振り子型動吸振器による吊橋の連成フラッタの制御*

(第2報, 最適設計方法とロバスト性に関する考察)

岡田 徹^{*1}, 本家 浩一^{*1}, 杉井 謙一^{*2}
島田 諭^{*3}, 松久 寛^{*4}

Suppression of Coupled Flutter of a Suspension Bridge by Tuned Pendulum Damper (2nd Report, Study on the Design method and Robustness)

Toru OKADA^{*5}, Koichi HONKE, Kenichi SUGII,
Satoru SHIMADA and Hiroshi MATSUHISA

^{*5} Kobe Steel, Ltd., 5-5, Takatsukadai 1-chome, Nishi-ku, Kobe, Hyogo. 651-2271 Japan

This paper deals with the design method for a tuned pendulum damper (TPD) to suppress the wind induced coupled flutter of a bridge deck, and deals with the effect of a multiple TPD (MTPD) in order to improve the robustness of the single TPD. The design method for TPD is established using control theory on stability for the coupled flutter which is a self exciting vibration system related to asymmetry of the stiffness and damping matrices. This method is extended to the design for MTPD. Thus, it is confirmed that the robustness against tuning error of TPD's frequency and damping is increased by MTPD because of the decreasing of the response of the deck torsional mode and the changing of the phase of the flutter system compared with the single TPD.

Key Words: Flutter, Vibration Control Device, Optimal Design, Tuned Pendulum Damper, Multiple Tuned Pendulum Damper, Robust Control, Suspension Bridge

1. ま え が き

橋梁の長大化が図られる現在, 強風時に発生する連成フラッタに対しての耐風安定性の確保が最重要課題となっている。連成フラッタは, 自励振動の一種で, 橋梁のたわみモードとねじれモードが連成することにより生じ, 非常に強い不安定力を有する。

このような背景のもと, 著者らは, 前報でこの連成フラッタに対し, 振り子型動吸振器(TPD)⁽¹⁾の適用を試み, 解析および実験により, そのフラッタ制御効果を明らかにしている。この振り子型動吸振器は, チューニング振動数が低くなるほど等価極慣性モーメントが大きくなるという特性を有するために, 周期が約10秒と非常に長周期である超長大橋の連成フラッタに対して, 比較的軽い重量でも, 高い効果を発揮する。また減衰および剛性マトリックスの非対称性に起因する連成フラッタに対する動吸振器の有効性を, 信号処

理理論的な考察により明らかにしている。

しかしながら, 動吸振器のパラメータとして重要な固有振動数や減衰比のチューニングに関しては, 定性的な特性について考察を行っているだけで, 具体的な設計方法は明らかにしていない。従来の研究としては, 航空機翼の連成フラッタに対する回転型動吸振器の検討例⁽²⁾があるが, たわみとねじりの2自由度に動吸振器を含めた三自由度系の特性方程式から安定判別式により評価するといったもので, かなり煩雑な式計算と収束計算処理を要し, 設計式としては実用的でない。1自由度の負の減衰型の自励振動系に対しては, 設計方法が提案されているものの⁽³⁾⁽⁴⁾, 連成フラッタのようなマトリックスの非対称性に起因する自励振動に対しては, ほとんど検討されていないようである。

また, 自励振動に対する動吸振器の性能として, チューニング誤差や系の推定誤差に対するロバスト性も重要になる。これに対して, 固有振動数を分布させた多数個の動吸振器に分割する方法などが提案されており, 強制振動系^{(4)~(8)}や負の減衰型の自励振動系⁽⁴⁾に対して, その有効性が指摘されている。

本論文では, まず, 連成フラッタのメカニズムを信号処理論を用いて簡単に説明し, その理論をもとにした振り子型動吸振器のパラメータ設計法を明らかにす

* 原稿受付 2000年3月6日。

^{*1} 正員, (株)神戸製鋼所(☎651-2271 神戸市西区高塚台1-5-5)。

^{*2} (株)神戸製鋼所(☎657-0845 神戸市灘区岩屋中町4-2-15)。

^{*3} (株)コベルコ科研(☎660-0083 尼崎市道意町6-32)。

^{*4} 正員, 京都大学工学部(☎606-8501 京都市左京区吉田本町)。
E-mail: tokada@merl.kobelco.co.jp

る。次に負の減衰型自励振動を対象とした従来手法との比較を行い、本論文で提案する手法の有効性を示す。最後に、動吸振器のチューニング誤差に対するロバスト性向上に向けた検討として、動吸振器の多重化の効果について考察する。

2. 橋梁の連成フラッタ⁽¹⁾

2・1 解析モデル 本研究では、図1(a)に示すように、橋梁の橋桁内部に円軌道を設け、その上を質量体が走行するタイプの動吸振器を想定している。この円軌道型動吸振器を、図1(b)に示す曲率半径の等しい振り子構造に置き換えて解析を行う。図1(b)のとおりに、橋梁を、たわみとねじれの2自由度を有する橋桁の断面モデル(二次元モデル)で表し、そのねじれ中心 G から高さ l_1 の支柱 GP を橋桁に立て、 P 点に長さ l_2 の質量 m_d の振り子を取り付ける。 c_d は動吸振器に付加するダンパの減衰係数である。

