マルチボディ・システムの統一的定式化法*
(不等式拘束の取り扱い)長 田 隆^{*1}A Unified Approach to Multibody Dynamics Formulation
(Inequality Constraints)Takashi NAGATA^{*2}^{*2} Kyushu Institute of Technology, Dept. of Mechanical Engineering,
1-1 Sensuicho, Tobata, Kitakyushu, Fukuoka, 804-8550 Japan

A new formulation applicable to a very large class of rigid and flexible multibody systems subjected to equality and latch-type inequality constraints is presented. It is a natural extension of the variable-gain penalty method for systems with holonomic and nonholonomic equality constraints, developed by the author. This paper focuses on the conversion of the inequality constraints to equalities, though it also summarizes the penalty algorithm. Dynamical validity and efficiency of the approach are checked through numerical study of a flexible link system with a latch joint.

Key Words: Dynamics of Machinery, Computer Aided Analysis, Modelling, Flexible Structure, Multibody Dynamics, Nonholonomic Constraints, Inequality Constraints, Penalty Method, Parallel Computation, Order N Algorithm

1. 緒 言

多くの機械は、複数の構成要素が結合されたマルチボディ・システムとして捉える事ができる。この種のシステムの動力学的な定式化を困難にする主たる要因は、幾何学的拘束の取り扱いである。ホロノミック系では、独立な一般化座標を選択することで比較的容易に運動方程式を導出できる場合が多い。一方非ホロノミックな拘束には、普遍的な数学的記述法すら存在しない。その中で典型的なのは速度を含んだ等式として表される拘束であり、これに対しては既に数多くの数値解法が提案されている^{(1)・(6)}。また著者も別報⁽⁷⁾においてそれらの持つ実用上の問題点を考慮し、新たな一定式化手法(可変ゲインペナルティ法)を提案した。本手法は拘束の安定性が保証され、誤差の目標値も確実に維持され、プログラミングが容易で数値計算コストが低く、並列計算に適している上、ホロノミック・非ホロノミックを問わず全ての等式拘束を統一的に扱える。

しかし現実のシステムには、不等式で表現される幾何学的拘束を含むものも存在する。ラッチ機構の様に、一般化座

標が或る範囲内の間は自由で、それを越えると拘束される場合がその典型である。前述の可変ゲインペナルティ法を含む既存の定式化の殆どは、この種のシステムを直接的にモデル化する事ができない。最も簡単な方法として、不等式の境界で剛性が大きく変化する仮想的なバネ等で表現する事も可能であるが、これは一般に運動方程式をスティフにするため、計算コストや数値的安定性の観点から実用的とは言えない。不等式拘束の中でも境界で反射が起きる時は、その前後の不連続な速度変化が表面の材質等に大きく依存するので、動力学的にモデル化せざるを得ない。しかしラッチ機構の如く不等式境界に捕捉される場合は純粋な幾何学的拘束として扱う方が遥かに効率的であり、一般性も高い。

上記の背景から、本論文では別報⁽⁷⁾の定式化手法を、ラッチ型の不等式拘束に拡張する。それに先だって、次節において可変ゲインペナルティ法による等式拘束の統一的な扱いについて簡単に要約する。そしてラッチ型の不等式拘束を等式拘束に変換する方法を3節で示す。そして本理論を開発済みの汎用プログラム⁽⁷⁾に適用し、ラッチ機構を持った柔軟リンクシステムのシミュレーションを通じて計算結果の妥当性を検証し、有用性を確認した。その結果は4節で紹介する。

* 原稿受付 2000年2月16日。

^{*1} 正員, 九州工業大学工学部(〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

E-mail: nagata@mech.kyutech.ac.jp

2. 定式化（等式拘束のみの場合）

本節では、本稿の理論的基礎となる別報⁽⁷⁾の定式化を、読者の便宜のため簡単に要約する。

2.1 運動方程式 N_b 個のボディから成る多体システムを定式化する事を考える。幾何学的拘束を付加する前は、システムを構成する個々のボディの運動方程式が以下の様に表せる（長田⁽⁸⁾ Section 1.4 参照）。

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{u}}_i = \bar{\mathbf{Q}}_i + \bar{\mathbf{F}}_i = \bar{\mathbf{G}}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N_b) \quad (1)$$

