曲線歯すじ歯車に関する研究* (かみあい特性などについて)

戴 玉 堂^{*1}, 有 賀 幸 則^{*2}
柳 沢 章^{*3}, 長 田 重 慶^{*3}

Study on Cylindrical Gears with Curved Tooth Traces (Basic Characteristics and Tooth Contact Analysis)

Yutang DAI, Yukinori ARIGA^{*4}, Akira YANAGISAWA and Sigeyosi NAGATA

^{*4} Nippon Institute of Technology, Dept. of Mechanical Engineering, Miyashiro, Saitama 345-8501 Japan

In this study, a new type of cylindrical gears has been manufactured by use of CNC hobbing machine. This paper presents a detailed investigation on various characteristics of the gears with curved tooth traces. The contact ratio are calculated. The limits of undercutting and tooth pointing are determined. And then, the contact characteristics of the mating gears are analyzed by simulating the generation process and mating motion. Different contact patterns are presented as examples to show the changes of the contact area under different mating conditions. The mating gear teeth contact with each other at a line when there is no errors and no crowning. Three methods for generation of crowned gear tooth surface are proposed. Moreover, the influences on the bearing contacts by manufacturing error and misalignment are investigated.

Key Words: Cylindrical Gear, Curved Tooth Trace, Undercutting, Contact Ratio, Tooth Contact Analysis

1. 緒 言

円弧歯すじ歯車は従来、グリーソン式のリング状カッタなどで一歯ずつ加工されてきた⁽¹⁾。これに対して著者らは、加工能率向上を目的にCNCホブ盤を用いて舞いツールで連続創成できる歯切り法を提案し、得られる歯車の歯形および歯すじについて理論解析を行った⁽¹⁾。その結果、この歯車の歯すじは、厳密な円弧ではなく、円弧に近い曲線になることを明らかにした。このことから、この曲線歯すじ歯車の対は、歯当りなどのかみあい特性が円弧歯すじ歯車の場合と異なると推測される。

そこで、本報告では、曲線歯すじ歯車のかみあい特性を明らかにするため、まず基本形状よりかみあい率を求め、切り下げと歯先の尖り限界を検討する。つぎに歯面同士間の接触状態を分析するための等隙線を求める方法を示し、その方法を用いて誤差がない場合の同時接触線を求め、またクラウニングが付く場合およ

び加工・組立誤差がある場合の接触状態がどのように変化するか、などのかみあい特性を解明する。

2. 基本形状とかみあい率

図1におすカッタで創成する曲線歯すじ歯車（おす歯車と呼ぶ）の概略図を示す。この歯車の歯すじは円弧に近い曲線であり、歯すじ方向中央の軸直角断面の歯形は標準インボリュート曲線である⁽¹⁾。この図において E は舞いツールの回転半径であり、凹・凸歯面

Fig.1 The gear with curved tooth trace

* 原稿受付 2000年2月16日。

^{*1} 正員, 日本工業大学大学院 (〒345-8501 埼玉県南埼玉郡宮代町学園台4-1)。

^{*2} 正員, 日本工業大学工学部。

^{*3} 日本工業大学工学部。

E-mail: ariga@nit.ac.jp

の歯すじの平均曲率半径でもある。曲線歯すじ歯車のピッチ円直径 d 、歯先円直径 d_a 、歯たけ h などの基本寸法は同じ歯直角断面を持つ平歯車と同様に計算できる。

一对の曲線歯すじ歯車がかみあう場合、かみあい率ははすば歯車と同様に次式で表すことができる。

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_{sp} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに ε_0 は正面かみあい率で、平歯車と同様に計算する。 ε_{sp} は重なりかみあい率である。ピッチ円筒上における歯すじ曲線は次の弧長 ξ と Z 座標との関係式で表される⁽¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \xi(T) &= y_p \cos T + mT/2 - E \\ T(Z) &= \sin^{-1}(-Z/y_p) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (2)$$