まず、橋桁単体のフラッタ特性について説明する。桁幅を B 、橋桁の単位長さあたりの重量および極慣性モーメントをそれぞれ m および I 、たわみおよびねじれ方向の剛性をそれぞれ k_η および k_θ 、各方向の構造減衰係数を c_η 、 c_θ とする。橋桁には揚力 L と空力モーメント M の非定常空気が作用するものとする。ここで、鉛直変位 y を半弦長 $b(=B/2)$ で無次元化して $\eta(=y/b)$ で表し、ねじれ角を θ で表すと、運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_\eta & 0 \\ 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_\eta & 0 \\ 0 & k_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(\dot{\eta}, \eta, \dot{\theta}, \theta) \\ M(\dot{\eta}, \eta, \dot{\theta}, \theta) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1)$$

右辺の非定常空気力 L, M は、八つの非定常空気力係数 $L_{\eta R}, L_{\eta I}, L_{\theta R}, L_{\theta I}, M_{\eta R}, M_{\eta I}, M_{\theta R}, M_{\theta I}$ と空気密度 ρ および角振動数 ω 、桁幅 B を用いて次式で表される。

Fig.1 Bridge deck model with TPD

$$\left. \begin{aligned} L(\dot{\eta}, \eta, \dot{\theta}, \theta) &= \pi \rho B^2 \omega^2 \left(L_{\eta R} \eta + L_{\eta I} \frac{\dot{\eta}}{\omega} + L_{\theta R} \theta + L_{\theta I} \frac{\dot{\theta}}{\omega} \right) \\ M(\dot{\eta}, \eta, \dot{\theta}, \theta) &= \pi \rho B^4 \omega^2 \left(M_{\eta R} \eta + M_{\eta I} \frac{\dot{\eta}}{\omega} + M_{\theta R} \theta + M_{\theta I} \frac{\dot{\theta}}{\omega} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

なお、式(2)の各非定常空気力係数は無次元数である換算風速 $U_r(=U/fB)$ (U :風速, f :振動数)の関数で、橋桁の断面形状によって異なる。本論文では、Theoderson 関数による平板翼の理論値⁽⁹⁾を用いた。これら空気力を式(1)に代入し、各成分を左辺に移項すると、減衰マトリックスおよび剛性マトリックスが非対称となり、条件によっては自励振動であるフラッタが発生する。

ここでは、中央支間長が2500mの超長大吊橋を想定したフラッタ解析結果を示す。吊橋の諸元は、前報と同様に、桁幅 B を38.5m、ケーブルと桁を合わせた単位長さあたりの全死荷重 m を 46.7×10^3 kg/m、極慣性モーメント I を 12.152×10^6 kgm²/m とする。たわみおよびねじれの振動数は、それぞれ0.065 Hz, 0.15 Hz とする。対数減衰率 $\delta(=2\pi\zeta)$ (ζ :減衰比)は各モードに対し0.02 とする。このときのフラッタ解析結果を図2に示す。図中の Heaving はたわみ分岐モードを、Torsional はねじれ分岐モードを示す。図2から、無風時のたわみおよびねじれモードを起点とする両分岐のうち、ねじれ分岐が不安定となり、風速65 m/s($=U_c$:フラッタ風速)でフラッタが発現することがわかる。超長大橋では一般にその目標風速は80 m/sとされており、耐風安定性向上の必要性がうかがわれる。

2・2 連成フラッタのメカニズム 動吸振器を設計する際に重要となるフラッタ発生のメカニズムを説明する⁽¹⁾。式(1)と(2)から整理された運動方程式に対して、減衰および剛性マトリックスの非対角成分となる連成空気力を外力として取扱うと、系全体は以下の伝達関数を用いて図3のブロック線図に展開でき

Fig.2 Response property of bridge deck in wind

Fig. 3 Flutter system

Fig. 4 Bode diagram of flutter system without TPD

る。

$$G_H = \frac{\eta}{L_\theta} = \frac{1}{ms^2 + c'_\eta s + k'_\eta} \quad \text{where } \left. \begin{aligned} k'_\eta &= k_\eta - \pi \rho B^2 L_{\eta R}, \\ c'_\eta &= c_\eta - \pi \rho B^2 L_{\eta I} / \omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$$G_T = \frac{\theta}{M_\eta} = \frac{1}{Is^2 + c'_\theta s + k'_\theta} \quad \text{where } \left. \begin{aligned} k'_\theta &= k_\theta - \pi \rho B^4 M_{\theta R}, \\ c'_\theta &= c_\theta - \pi \rho B^4 M_{\theta I} / \omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$G_L = \frac{L_\theta}{\theta} = \pi \rho B^2 \omega^2 (L_{\theta R} + s L_{\theta I} / \omega) \dots\dots\dots (5)$$

$$G_M = \frac{M_\eta}{\eta} = \pi \rho B^4 \omega^2 (M_{\eta R} + s M_{\eta I} / \omega) \dots\dots\dots (6)$$