但しここで、 $\mathbf{u}_i$ が第 i ボディ (B_i) の一般化速度ベクトル¹であり、一般化座標の変化率 $\dot{\mathbf{q}}_i$ でも良いし、またこれに関して線形で相互に変換可能な関数であれば何でも構わない。 $\bar{\mathbf{Q}}_i$ は対応する一般化力、 $\bar{\mathbf{F}}_i$ はそれ以外の項で、遠心力やコリオリ力等が含まれる。そしてこれらを合わせた力の総計を $\bar{\mathbf{G}}_i$ で表している。左辺の $\mathbf{M}_i$ は質量行列である。どのような柔軟体であっても、一般化速度ベクトル $\mathbf{u}_i$ を選択し、ボディ内に在る任意の微小質量 dm の位置ベクトル $\bar{\mathbf{x}}$ とこれに作用する力のベクトル $d\bar{\mathbf{f}}$ （共に慣性系表示とする）が与えられたとすると、これらの関数は次式より計算する事ができる。

$$\mathbf{M}_i \equiv \int_{B_i} [\dot{\bar{\mathbf{x}}}\bar{\mathbf{u}}]^T [\dot{\bar{\mathbf{x}}}\bar{\mathbf{u}}] dm \quad (2a)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_i \equiv \int_{B_i} [\dot{\bar{\mathbf{x}}}\bar{\mathbf{u}}]^T d\bar{\mathbf{f}} \quad (2b)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_i \equiv \int_{B_i} -[\dot{\bar{\mathbf{x}}}\bar{\mathbf{u}}]^T \ddot{\bar{\mathbf{x}}}|_{\bar{\mathbf{u}}=0} dm \quad (2c)$$

但し上式を含め本稿では一貫して、ベクトル関数 $\bar{\mathbf{a}}$ のベクトル $\bar{\mathbf{b}}$ に関するヤコビ行列 $\partial \bar{\mathbf{a}} / \partial \bar{\mathbf{b}}$ を $[\bar{\mathbf{a}}_{\bar{\mathbf{b}}}]$ と略記し、また $\bar{\mathbf{b}}$ が零の時に $\bar{\mathbf{a}}$ が取る値を $\bar{\mathbf{a}}|_{\bar{\mathbf{b}}=0}$ で表す。

幾何学的拘束を付加する前のシステム方程式は、以下の如く各ボディの方程式を並べるだけで簡単に得られる。

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{G}} \quad (3a)$$

$$\mathbf{M} \equiv \text{diag}[\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_{N_b}] \quad (3b)$$

$$\bar{\mathbf{u}} \equiv \{\bar{\mathbf{u}}_1^T, \bar{\mathbf{u}}_2^T, \dots, \bar{\mathbf{u}}_{N_b}^T\}^T \quad (3c)$$

$$\bar{\mathbf{G}} \equiv \{\bar{\mathbf{G}}_1^T, \bar{\mathbf{G}}_2^T, \dots, \bar{\mathbf{G}}_{N_b}^T\}^T \quad (3d)$$

システムに幾何学的拘束が与えられると、これを満足させるための拘束力が必要となるので、運動方程式が以下の様に変化する。

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{G}} + \bar{\mathbf{C}} \quad (4)$$

上式の $\bar{\mathbf{C}}$ が拘束力である。

¹行列とベクトルは汎用プログラミング上の扱いが全く異なる点が重要なので、本論文では後者を上付き線で表し、敢えて行列と区別する。

2.2 幾何学的拘束の緩和 先ず、次式で与えられる等式拘束を考える。

$$\bar{\Delta}(t, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{0}} \quad (5a)$$

$$\bar{\delta}(t, \bar{\mathbf{q}}) = \bar{\mathbf{0}} \quad (5b)$$

但し $\bar{\mathbf{q}}$ は式 (3c) と同様に定義されたシステムの一般化座標ベクトルであり、 $\bar{\mathbf{0}}$ は零ベクトルである。通常式 (5a) と式 (5b) は各々非ホロノミック拘束およびホロノミック拘束に対応する。但し後者も、例えば時間の逆数の次元を持つ適当な正の定数 ω を用いて

$$\bar{\Delta} = \dot{\bar{\delta}} + \omega \bar{\delta} \quad (6)$$

と置けば、式 (5a) の形に容易に変換できる。更に、3 節で詳述する様にラッチ型の不等式拘束も式 (5a) または式 (5b) の形で表現する事が出来る。従ってそれまでは式 (5a) の非ホロノミック等式拘束だけを仮定して話を進める。

