機論, **66**-649, C (2000), 2924-2928.