式(3), (4)の G_H と G_T は, それぞれ空気力の対角成分を含むたわみとねじれモードの伝達関数, 式(5), (6)の G_L と G_M は, それぞれ揚力と空力モーメントの連成成分の伝達関数を表す。このブロック線図において, $\theta \rightarrow L_\theta \rightarrow \eta \rightarrow M_\eta \rightarrow \theta$ と回る全体ループが不安定となる現象が連成フラッタである。系の安定性は全体系の開ループ伝達関数 ($-G_L G_H G_M G_T$) のゲインと位相, すなわちボード線図から判別でき, 伝達関数の位相角が -180° となる振動数で, ゲインが 0 dB を越えると不安定となる。

ここで, 式(3)~(6)に含まれる各空気力係数が, 風速 U と角振動数 ω の関数であることを考慮して計

Fig. 5 Response property of torsional branch of bridge deck in wind

算したボード線図を図4に示す。風速は 50, 60, 70, 80 m/s に変化させている。図4(a), (b)はそれぞれ全体系の開ループ伝達特性のゲインと位相, 図4(c)は θ から M_η までの連成空気力とたわみモードを合成した伝達関数 $G_L G_H G_M$ のゲイン, 図4(d)にはねじれモード G_T のゲインを示す。図4中の黒丸は位相角が -180° となる振動数を示す。図4(c)と(d)の dB 和に相当する図4(a)から, 風速の増加に伴いゲインが増加し, 風速 70 m/s のときに, 黒丸で示す位相 -180° でのゲインが 0 dB を越えているのがわかる。これは図2のフラッタ風速 65 m/s の結果に対応する。

なお, この連成フラッタ系に適切にチューニングした振り子型動吸振器を取付けると, 図4(d)のねじれ系のゲインが減少するとともに, 黒丸で示す位相 -180° となる振動数が高周波側に推移し, その結果図4(c)のたわみ系のゲインも下がることを前報にて明らかにしている。このことが, 動吸振器の制振メカニズムとなる。

3. 振り子型動吸振器の設計手法

図2から振り子型動吸振器による制振は, 対策前のフラッタ風速である風速 65 m/s 以上のねじれ分岐が対象となる。この領域を拡大したものを図5に示すが, 風速の増加につれて, 負の減衰の絶対値が大きくなるとともに, 振動数が減少することが確認できる。このように風速によって振動特性が大きく変化する系に対して動吸振器を設計する場合, フラッタ風速を最大にするようなチューニングを目指すと, 最大フラッタ風速が陽的には求まらないために, 主系の振動特性を風速の関数として取扱っていく必要がある。しかし, このような方法は式の取扱いが複雑になるとともに, 実際には, 動吸振器によりフラッター風速をどこまで上げられるかということよりも, 目標風速を満足するためのチューニングや, そのロバスト性の方が重要となると考えられる。また, 前報にて, フラッタ風速を最も高めるチューニングが, 他の風速において必ず

しも適切なチューニングにはならないことを明らかにしている。そこで、本研究では、動吸振器を設計する際に、ある目標風速を設定し、その風速における橋梁の振動特性に対して、動吸振器の適切なチューニングを考えることとする。

3.1 動吸振器を含むフラッタ振動系 図1(b)に示すように橋梁のねじれ角を θ 、動吸振器の相対回転角を φ とおいて、ねじれモードに対する振り子形動吸振器の作用について考える。重力加速度を g 、 l_1 – l_2 を円軌道の設置高さ l とおくと、橋梁のねじれ振動は次の運動方程式で表される。

$$\begin{bmatrix} I+m_d l^2 & -m_d l_2 l \\ -m_d l_2 l & m_d l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c'_\theta & 0 \\ 0 & c_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k'_\theta - m_d g l & m_d l_2 g \\ m_d l_2 g & m_d l_2 g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_\eta \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 k'_θ および c'_θ は式(4)に示す空気力を含めた剛性、減衰係数である。この運動方程式において、連成空力モーメント M_η に対する θ の伝達関数 G_{T2} は、

$$G_{T2} = \frac{\theta}{M_\eta} = \frac{G'_T(s)}{1 - G'_T(s)T(s)} \dots\dots\dots (8)$$

となる。ただし、

$$G'_T(s) = \frac{1}{(I+m_d l^2)s^2 + c'_\theta s + (k'_\theta - m_d g l)} \dots\dots\dots (9)$$

$$T(s) = \frac{(m_d l_2)^2 (l s^2 - g)^2}{m_d l_2^2 s^2 + c_d s + m_d l_2 g} \dots\dots\dots (10)$$