式 (5a) 左辺の $\bar{\Delta}$ は拘束の誤差ベクトルであって、理想的な状態では常に零であるが、これは数値的な困難を生じるので、微小な値は許すものとする。そのため、ここでは誤差ベクトルの重み付きノルム

$$J \equiv (\bar{\Delta}^T \mathbf{S} \bar{\Delta})^{1/2} \quad (7)$$

（以下誤差ノルムと呼ぶ）を適当な許容値に維持する方法を考える。但し上式の $\mathbf{S}$ は、数値的特性を良好にするための正定値な対角行列（定数）である。その導出は別報⁽⁷⁾に譲るが、これを以下スケーリング行列と呼ぶ事にする。微小ではあるが積分の許容誤差 ϵ_{int} よりは大い適当な正の定数 ϵ を目標値として、これに誤差ノルム J を指数関数的に収束させるため、以下の微分方程式を設定する。

$$\dot{J} + \omega(J - \epsilon) = 0 \quad (8)$$

ここで ω は式 (6) にも登場した時間の逆数の次元を持つ定数であって、誤差ノルム J が収束する際の時定数の逆数に相当する。これを拘束の減衰係数と名付ける。

2.3 拘束力の緩和 前節で緩和された幾何学的拘束において、誤差ベクトルのノルムが式 (8) に従うという条件は与えられているが、ベクトルの各成分には特別な制約が無いため、このままでは式 (4) の拘束力 $\bar{\mathbf{C}}$ が一意に決まらない。そこで、以下に挙げる 2 つの条件を拘束力に付加する。その第 1 は殆ど全ての研究者が仮定しているが、拘束力は緩和しても理想的な拘束力と同様に仮想変位と直交すると言うものである。すると拘束力は、適当な未定乗数 $\bar{\lambda}$ を用いて以下の様に表せる。

$$\bar{\mathbf{C}} \equiv [\bar{\Delta}_{\bar{\mathbf{u}}}]^T \bar{\lambda} \quad (9)$$

そして第 2 の条件として、上式における未定乗数 $\bar{\lambda}$ が常に誤差ベクトルと重み付きの比例関係に在ると仮定する。

即ち、

$$\bar{\lambda} \equiv -\alpha(t) S \bar{\Delta} = -\alpha(t) \bar{\Delta}_S \quad (10)$$

上式の S は式 (7) で導入したスケーリング行列で、

$$\bar{\Delta}_S \equiv S \bar{\Delta} \quad (11)$$

はスケーリングされた拘束誤差ベクトルである。また α は時変のスカラーであり、これをここではゲインと呼ぶ事にする。

式 (9) に式 (10) を代入すると、上記の 2 条件を満たす拘束力は

$$\bar{C} = -\dot{\alpha} \bar{c} \quad (12)$$

の形で与えられる事が分かる。但しここで、

$$\bar{c} \equiv [\bar{\Delta}_u]^T S \bar{\Delta} = [\bar{\Delta}_u]^T \bar{\Delta}_S \quad (13)$$

であり、これを拘束力方向ベクトル (constraint force direction vector) と名付ける。

式 (12) の拘束力を式 (4) の運動方程式に代入し、一般化加速度 $\ddot{u}$ に関して解くと、

$$\ddot{u} = M^{-1} (\bar{G} - \alpha \bar{c}) = \ddot{u}_0 - \alpha \ddot{u}_c \quad (14)$$

のようになる。但しここで、

$$\ddot{u}_0 \equiv M^{-1} \bar{G} \quad (15a)$$

$$\ddot{u}_c \equiv M^{-1} \bar{c} \quad (15b)$$

なる記号を導入した。上式の $\ddot{u}_0$ は拘束力が無い場合の一般化加速度であり、 $\ddot{u}_c$ はゲイン α を -1 とした時の拘束力によって生じる一般化加速度に相当する。また、式 (5a) 左辺の誤差ベクトルを時間で微分すると、次式を得る。

$$\dot{\bar{\Delta}} = [\bar{\Delta}_u] \dot{\bar{u}} + \dot{\bar{\Delta}} \Big|_{\bar{u}=0} \quad (16)$$