ここに $y_p = E \pm m\pi/4$ 、凹歯面の場合は '+' を、凸歯面の場合は '-' を採る。なお m はモジュール、 T は Z 座標に関わる媒介変数である。図 1 に示している弧長 ξ_0 は、端面と中央断面での弧長 ξ の差 $|\xi(Z=b/2) - \xi(Z=0)|$ によって計算できる。したがって、重なりかみあい率は次式で与えられる。

$$\varepsilon_{sp} = \frac{\xi_0}{P} = \frac{2y_p + m \sin^{-1}(b/2y_p) - \sqrt{4y_p^2 - b^2}}{2m\pi} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $P = m\pi$ はピッチである。図 2 に重なりかみあい率と歯幅及び歯すじの平均曲率半径との関係を示す。破線は $y_p = E \pm m\pi/4$ で式(3)に代入して計算した重なりかみあい率を、実線は $y_p = E$ として計算したものを表している。破線と実線($E=40$)の差が小さいため、凸面と凹面とも $y_p = E$ として重なりかみあい率を計算しても良い。また比較のために、二点鎖線で $\beta=15^\circ$ のはすば歯車の重なりかみあい率を表示している。

3. 設計諸元の限界

3.1 切り下げ 前報において歯形の解析方法を論じた。よってラック形カッタの直線刃を細かく分割し

Fig.2 Overlap contact ratio($m=2$)

て、創成する歯車の各断面での歯形曲線を求めてプロットすれば、歯車は切り下げが発生するかどうか容易にわかる。そこで、図 3(a)に示すようなおすカッタの直線部の先端(コーナ A)を歯車のピッチ円から 1.25m 切り込み、 $Z=0, 15, 24$ の三つの断面での歯形を求めて図 3(b)に示す。この歯車の諸元はモジュール $m=2$ 、歯数 $z=15$ 、歯すじの平均曲率半径 $E=40$ 、工具圧力角 $\alpha_0=20^\circ$ としている。刃形上の点 A と点 K に対応する歯形上の点はそれぞれ A_1, A_2, A_3 及び K_1, K_2, K_3 と表している。図を見てもわかるように、中央断面($Z=0$)における歯形曲線は歯元近くで折り返している。これは切り下げが生じていることを意味する。また、 $Z=15$ の断面では切り下げも発生しているが、量は小さく、発生する位置も低い($r_{ca} < r_{ci}$)。 $Z=24$ の断面では切り下げがまったく生じていない。

この例より、中央断面($Z=0$)は切り下げが最も発生しやすい断面であることがわかった。その断面での歯形は標準インボリュート曲線であるため、曲線歯すじ歯車の切り下げ限界歯数は平歯車と同じように計算しても良い。

3.2 端部における歯先の尖り 全歯幅にわたって、各歯直角断面で基準ピッチ円筒上の歯厚は一様であるが、歯先の厚さ S_a は歯幅中央から両端に向かって減少してくる。これは両端での歯形に相応する圧力角が中央断面より大きくなっているためである。任意軸直角断面において、ピッチ円半径を R 、凹面と凸面の歯先位置ベクトルを r_{ca}, r_{va} と表示すれば、歯先の厚さ S_a は次の式で求められる。

$$S_a = |r_{ca} - r_{va}|, \quad |r_{ca}| = |r_{va}| = R + m \quad \dots\dots\dots (4)$$

Fig.3 Undercutting on different cross-section

Fig.4 Tooth pointing phenomenon($m=2, z=35$)

図4に軸直角断面における歯先の厚さ S_a と断面位置 Z との関係を示す．ここにモジュール $m=2$ ，歯数 $z=35$ としている．図を見てもわかるとおり，ある断面では歯先の厚さ S_a が零となっている．つまりその断面において歯先が尖る．その尖り位置は歯すじの平均曲率半径 E の変化にしたがって移動している．そこで歯幅両側で歯先が尖る点の Z 座標を求め，その両点間の距離 b_0 を計算して歯すじの平均曲率半径 E と比較する．図4に示している $E=50, 70, 100$ の場合， b_0/E の値はそれぞれ 1.318, 1.31, 1.303 である．諸元範囲 $m=1.5\sim 10$ ， $z=18\sim 120$ ， $E=35\sim 200$ 内で計算しても， b_0/E の値は 1.25 から 1.35 までの範囲内で変動する．したがって，歯車両端で歯先の尖りを避けるために，歯幅 b と歯すじの平均曲率半径 E との比率を 1.25 以下に設計すれば良い．