である。式(8)～(10)から、動吸振器を含むねじれモードの伝達関数 G_{T2} は、橋桁のねじれモードの伝達関数 G'_T と、動吸振器の伝達関数 T とに分離でき、図6のブロック線図で表される。伝達関数 G'_T には動吸振器の質量 m_d や設置高さ l が含まれているものの、図1(a)のように動吸振器の質量部を箱桁内に設置する場合、 l は小さく、式(4)の橋桁単体のねじれモードの伝達関数とほぼ等しくなる。

一方、動吸振器の伝達関数に関しては、その固有角振動数 ω_{TPD} および減衰比 ζ_{TPD} とを次式で定義し、

$$\omega_{TPD}^2 = \frac{g}{l_2}, \quad \zeta_{TPD} = \frac{c_d}{2m_d l_2 \omega_{TPD}} \dots\dots\dots (11)$$

$s = j\omega$ とすると、式(10)は次式で表すことができる。

$$T(\omega) = \frac{m_d (l\omega^2 + g)^2}{(\omega_{TPD}^2 - \omega^2) + 2j\zeta_{TPD}\omega_{TPD}\omega} \dots\dots\dots (12)$$

Fig. 6 Block diagram of torsional mode with TPD

この式から、振り子形動吸振器の特性は、一般のばね質量系の動吸振器と同様にその重量 m_d と固有角振動数 ω_{TPD} および減衰比 ζ_{TPD} と、それらに加えて設置高さ l により決まることがわかる。

次に、このときのフラッタ全体系について考えてみる。図3の全体系のブロック線図において、図6の動吸振器を含めたねじれの伝達関数を考慮すると、系全体の開ループ伝達関数 G は、 $s = j\omega$ とおくと、

$$G(\omega) = \frac{G'_T(\omega)}{1 - G'_T(\omega)T(\omega)} G'_H(\omega) G_L(\omega) G_M(\omega) \dots\dots\dots (13)$$

となる。ここで、橋桁のたわみの伝達関数 G'_H は、式(3)の伝達関数 G_H に動吸振器の重量の影響が加わって、次のようになる。

$$G'_H = \frac{1}{-(m+m_d)\omega^2 + j\omega c'_\eta + k'_\eta} \dots\dots\dots (14)$$

3.2 安定領域の導出 式(13)の全体系の開ループ伝達関数 $G(\omega)$ において、 $-G(\omega)$ が位相 -180° のときにゲインが 0 dB を上回ると系は不安定になる。すなわち、式(13)の右辺を、正の実数 p を用いて、

$$-\frac{G'_T(\omega)}{1 - G'_T(\omega)T(\omega)} G'_H(\omega) G_L(\omega) G_M(\omega) = -p + 0j \dots\dots\dots (15)$$

とおき、実数部と虚数部からなる連立方程式により ω を消去し、 $p < 1$ を満足する ω_{TPD} 、 ζ_{TPD} の関係を求めれば、これが安定領域となる。しかし、 ω の関数である非定常空気力を含む各伝達関数 G'_H 、 G'_T 、 G_L 、 G_M の展開が非常に複雑になることと、実橋への適用を考えた場合、非定常空気力関数は実験値として与えられるため、これを直接解くことは困難である。そこで、この ω に任意の値として ω_0 を与え、これを消去せずに媒介変数として取扱うことを考える。このとき、式(15)の左辺が負の実数 $-p$ になるための動吸振器の伝達関数 T の条件は、次式で与えられる。

$$T(\omega_0) = \frac{1}{G'_T(\omega_0)} \frac{G'_H(\omega_0) G_L(\omega_0) G_M(\omega_0)}{p} \dots\dots\dots (16)$$

Fig. 7 Stability domain of the system with TPD

ここで、式(16)の右辺を次のように、実数部 α 、虚数部 β を用いて表現し、

$$\frac{1}{G_T^*(\omega_0)} - \frac{G_H(\omega_0)G_L(\omega_0)G_M(\omega_0)}{p} = \alpha(\omega_0) + j\beta(\omega_0) \quad \dots\dots\dots (17)$$

式(16)に式(12)を代入して、実数部と虚数部についての連立方程式を解くと、ある角振動数 ω_0 における振幅を p にするための動吸振器のパラメータ ω_{TPD} 、 ζ_{TPD} は、次式により与えられ、

$$\left. \begin{aligned} \omega_{TPD} &= \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\alpha(\omega_0)}{\alpha(\omega_0)^2 + \beta(\omega_0)^2} m_d (l\omega_0^2 + g)^2} \\ \zeta_{TPD} &= \frac{\beta(\omega_0)}{2\alpha(\omega_0)} \left(\frac{\omega_0}{\omega_{TPD}} - \frac{\omega_{TPD}}{\omega_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ω_0 を媒介変数として取扱うことにより、任意の p における ω_{TPD} 、 ζ_{TPD} の関係を求めることができる。