特にホロノミック拘束を式 (6) で変換した場合、上式右辺の諸量はその定義に従うと

$$[\bar{\Delta}_u] = [\dot{\delta}_u] \quad (17a)$$

$$\dot{\bar{\Delta}} \Big|_{\bar{u}=0} = \dot{\delta} \Big|_{\bar{u}=0} + \omega \dot{\delta} \quad (17b)$$

で与えられる。式 (14) を式 (16) に代入すると、拘束誤差は以下の様なダイナミクスを持つ事が分かる。

$$\dot{\bar{\Delta}} = [\bar{\Delta}_u] (\ddot{u}_0 - \alpha \ddot{u}_c) + \dot{\bar{\Delta}} \Big|_{\bar{u}=0} \quad (18)$$

そして別報⁽⁷⁾で示した様に、ゲイン α を

$$\alpha = \begin{cases} P_0/P & (P \neq 0) \\ 0 & (P = 0) \end{cases} \quad (19)$$

で与えれば、誤差ノルムが式 (8) に従って指数的に収束する。但しここで、以下のスカラー量を導入した。

$$P \equiv \bar{c}^T \ddot{u}_c \quad (20a)$$

$$P_0 \equiv \bar{c}^T \ddot{u}_0 + \bar{\Delta}^T S \dot{\bar{\Delta}} \Big|_{\bar{u}=0} + \omega J (J - \varepsilon) \quad (20b)$$

実際の計算においては、拘束誤差が零でなくても非常に小さく (例えば $J < \varepsilon/2$ 程度) 機械精度の限界に近い時は、式 (19) 右辺の分母 P が有効桁を失って意味の無い過大な拘束力が出る恐れがあるため、強制的に $\alpha = 0$ とする。

対応する式を見れば明らかであるが、このアルゴリズムが要する演算量はシステムの自由度 (ボディ数) のみならず拘束される自由度 (ジョイント数) に関しても 1 乗のオーダーであって効率が良い。しかもボディ及びジョイント毎に計算をほぼ完璧に分散させられるので、並列計算にも適している。また、ベクトルのみを用いた極めて簡潔なプログラミングを可能にする。

3. 不等式拘束

3.1 速度を含まない場合 前節では等式拘束のみを扱った。しかし例えばラッチ機構の様に、一般化座標が或る範囲の間は自由で、それを越えると拘束が生じる場合も存在する。この様な機構は、一般化座標に関する不等式拘束

$$\delta(t, \bar{q}) \geq 0 \quad (21)$$

でモデル化する事ができる (拘束誤差は簡単のためしばらくの間スカラーとする)。この種の幾何学的拘束を前節までの定式化で直接扱う事はできないが、これと等価な等式拘束に変換すれば可能である。変換法は一意ではないが、最も簡単なのは上式左辺の関数 δ を

$$\delta_{IN}(\delta) \equiv a_{IN}(\delta) \delta \quad (22a)$$

$$a_{IN}(\delta) \equiv \begin{cases} 0 & (0 \leq \delta) \\ (\delta/\varepsilon)^{n-1} & (\delta < 0) \end{cases} \quad (22b)$$

の如く不等式が満たされている時 0 となる様に修正し、式 (5b) のホロノミック拘束として表現する事である。但し式 (22b) の ε は式 (8) に見られる誤差ノルムの目標値である。式 (22) より $\delta_{IN}(\delta)$ は元の拘束誤差 δ の n 次関数であるが、後者の大きさが ε の時に前者も同じ絶対値となる。次数 n は適当な整数であるが、 $\delta = 0$ で δ_{IN} の加速度まで連続とするため通常は 3 以上にする。この拘束は $0 \leq \delta$ の間は明らかに何もしないが、 $\delta < 0$ になると拘束力が発生して δ が $-\varepsilon$ より小さくならない事を保証するので、不等式 (21) が維持される。但し、ラッチ機構の場合は一度不等式の境界に達するとこれに捕捉されるので、その後は例え $0 \leq \delta$ となっても $\delta < 0$ の式を使って δ_{IN} を計算しなければならない。なお、不等式の境界 $\delta = 0$ では衝突現象 (速度不連続) が生じ得るが、式 (8) よりその時定数は $1/\omega$ であり、この過程は減衰を伴うので一般に非弾性的である点に注意されたい。