4. かみあい解析理論

4.1 接触点 おすとめす歯車の歯面を求めるには，前報と同様に三つの媒介変数 u, t, γ を定義する． u は標準ラック型カッタの両直線刃の交点から切れ刃上の任意点との距離とし， t と γ は創成運動による歯車の回転角をなす成分である⁽¹⁾．前報において，おすとめす歯車に対するそれぞれの媒介変数 u_1, t_1, γ_1 及び u_2, t_2, γ_2 の関係はすでに導出した．本報ではそれらの関係を簡略して下記の方程式で表示する．

$$f(u_1, t_1, \gamma_1)=0, g(u_2, t_2, \gamma_2)=0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

一对の歯車のかみあい特性を分析するために，図5に示すかみあい座標系を定義する．各座標系の原点は歯幅中央断面に置く．座標系 $O_1-X_1Y_1Z_1$ はおす歯車に固定し， Z_1 軸はおす歯車軸に一致する．座標系 $O_2-X_2Y_2Z_2$ はめす歯車に固定し， Z_2 軸はめす歯車軸に一致する．座標系 $O_f-X_fY_fZ_f$ は空間固定の静止座標系で， Y_f 軸は原点 O_1 と O_2 との連結線に置く． ϕ_1 と ϕ_2 はそれぞれおすとめす歯車の回転角パラメータとする．

Fig.5 Coordinates to mating gears

座標系 $O_1-X_1Y_1Z_1$ において，おす歯車の歯面位置ベクトル $r_1(u_1, t_1, \gamma_1)$ を求め，静止座標系 $O_f-X_fY_fZ_f$ に変換して $r_1'(u_1, t_1, \gamma_1, \phi_1)$ と表すことにする．同様に， $O_f-X_fY_fZ_f$ 系に変換しためす歯車の歯面位置ベクトルを $r_2'(u_2, t_2, \gamma_2, \phi_2)$ と表す．また歯面位置ベクトルから，それぞれの単位法線ベクトルを求めることができる．静止座標系 $O_f-X_fY_fZ_f$ における単位法線ベクトルは次のように表せる．

おす歯車

$$n_1' = \begin{pmatrix} -\sin\alpha_0 \cos\Gamma_1 - \cos\alpha_0 \cos T_1 \sin\Gamma_1 \\ -\sin\alpha_0 \sin\Gamma_1 + \cos\alpha_0 \cos T_1 \cos\Gamma_1 \\ -\cos\alpha_0 \sin T_1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

めす歯車

$$n_2' = \begin{pmatrix} \sin\alpha_0 \cos\Gamma_2 - \cos\alpha_0 \cos T_2 \sin\Gamma_2 \\ -\sin\alpha_0 \sin\Gamma_2 - \cos\alpha_0 \cos T_2 \cos\Gamma_2 \\ -\cos\alpha_0 \sin T_2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに $\Gamma_1 = t_1 + \gamma_1 + \phi_1$ ， $\Gamma_2 = t_2 + \gamma_2 + \phi_2$ ， $T_1 = z_1 t_1$ ， $T_2 = z_2 t_2$ であり， z_1 と z_2 はおすとめす歯車の歯数である．