ここで、橋梁の5%重量(2335 kg/m)の振り子型動吸振器を箱桁内部($l=0$)に取付けた場合の計算例を図7に示す。図7は $f_0(=\omega_0/2\pi)$ を0.01 Hz から0.2 Hz まで変化させて与えたときの $f_{TPD}(=\omega_{TPD}/2\pi)$ と ζ_{TPD} の関係をプロットしたもので、図7(a)、(b)は、それぞれ風速を75 m/s および85 m/s としたときの結果である。安定評価用の振幅 p は1~3まで0.05ごとに与えている。図7(a)から $p=1$ の境界線はループを描き、その値が大きくなるほど、ループが外側に広がっていくことがわかる。よって、 $p=1$ のループの内側の範囲Ⅰの領域のみが、安定になるといえる。ちなみに、ループの外側の範囲Ⅱは、開ループ伝達関数 $G(\omega)$ において、位相 0° で $p>1$ となる解が一つ、範囲Ⅲは $p>1$ となる解が二つとなる領域で、いずれの場合も系は不安定となる。一方、図7(b)の設計風速85 m/s の場合は、 $p=1$ の曲線はループを描かない。すなわち、フラッタを抑えるためのパラメータが存在しないことを意味する。

実際に動吸振器のパラメータを設計する場合は、 $p=1$ の曲線を求めれば十分で、そのループ内に動吸振器のパラメータを調整すればよいことがわかる。式

(17)の G_H 、 G_T 、 G_M および G_L に含まれる各空気力係数は、設計風速 U と ω_0 から計算されるため、 ω_0 を順次変化させて与えることにより、収束計算を行うことなく、陽解法的に ω_{TPD} と ζ_{TPD} を計算してこの曲線を求めることができる。

参考として p を1とし、設計風速を70、75、80、85 m/s として計算した結果を図8に示す。このコンター図がフラッタに対する動吸振器の設計曲線となる。前報においては、この設計曲線を、動吸振器の固有振動数と減衰比の値を少しずつ変えて与え、フラッタ解析により直接求めていたが、その結果とは完全に一致するとともに、計算に要する時間は大幅に短縮された。

3.3 最適パラメータ 次に、動吸振器の最適パラメータについての考察を行う。ここでいう最適パラメータは、3.1節で述べたとおりフラッタ風速を最も高めるパラメータを指すのではなく、ある目標風速において、動吸振器の振動数の調整誤差に対して最もロバストなパラメータとして設定する。従来文献においては、安定化可能な主系負減衰の絶対値を最大にできるパラメータ、すなわち、系を最も安定化せしめるパラメータとして定義されることが多いが、ここでは、実用上安定領域の中心として定義した。この最適パラメータについて、図8において太線で示した目標風速75 m/s の結果を用いて説明する。図8に示す風速75 m/s のループの右端の周波数を f_1 、そのときの減衰比を ζ_1 、また左端を f_2 、 ζ_2 とおく。これらの値を用いて、最適振動数 f_{opt} 、および最適減衰比 ζ_{opt} を次式で定義する。

$$f_{opt} = \frac{f_1 + f_2}{2}, \quad \zeta_{opt} = \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ループの左右両端では、次の条件が満足されるため、

$$\frac{df_{TPD}}{d\zeta_{TPD}} = 2\pi \frac{d\omega_{TPD}/d\omega_0}{d\zeta_{TPD}/d\omega_0} = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

f_1 、 f_2 と ζ_1 、 ζ_2 は、次式

Fig. 8 Flutter speed for bridge deck with TPD

Fig. 9 Optimal parameters of TPD in each wind velocity

$$\frac{d\omega_{TPD}}{d\omega_0}=0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

により算出される ω_{TPD} が極値をとるときの ω_0 の二つの解 ω_{01} と ω_{02} ($\omega_{01} < \omega_{02}$) を用いて、以下の計算により求めることができる。

$$f_1 = \omega_{TPD}(\omega_{01})/(2\pi), \quad f_2 = \omega_{TPD}(\omega_{02})/(2\pi) \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \zeta_{TPD}(\omega_{01}, \omega_{TPD}(\omega_{01})), \\ \zeta_2 &= \zeta_{TPD}(\omega_{02}, \omega_{TPD}(\omega_{02})) \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

ここで、風速に対する $f_1, f_2, \zeta_1, \zeta_2$ および最適パラメータ f_{opt}, ζ_{opt} の変化を図9に示す。両図には各風速における橋桁単体のフラッタの振動数 f_t と減衰比 ζ_t も合せて表示する。図9から、風速の増加とともに、 f_1 と f_2 が接近して安定振動数範囲が減少し、それらの中心周波数である最適振動数 f_{opt} は、風速 75 m/s 以上で、橋桁単体のねじれ振動数 f_t と近い値でほぼ平行に推移することが確認できる。また、そのとき ζ_1 と ζ_2 は、大体同じ値となり、風速の上昇に伴い ζ_t が増加するのに対し、最適減衰 ζ_{opt} は減少する。なお、図9中の f_{opt} および ζ_{opt} は後述する。