さて、等式拘束に変換した式 (22a) を適用するためには、通常のホロノミック拘束と同様に拘束誤差の速度と加速度が

必要である。そこで同式を時間微分すると、以下を得る。

$$\dot{\delta}_{\text{IN}} = b_{\text{IN}}(\delta) \dot{\delta} \quad (23a)$$

$$\ddot{\delta}_{\text{IN}} = b_{\text{IN}}(\delta) \ddot{\delta} + c_{\text{IN}}(\delta, \dot{\delta}) \quad (23b)$$

$$b_{\text{IN}}(\delta) \equiv n a_{\text{IN}}(\delta) \quad (23c)$$

$$c_{\text{IN}}(\delta, \dot{\delta}) \equiv \dot{b}_{\text{IN}} \dot{\delta} \quad (23d)$$

式 (21) の両辺は簡単のためスカラーとしたが、このような不等式拘束が複数存在する場合も各々に対して式 (22a) の変換を行えば良い。例えば i 番目の拘束を不等式に変換したいなら、式 (22) に従って拘束誤差ベクトル $\bar{\delta}$ を以下の $\bar{\delta}_{\text{IN}}$ に置き換える。

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{\text{IN}}(\bar{\delta}) &= \{\delta_1, \dots, \delta_{i-1}, \delta_{\text{IN}}(\delta_i), \delta_{i+1}, \dots\}^T \\ &= \mathbf{A}_{\text{IN}}(\bar{\delta}) \bar{\delta} \end{aligned} \quad (24a)$$

$$\mathbf{A}_{\text{IN}}(\bar{\delta}) \equiv \text{diag}[1, \dots, 1, a_{\text{IN}}(\delta_i), 1, \dots, 1] \quad (24b)$$

同様にして、拘束誤差の速度及び加速度の式 (23) も以下の如く簡単にベクトルへ拡張する事ができる。

$$\dot{\bar{\delta}}_{\text{IN}} = \mathbf{B}_{\text{IN}}(\bar{\delta}) \dot{\bar{\delta}} \quad (25a)$$

$$\ddot{\bar{\delta}}_{\text{IN}} = \mathbf{B}_{\text{IN}}(\bar{\delta}) \ddot{\bar{\delta}} + \bar{\mathbf{C}}_{\text{IN}}(\bar{\delta}, \dot{\bar{\delta}}) \quad (25b)$$

$$\mathbf{B}_{\text{IN}}(\bar{\delta}) \equiv \text{diag}[1, \dots, 1, b_{\text{IN}}(\delta_i), 1, \dots, 1] \quad (25c)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{IN}}(\bar{\delta}, \dot{\bar{\delta}}) \equiv \{0, \dots, 0, c_{\text{IN}}(\delta_i, \dot{\delta}_i), 0, \dots, 0\}^T \quad (25d)$$

$\bar{\delta}$ 中の他の式を不等式にする場合も、 $\mathbf{A}_{\text{IN}}$ 、 $\mathbf{B}_{\text{IN}}$ 及び $\bar{\mathbf{C}}_{\text{IN}}$ の対応する成分を定数の 1 や 0 から各々 a_{IN} 、 b_{IN} 及び c_{IN} へ次々に置き換えて行くだけで良い。

等式拘束に変換した式 (22a) を適用するには通常のホロノミック拘束と同じく式 (17) 右辺に現れる諸量が必要であるが、これらは式 (25a) と式 (25b) より

$$\left[\dot{\bar{\delta}}_{\text{IN}} \bar{\mathbf{u}} \right] = \mathbf{B}_{\text{IN}}(\bar{\delta}) \left[\dot{\bar{\delta}} \bar{\mathbf{u}} \right] \quad (26a)$$

$$\ddot{\bar{\delta}}_{\text{IN}} \Big|_{\bar{\mathbf{u}}=0} = \mathbf{B}_{\text{IN}}(\bar{\delta}) \ddot{\bar{\delta}} \Big|_{\bar{\mathbf{u}}=0} + \bar{\mathbf{C}}_{\text{IN}}(\bar{\delta}, \dot{\bar{\delta}}) \quad (26b)$$