静止座標系 $O_f-X_fY_fZ_f$ において，かみあっている両歯面には接触点での位置ベクトルが等しく，法線方向も一致する．つまり次の方程式が成り立つ．

$$\left. \begin{aligned} r_1'(u_1, t_1, \gamma_1, \phi_1) &= r_2'(u_2, t_2, \gamma_2, \phi_2) \\ n_1'(t_1, \gamma_1, \phi_1) &= n_2'(t_2, \gamma_2, \phi_2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに $|n_1'| = |n_2'| = 1$ であるため，式(8)と(5)を連立して七つの方程式になる．よって8個のパラメータ $u_1, t_1, \gamma_1, \phi_1, u_2, t_2, \gamma_2, \phi_2$ の内一つのみは独立変数となる．たとえば ϕ_1 を指定し，数値計算でその連立方程式を解けば， ϕ_1 に対応する回転位置におけるの接触点座標が得られる．

4.2 歯面間隙間 接触点のまわりの歯面間隙間を求めるには，接触点における接平面(Ω)を考え，接平面の法線方向でお互いの歯面(Π_1 と Π_2)と接平面との

Fig.6 Coordinates to contact point

距離を足し合わせれば歯面間隙間が得られる．本報では，図 6 に示すような接触点座標系 $O_P-X_P Y_P Z_P$ を定義する（座標変換は付録参照）．任意点で接平面に垂直な直線を引き，その直線と両歯面との交点の Y_P 座標値をそれぞれ Y_{P1} , Y_{P2} とすれば，その点における歯面間隙間 δ は次式で与えられる．

$$\delta = |Y_{P2} - Y_{P1}| \quad \dots\dots\dots (9)$$

曲線歯すじ歯車の場合，軸方向の変位がなければ，中央断面 ($Z_f=0$) においてはインボリュート曲線同士のかみあいである．したがって，接触点座標系の原点 O_P を中央断面に置くことはもっとも便利である．その場合，座標系 $O_P-X_P Y_P Z_P$ から接触点座標系への変換は中央断面内の平行移動と Y_P 軸の回転で済む．かみあい歯面同士は凸面と凹面であるため，中央断面から離れる点での歯面間隙間は法線方向に求めるべきである．その法線方向の隙間を δ_n と表せば，以下のように計算できる．

$$\left. \begin{aligned} \delta_n &= \delta \cos \beta \\ \beta &= \tan^{-1} \left(-\frac{m + 2Z_f}{2\sqrt{(E + \pi m/4)^2 - Z_f^2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

接触点 O_P を中心に同じ隙間(たとえば $\delta=3\mu\text{m}$)の点列を求めて連ねれば，いわゆる等隙線が得られる．それらの等隙線によって，接触点周辺の歯面同士の接触状態を分析できる．まず角度パラメータ ϕ_1 を固定し，各軸直角断面における両歯形曲線間の最小隙間 δ_m を求める． $\delta_m=0$ とすれば，その点は接触点である． $\delta_m \neq 0$ であれば，理論上両歯面はその断面で接触しない．指定した値(δ_0)の等隙線を求めるには， δ_m に対応するおす歯面上の点での u 値を u_m と表し， $u > u_m$ と $u < u_m$ を条件付けて隙間が δ_0 に等しい二点を探し出す．このように全歯幅にわたって解析すれば，等隙線を求めることができる．また ϕ_1 を変化させて，各回転位置でのかみあい解析により歯面同士の接触状態の流れを把握できる．

5. 誤差とかみあい特性

5.1 誤差がない時のかみあい 表 1 に計算例とした曲線歯すじ歯車の主要諸元を示す．おす歯車のピッチ円上歯厚を標準値とし，加工と組立誤差もないと仮定する．おす歯車の凹歯面とめす歯車の凸歯面をかみあわせる場合，まず中央断面における凹歯面のピッチ点を P_1 とし， $O_P P_1$ と Y_P 軸が一致する時を $\phi_1=0$ とする．その時点における接触状態を等隙線で図 7(a) に示す．図示の $\delta=0\mu\text{m}$ の等隙線は同時接触線と見

Table.1 Specifications of mating gears

Module	m	2
Number of teeth	Z_1/Z_2	25/35
Normal pressure angle	α_0	20°
Pitch diameter	d	50/70
Outside diameter	d_a	54/74
Face width	b	32mm
Radius of curvature of tooth trace	E	40mm