3.4 従来手法との比較 自励振動に対する動吸振器設計手法として、文献(3)に提案されている手法との比較を行う。この方法は、自励振動系を負の減衰を有する1自由度のばね質量系に置き換え、それに減衰を有する動吸振器を付加して検討を行ったものである。ここでは、不安定モードとなるねじれ分岐を1自由度の負の自励振動系として取扱い、この従来手法を適用してみる。フラッタ時のねじれモードの角振動数を ω_t 、減衰比を ζ_t ($\zeta_t < 0$) とおき、簡単化のために $l=0$ とすると、運動方程式は、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & m_d l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2I\zeta_t\omega_t & 0 \\ 0 & c_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} I\omega_t^2 & m_d l_2 g \\ m_d l_2 g & m_d l_2 g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

と表される。次の記号

$$\mu_r = \frac{m_d l_2^2}{I}, \quad \Omega^2 = \frac{k_\theta}{I}, \quad \omega_{TPD}^2 = \frac{g}{l_2}, \quad f = \frac{\omega_{TPD}}{\omega_t} \quad \dots\dots\dots (25)$$

を導入すると、この系の特性方程式は、次式で表すことができる。

$$\begin{aligned} s^4 + 2\omega_t s^3(f\zeta_{TPD} + \zeta_t) + \omega_t^2 s^2(1 + f^2 + 4f\zeta_{TPD}\zeta_t) \\ + 2f\omega_t^3 s(\zeta_{TPD} + f\zeta_t) + f^2\omega_t^4(1 - f^2\mu_r) = 0 \quad \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

この式から、ラウスの条件式を用いて、振動系の安定性の評価が行える。最適パラメータは、安定化可能な橋桁ねじれモードの負減衰の絶対値を最大にできるパ

ラメータとして定義する。詳細な説明は省略するが、文献(3)と同様にして最適振動数比を導出すると、 $f=1$ となる。すなわち、最適振動数 f_{opt} は、

$$f_{opt} = \omega_t/(2\pi) \quad \dots\dots\dots (27)$$

このとき、最適減衰比 ζ_{opt} は、次式で表される。

$$\zeta_{opt} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu_r} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_d}{I}l_2^2} = \frac{g}{2\omega_t^2}\sqrt{\frac{m_d}{I}} \quad \dots\dots\dots (28)$$

以上の従来手法から求まる最適パラメータを、前述の提案手法に合せて図9に示す。なお、パラメータの導出に用いた ω_t は、図9に合せて表示している動吸振器重量を考慮した橋桁単体の振動数としている。図9からわかるように、最適振動数および減衰比とも、提案手法で得られるパラメータと大きく異なることが確認できる。系が安定化される振動数範囲 f_1, f_2 との比較からだけでも、従来手法によるチューニングでは、風速 75 m/s までしかフラッタ風速を高められないことがわかる。

ここで、従来手法で結果が大きく異なる理由を考察する。橋桁のねじれモードのみを対象として安定性を評価するということは、図6のねじれ振動系と動吸振器のみの系で安定性を判別することに等しい。そこで、前述の提案手法と同様の手順で、その安定評価を行う。ねじれ振動系の伝達関数を、 ω_t と ζ_t を基にした G_t^* とおき、式(16)と同様にして、振幅 p を1とおいて安定境界を次式の条件で与えると、

$$\frac{G_t^*(\omega_0)}{1 - G_t^*(\omega_0)T(\omega_0)} = 1 + 0j \quad \dots\dots\dots (29)$$

動吸振器の伝達関数の条件は次のとおりとなる。

$$T(\omega) = \frac{1}{G_t^*(\omega_0)} - 1 \quad \dots\dots\dots (30)$$

この式の、右辺の実数部を α 、虚数部を β とおいて、

Fig. 10 α and β in each wind velocity

Fig. 11 Flutter speed by conventional method

Fig. 12 MTPD attached to the deck's torsional mode

式(18)に代入する事により、動吸振器パラメータとフラッタ風速の関係を示す設計曲線が描ける。

図10に系全体を考慮した提案手法と、ねじれモードのみを考慮した場合の α, β を示す。図からたわみモードの振動数近傍で特に差が大きくなっているが、橋桁単体のねじれモードの振動数近傍である0.1 Hz近傍においても、若干の差異があることがわかる。