の様に直ちに得られ、そしてこれと式 (13) より、対応する拘束力方向ベクトルは

$$\bar{\mathbf{c}}_{\text{IN}} = \left[\dot{\bar{\delta}}_{\text{IN}} \bar{\mathbf{u}} \right]^T \bar{\Delta}_{\text{S}} = \left[\dot{\bar{\delta}} \bar{\mathbf{u}} \right]^T \mathbf{B}_{\text{IN}}(\bar{\delta}) \bar{\Delta}_{\text{S}} \quad (26c)$$

とすれば良い事が分かる。

3.2 速度を含む場合 前節と全く同じ手法を用いて、速度を含む不等式拘束

$$\bar{\Delta}(t, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{u}}) \geq \bar{0}, \quad (27)$$

を定式化する事もできる (不等号はベクトルの成分毎に適用されるものとする)。即ち、式 (24a) と同様に行列関数 $\mathbf{A}_{\text{IN}}$ を用いて

$$\bar{\Delta}_{\text{IN}}(\bar{\Delta}) \equiv \mathbf{A}_{\text{IN}}(\bar{\Delta}) \bar{\Delta} \quad (28)$$

の如く定義し、等式拘束 $\bar{\Delta}_{\text{IN}} = \bar{0}$ として扱えば良い。もちろん式 (24b) の様に行列 $\mathbf{A}_{\text{IN}}$ の対応する成分を 1 とすれば、等式拘束を混在させる事も可能である。式 (28) を時間微分すると、式 (25a) に対応する式

$$\dot{\bar{\Delta}}_{\text{IN}} = \mathbf{B}_{\text{IN}}(\bar{\Delta}) \dot{\bar{\Delta}} \quad (29)$$

を得るが、これより変換後の等式拘束を特徴付ける諸量 (式 16 参照) は

$$\left[\bar{\Delta}_{\text{IN}} \bar{\mathbf{u}} \right] = \mathbf{B}_{\text{IN}}(\bar{\Delta}) \left[\bar{\Delta} \bar{\mathbf{u}} \right] \quad (30a)$$

$$\dot{\bar{\Delta}}_{\text{IN}} \Big|_{\bar{\mathbf{u}}=0} = \mathbf{B}_{\text{IN}}(\bar{\Delta}) \dot{\bar{\Delta}} \Big|_{\bar{\mathbf{u}}=0} \quad (30b)$$

となり、これと式 (13) より、対応する拘束力方向ベクトルは

$$\bar{\mathbf{c}}_{\text{IN}} = \left[\bar{\Delta}_{\text{IN}} \bar{\mathbf{u}} \right]^T \bar{\Delta}_{\text{S}} = \left[\bar{\Delta} \bar{\mathbf{u}} \right]^T \mathbf{B}_{\text{IN}}(\bar{\Delta}) \bar{\Delta}_{\text{S}} \quad (30c)$$

と置けば良い事が分かる。

上記の手法を用いると、任意の等式拘束はその一部または全部をラッチ型の不等式拘束に変換する事ができる。

4. 数値計算例

上記定式化を著者の開発した汎用プログラム⁽⁷⁾に適用し、図 1 に示すラッチバネ機構付き柔軟 2 リンク系のシミュレーションを行った。システムは自然長 2 m、外径 1 cm、厚さ 1 mm の円管 B_1 、 B_2 と両者を接続するジョイント J_1 で構成されている。円管は密度 $\rho = 2.80 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、縦弾性係数 $E = 7.26 \times 10^{10} \text{ Pa}$ の 7075Al-T6 アルミ合金製とする。各円管の柔軟変形は、3 次のエルミート補間多項式を用いて慣性系で離散化した。ジョイント J_1 は、球面ジョイントにラッチ機構 (ラッチ角 120 deg) と捻りバネ (剛性 $k = 0.1 \text{ Nm/rad}$ 、自然状態の角度 90 deg) を取り付けたものである。システム全体は初期時刻において、慣性空間 O-xyz の原点 O にジョイント J_1 を一致させ、y 軸に関して対称となる形で静止しており、円管 B_1 、 B_2 は x 軸に対して 0.01 deg の初期角度を持っている。また外力は働かないものとする。計算は 3 次元で行うが、実現する運動は 2 次元 (xy 平面内) である。

Fig. 1 Configuration of the flexible two-link system with a latch joint.