なすことができる．また ϕ_1 を 2° ごとに変化させて，各回転位置での接触状態を解析した結果，歯面同士のかみあいは線接触である．図 7(b) はおす歯車の凹歯面上の接触線を直観的に表すものである．図でもわかるように，接触線は両端に向かって大きく曲がる傾向が現れる．なお， $Z=-1$ の断面に対して接触線がほぼ対称である．

カッタの回転軸をブランクの中央断面から $m/2$ 上げて歯切りすれば，歯すじは中央断面に対しほぼ対称にできることを前報⁽¹⁾において論じた．そこで本報では，そのような曲線歯すじ歯車の接触線を求めると，接触線も中央断面に対しほぼ対称にできることがわかった．次章からは中央断面に対し歯すじが対称である歯車を解析対象とする．

5.2 クラウニングが付く時のかみあい クラウニングは理論上の歯当たりの面積を小さくするにもかかわらず，歯の折損を防止するのに役立つことは周知の事実である．クラウニングがないと片当たりすることが多いからである⁽³⁾．

曲線歯すじ歯車には，クラウニングが簡単に付けられる特徴がある．おすカッタで切削する場合，カッタの回転半径 E は変えず，切り込み量を Δh 増やせば，図 8(a) に示すように，ラック形カッタのピッチ面での刃厚が S_F から S_h に増加する．その増加量は

Fig.7 Contact lines on concave tooth surface

Fig.8 Relationships between curved teeth

$$S_h - S_P = 2\Delta h \tan \alpha_0 \quad (11)$$

である。ゆえに、創成する凹面の歯すじ曲率半径が $\rho_{1c}=E+S_h/2$ に増大し、凸面の歯すじ曲率半径が $\rho_{1v}=E-S_h/2$ に減少する。その歯車を正規のめす歯車とかみあわせると、図 8(b)に示すように両端で隙間が生じる。同様に、めすカッタの切り込み量を Δh 増やす場合にも同じ効果を得ることができる。

歯面にクラウニングが付くと、理論上では点接触になる。 $\phi_1=0$ の時点における接触状態を図 9 に示す。(a)には端部で $11\mu\text{m}$ の最小隙間が生じており、(b)には端部で $2.6\mu\text{m}$ の最小隙間が生じている。その図より弾性変形やなじみによる接触楕円を推測することができる。

また軸間距離を正規の状態より ΔC 広げる場合、歯面間の接触状態を調べると、両端に向かって隙間が増加してくるがわかった。 $\Delta C=\Delta h$ とすると、 $\phi_1=0$ の時点で歯面間の接触状態は図 9 に示す状態とほぼ同じとなる(図を略す)。

以上で述べたように、バックラッシュを付けると同様な方法により、歯面両端にクラウニングを付けること

Fig.9 Distribution of clearance on concave tooth surface

ができる。しかし、過大なバックラッシュは望ましくないから、それらの方法はより小さいクラウニングを付ける場合に限っている。比較的大きいクラウニングを要求する場合、凸歯面と凹歯面を異なる回転半径で創成すべきである。たとえばおすカッタで切削する場合、凹面を創成するにはカッタの回転半径を E より大きくし(図 8 参照)、凸面を創成するにはカッタの回転半径を E より小さくする。

5.3 誤差が歯当たりに与える影響と対策 加工・組立誤差が存在する場合、歯面同士の接触状態の解析によって歯当たりへの影響及び対策を検討することができる。そこで前章と同様に、おす歯車に限って歯面間接触状態を調べることにする。図 10 に計算例とした三種類の誤差とその時の歯すじの概略を、図 11 にそれらの誤差による歯面間接触状態の変化を示す。

まず図 10(a)に示すように、おす歯車歯すじの平均曲率半径 E がめす歯車より小さい($\Delta E=0.1\text{mm}$)場合を想定する。その時の歯面間接触状態を図 11(a)に示す。図 11(a)からわかるように、歯面の両端しか接触しない。この場合の対策として、軸間距離を 0.15mm 広げると、歯当りを中央に戻すことができる。