次に、このねじれモードのみ考慮した α および β から計算した動吸振器パラメータとフラッタ風速の関係を図11に示す。図9に示す従来法の最適パラメータ f_{opt} および ζ_{opt} は、各風速における安定領域のほぼ中央に位置するものの、詳細設計に相当する図8の提案手法と比べて、安定領域自体も大きく異なる。空気力の周波数依存を考慮できていないこともあるが、たわみモードの影響が特に大きいことを確認している。このことから、剛性および減衰行列の非対称性に起因する連成フラッタに対し、たわみモードの影響を無視しての安定性評価は十分な精度が確保できないといえる。

4. ロバスト性向上に向けた検討

4.1 多重振り子型動吸振器(MTPD: Multiple TPD) 図9から、5%重量の動吸振器でも、パラメータの調整次第でフラッタ風速は84 m/sにまで達することが確認される。しかしながら、目標風速である風速80 m/sにおいても、最適振動数に対するチューニング誤差の許容範囲は $\pm 2\%$ しかない。橋梁の振動特性の推定誤差や、動吸振器の性能誤差などから考えると、技術的にはこのパラメータ範囲内で与えることは困難である。そこで、チューニング誤差に対するロ

Fig. 13 Stable domains of 4 MTPD for wind speed of 75 m/s

バスト性を向上させる方法として、動吸振器の多重化による方法について検討を行う。

本研究では、簡単化のために各動吸振器の重量 m_d 、円軌道の設置高さ l ならびに減衰比 ζ_{TPD} は均一とし、振動数は等間隔として与える。動吸振器の個数を n とおいて、その振動数特性は中心周波数 $\omega_{TPD, c}$ と、振動数のバンド幅 v で表し、動吸振器の角振動数を $\omega_{TPD, 1}, \omega_{TPD, 2}, \dots, \omega_{TPD, n}$ とおいて、それぞれ次式で定義する。

$$\omega_{TPD, c} = \frac{\omega_{TPD, 1} + \omega_{TPD, n}}{2}, \quad v = \frac{\omega_{TPD, n} - \omega_{TPD, 1}}{\omega_{TPD, c}} \quad (31)$$

まず、連成フラッタ振動に対する多重動吸振器の安定境界の計算方法について説明する。各動吸振器の伝達関数をそれぞれ $T_1(\omega), T_2(\omega), \dots, T_n(\omega)$ とおくと、図6の橋桁のねじれモードに対する動吸振器のブロック線図は、図12のように複数の動吸振器を並列させた形で表せる。このときの動吸振器全体の伝達関数 $T_{au}(\omega)$ は、

$$T_{au}(\omega) = \sum_{i=1}^n T_i(\omega) \quad (32)$$

と表すことができる。ここで、

$$T_i(\omega) = \frac{m_d(l\omega^2 + g)^2}{(\omega_{TPD, i}^2 - \omega^2)^2 + 2\zeta_{TPD}\omega_{TPD, i}\omega} \quad (33)$$

である。よって、式(17)と同様に動吸振器以外の系の伝達関数をまとめて $\alpha + \beta j$ とおくと、式(13)にならう、動吸振器の安定境界は次の複素方程式で与えられる。

$$\sum_{i=1}^n T_i(\omega_0) = \alpha(\omega_0) + \beta(\omega_0)j \quad (34)$$

この式に、3.2節と同様に角振動数 ω_0 を順次与え、実数部と虚数部の連立方程式を解くことにより、 ω_0 に対する $\omega_{TPD, c}$ と ζ_{TPD} が求まる。ただし、動吸振器が n 個の場合には、有意な解も n 個存在する。なお、以下の計算例では、この連立方程式の解法として、ニュートンラプソン法を利用した。

4.2 計算例 動吸振器の総重量を前章と同様に

Fig. 14 Stable domains of MTPD for wind speed of 80 m/s

Fig. 15 Bode Diagram of flutter system with Single TPD

$[\zeta_{TPD}=0.2]$ (—◇—: Without TPD)

橋梁の5% (2 325 kg) とし、その分割数を4とした結果を図13に示す。図13は、風速75 m/sとしたときの動吸振器パラメータとフラッタの安定境界 ($p=1$) を表したもので、図13(a)はバンド幅 v を30%、図13(b)は v を53%としたときの結果である。図13中のA1~A4は式(34)を満足する四つの解を表している。グラフの薄塗り部分が安定領域を示す。この安定領域は、図7の単一振り子の場合と同様に、振幅倍率 p の値を変えた検討により検証を行っており、ループの内側でかつ他の曲線よりも上側の領域が安定となる。図13(a)には単一動吸振器の結果も合せて表示しているが、動吸振器の多重化により、安定領域が増加しているのが確認できる。しかし図13(b)のように、多重動吸振器のバンド幅 v が広がり過ぎると、安定領域が複数に分かれ、その範囲は減少する。

次に、目標風速を80 m/sとした動吸振器のパラメータと安定領域の関係を図14に示す。動吸振器の個数は4および6とし、それぞれの結果を図14(a)、(b)に示す。解析は、動吸振器のバンド幅 v を10%~50%まで10%ごとに計算しており、図14にはそれ