本システムのシミュレーションを $t = 1.2 \text{ sec}$ まで行った結果を図 2 に示す。但し拘束の減衰係数は $\omega = 10^4 \text{ sec}^{-1}$ 、目標誤差は $\varepsilon = 10^{-3}$ 、数値積分の許容打ち切り誤差は $\varepsilon_{\text{int}} = 10^{-10}$ とした。図 2(a) は円管 B_2 先端の垂直位置 y_{tip} (図 1 参照) を示す。捻りバネによって円管が閉じ始めるが、約 0.685 秒後にラッチがかかってジョイント J_1 における角度が固定され、その衝撃で残留振動が生じている。図 2(b) はシステムの力学的エネルギー変化 ΔE の履歴である。ラッチの瞬間に J_1 回りの角速度が失われるのでシステムエネルギーは不連続に減少するが、その前後では保存しているので、得られた解は力学的に妥当であると考えられる。また図 2(c) より拘束の誤差ノルム J も目標値 $\varepsilon = 10^{-3}$ へ速やかに収束し完全に維持されているので、拘束の精度と安定性も実証されている。図 2(d) はペナルティ法におけるゲイン α の履歴であるが、式 (10) や式 (12) から明らかな様に、これは全体的な拘束力の大きさに対応している。同図から、ラッチの瞬間に衝撃力が生じている事が見て取れる。しかしこれによる計算負荷の増加は殆ど無い事が、CPU 時間 T_{CPU} をプロットした図 2(e) から分かる。もしこの機構をラッチの瞬間に剛性が大きく変化する仮想的なバネ等でモデル化したならば、運動方程式がステイフとなって非現実的な計算時間を要するであろう。これは 3 節で提案した不等式拘束の定式化の有効性を示している。また同図より、総計算時間は 9 分 6 秒である (Power Macintosh G3 350 MHz を使用し、アニメーションとデータ出力も行う場合)。

Fig. 2 Response of the flexible two-link system with a latch joint.

5. 結 言

ラッチ型の不等式拘束を含むマルチボディ・システムの動解析に有用な一定式化手法を提案した。本手法は、不等式拘束に適当な変換を施す事により、等式拘束全てを扱え

る可変ゲインペナルティ法を適用可能としたものである。従って、不等式拘束に加えてホロノミック・非ホロノミック等式拘束が混在する複雑なシステムも直接かつ容易に定式化できる利点がある。また不等式の境界における不連続量を算出したりアルゴリズムを切り替えたりする必要も無く、シームレスな動解析ができる。更に数値的安定性・ $O(N)$ 計算効率や並列化の容易さ等、可変ゲインペナルティ法が持つその他の特長も全て継承される。

緒言でも述べた様に、不等式拘束の全てが幾何学的拘束として扱える訳ではない。特に不等式の境界 (ボディ表面等) で反射やスティック・スリップ等が生じる場合は、材質パラメタ等を含む動力学的なモデル化をすべきであり、問題はより困難になる。この点を詳細に検討し、提案した定式化とプログラムの一般性を更に高めて行く事が今後の課題である。

参 考 文 献

- [1] Baumgarte, J., Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **1** (1972), 1-16.
- [2] Baumgarte, J. W., A New Method of Stabilization for Holonomic Constraints, *J. Appl. Mech.*, **50** (1983), 869-870.
- [3] Park, K. C., and Chiou, J. C., Stabilization of Computational Procedures for Constrained Dynamical Systems, *J. Guidance, Control, and Dynamics*, **11-4** (1988), 365-370.
- [4] Park, K. C., Chiou, J. C., and Downer, J. D., Explicit-Implicit Staggered Procedure for Multi-body Dynamics Analysis, *J. Guidance, Control, and Dynamics*, **13-3** (1990), 562-570.
- [5] Bayo, E., de Jalon, J. G., and Serna, M. A., A Modified Lagrangian Formulation for the Dynamic Analysis of Constrained Mechanical Systems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **71** (1988), 183-195.
- [6] Kurdila, A. J., Junkins, J. L., and Hsu, S., Lyapunov Stable Penalty Methods for Imposing Holonomic Constraints in Multibody System Dynamics, *Nonlinear Dynamics*, **4** (1993), 51-82.
- [7] 長田隆, マルチボディ・システムの統一的定式化法 (可変ゲインペナルティ法による数値解析アルゴリズム), *機論*, **66-649**, C(2000), 2917-2923.
- [8] 長田隆, Dynamics of Flexible Multibody Systems: a Formulation with Applications, 東京大学博士論文, (1995).