図 10(b)に軸が傾いた場合と軸方向に変位がある場合の様子を示す。クラウニングがない場合、軸がわずかに傾いてもひどい片当たりになる。軸方向にわずかな変位が有っても同じである。クラウニングを付けると、片当りを緩和できる。だが、その誤差量も制限されている。そこで歯面に $11\mu\text{m}$ のクラウニング(図 9(a)参照)を与え、前述の二種類の誤差が有る場合の接触状態を調べる。図 11(b)に軸の傾き誤差($\Delta\psi=0.04^\circ$)がある場合の接触状態を、図 11(c)に軸方向の変位($\Delta Z=0.04\text{mm}$)がある場合の接触状態を示す。両方とも歯当たりが端部に寄っている。しかし、それらの影響を逆に利用すれば、単一の誤差による片当りを軽減または完全にうち消すことが可能である。図 11(d)は軸の傾き誤差と軸方向の変位が同時に存在する場合、

Fig.10 Manufacturing error and axial misalignment

Fig.11 Influence of manufacturing error and misalignment on bearing contacts

二つの誤差の影響を相殺する効果を示すものである。
図 11(d)に対し軸方向の変位量 ΔZ を 0.053mm に増やせば、接触点が中央断面に戻り、接触状態を図 9(a)とほぼ一致させることができる(図を略す)。

また軸方向にゆとりを与え、負荷によるセルフセンタリングの作用により、軸方向の変位などによる片当たりを自ら直すことも可能である⁽³⁾。

6. 結 言

曲線歯すじ円筒歯車のかみあいなどの特性を解明するために、理論解析を行い、次のような結果を得ることができた。

- (1) 切り下げと歯先の尖りを検討することによって、曲線歯すじ歯車の諸元の設計限界を提示した。
- (2) 誤差とクラウニングがない場合、理論上では曲線歯すじ歯車のかみあいは線接触である。
- (3) 歯すじの曲率を変える方法と軸間距離を広げる方法によって、バックラッシュを付けるとともに、歯面にクラウニングも簡単に付けられる。
- (4) 加工・組立誤差が歯当たりを与える影響を調べ、それらの対策をも考察した。

文 献

- (1) 長田・有賀・戴：CNC ホブ盤による曲線歯すじ歯車の新しい製作方法，機論，65-630，C(1999)，702。
- (2) 戴・有賀・長田：CNC ホブ盤による曲線歯すじ歯車の歯切り(プランクが鋼材の場合)，精密工学会春季講演論文集，(1998)，369。
- (3) 石橋：円弧歯歯車の特性について，機論，31-225，(1965)，864。
- (4) Litvin and Tsay：Helical Gear With Circular Arc Teeth, Simulation of Conditions of Meshing and Bearing Contact, Trans. ASME, Vol. 107, Dec. 1985, 556。

- (5) 島地・小川・今橋：軸変位歯車としてのハイポイドギヤの歯面(歯面の干渉に関する一調査)，機論，57-536，C(1991)，1324。
- (6) 三留：円すい形インポリュート歯車の研究(第3報，一対の歯車のかみあいについて)，機論，51-463，C(1985)，624。

付 録

座標系 $O_f-X_fY_fZ_f$ から $O_P-X_PY_PZ_P$ への変換 座標系 $O_f-X_fY_fZ_f$ において、接触点 O_P の座標を (U, V, W) と、接触点での共通法線ベクトル $\mathbf{n}$ の成分を (n_x, n_y, n_z) と仮定すると、座標系 $O_f-X_fY_fZ_f$ から $O_P-X_PY_PZ_P$ への変換は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ 0 & -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -U \\ 0 & 1 & 0 & -V \\ 0 & 0 & 1 & -W \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_f \\ Y_f \\ Z_f \\ 1 \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots (A1)$$

ここに、 λ と ψ は次の式で計算する。

$$\tan\lambda = \frac{n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \quad \cdots \cdots (A2)$$

$$\tan\psi = \frac{n_x}{n_y} \quad \cdots \cdots (A3)$$