 Fig. 16 Bode Diagram of flutter system with 4 TPD
 $[\zeta_{TPD}=0.1, v=30\%]$ (—◇—: Without TPD)

ぞれの安定領域のみ示す。 v を30%にした場合が最も安定領域が広く、 v が50%では図14(a)、(b)ともに安定領域は存在しない。図13と14の結果から、動吸振器の多重化は、バンド幅を適切に選定することにより、安定領域を広くできるという面で有効であることが確認できる。

4.3 ロバスト性向上の考察 最後に、動吸振器の多重化により安定領域が広がる理由を考察する。図15および16に、それぞれ振り子型動吸振器の分割数を1および4としたときボード線図を示す。各図は図4と同様に、図(a)、(b)にそれぞれ全体系の開ループ伝達特性のゲインと位相、図(c)は θ から M_7 までの連成空気力とたわみモードを合成した伝達関数 $G_L G_H G_M$ のゲイン、図(d)には動吸振器も含めたねじれモードの伝達関数 G_{T2} のゲインを示す。風速は75 m/sとし、動吸振器の中心周波数 $f_{TPD,c}$ を0.08~0.115 Hzまで0.005 Hzごとに変化させている。減衰比は、図13(a)の安定領域の結果において広い振動数範囲で安定となる値とし、単一の場合は $\zeta_{TPD}=0.2$ 、4分割の場合は $\zeta_{TPD}=0.1$ とした。図中の黒丸および白丸はともに全体系開ループの位相が -180° となる振動数を示し、その中でゲインが0 dBを下回るものを黒丸で示している。また、対策前の伝達関数を破線で示し、位相が -180° となる周波数を菱形で示す。

まず、図(a)の開ループ伝達関数の黒丸のゲインを最も低く抑える $f_{TPD,c}=0.1$ Hzのチューニングに着目する。ねじれ振動系の図(d)において、 $f_{TPD,c}=0.1$ Hzの伝達関数を太線で示すが、図15と16の比較から、動吸振器の多重化は、必ずしも従来の強制加振系

でいわれているような、ピーク全体を平坦化させているわけではないことがわかる。逆にピークそのものの高さは増加しており、他のチューニング振動数についても同様の傾向が見られる。しかし、各チューニング振動数における黒丸の位置は、最大ピークとは異なるとともに、単一の場合に比べて高周波側に推移していることがわかる。その結果、図(c)のたわみ振動系のゲインが下がり、図(a)の全体系においては安定化の傾向に作用する。さらに、動吸振器のチューニング振動数が0.1 Hz以上の領域では、ねじれ系のゲインそのものも小さく抑えられる。以上が、ロバスト性向上のメカニズムと考えられ、連成フラッタに対する多重型動吸振器の有効性が明らかになった。

4. 結 論

得られた主要な結果を以下にまとめる。

(1) マトリックスの非対称性に起因する連成フラッタに対する振り子型動吸振器のチューニング方法を、信号処理理論の考え方を導入して明らかにした。本研究では、安定化領域の中心振動数を最適振動数と定義しているが、その振動数は、目標風速における橋桁単体のねじれモードの振動数に近い値となる。

(2) このねじれモードを対象として、従来提案されている1自由度の負の減衰型自励振動系に対する設計方法を適用し、提案手法と比較した結果、従来手法

ではパラメータ誤差が大きくなることを確認した。連成フラッタに対する動吸振器の設計は、ねじれモードだけでなく、たわみモードの影響も重要になる。

(3) 動吸振器のロバスト性向上に向けて、振動数を分散させた多重化の検討を行った。安定化できるパラメータ領域の設計方法を明らかにするとともに、多重化の有効性を確認した。そのメカニズムは、従来の強制加振系に対しての伝達関数の複数の山全体を平坦にする効果ではなく、広い帯域で系全体の位相を高周波側に移動させるとともに、チューニング振動数によってはねじれ振動系のゲインをより小さく抑える効果によることを明らかにした。

文 献

- (1) 岡田徹・ほか4名, 機論, **66**-644, C(2000), 1165-1172.
- (2) 川島孝幸・池田健, 日本航空宇宙学会誌, **30**-339(1982), 220-226.
- (3) 池田健・五百井俊宏, 機論, **43**-371, C(1977), 2551-2555.
- (4) 阿部雅人・藤野陽三, 土木学会論文集, 465/I-23(1993), 97-106.
- (5) 岩浪孝一・背戸一登, 機論, **50**-449, C(1984), 44-52.
- (6) 阿部雅人・藤野陽三, 土木学会論文集, 465/I-23(1993), 87-96.
- (7) 西原修・松久寛, 機講論, No.95-8 I(1995), 252-255.
- (8) 神谷圭二・ほか3名, 機論, **62**-601, C(1996), 3400-3405.
- (9) 日本鋼構造協会, 構造物の耐風工学, (1997), 148-157.