不規則振動における初通過問題の有限差分法による
数値解析*田村 晋司^{*1}, 木村 康治^{*2}Numerical Solution of First Passage Problems in Random Vibrations
Using Finite Difference MethodShinji TAMURA and Koji KIMURA^{*3}^{*3} Tokyo Institute of Technology, Graduate School of Information Science and Engineering,
2-12-1, O-okayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552 Japan

The finite difference method is applied to estimate the reliability of the single degree of freedom system subjected to white noise excitation. In this paper, the probability that the system response stays within a safe region is used as the system reliability. It is difficult to obtain the accurate reliability from the probability density of the system response. Then the boundary condition of the finite difference scheme which we presented in the previous paper for the probability density of the system response is modified to obtain reliability directly from the Fokker-Planck equation, which governs the probability density. The reliability of the Duffing oscillator is calculated in the illustrated examples. The validity of the present method is demonstrated by comparison with the results of the Monte Carlo simulation.

Key Words: Random Vibration, Nonlinear Vibration, Finite Difference Method, Fokker-Planck Equation, Reliability Analysis, First Passage Problem

1. 緒 言

自然界における外力, 例えば, 地震動や風負荷などは本質的に不規則性をもっている。また, 実際の機械・構造物はさまざまな理由により, 大きな外力に対して非線形特性を示す。そのため, 不規則励振を受ける非線形系の動的挙動を明らかにすることは, 工学上重要な課題である。このような系の応答をよりの確に評価するためには, 確率論的な立場からの解析が必要である。

応答があらかじめ設定した閾値を越えない限り安全であると仮定したとき, 着目時間までに応答がこの閾値を越えない確率である信頼度関数は, 機械・構造物系の安全性・信頼性の指標として有用である。この信頼度関数を求める問題や, 逆に着目時間までに応答が閾値を1回以上越えた確率である初通過確率を求める問題は初通過問題と呼ばれ, 不規則振動における重要な問題の一つである。上記の定義より, 同じ着目時間に対する信頼度関数と初通過確率の和は1となるの

で, どちらかより他方は容易に計算される。

応答の確率密度より, 単位時間当たりの閾値通過回数の期待値である平均通過率を求める式は, 最初にRiceにより導出された⁽¹⁾⁽²⁾。この平均通過率について, エネルギーに対し確率平均法を適用して得られた応答の確率密度より求めた研究⁽³⁾や, 複数のガウス確率密度の和で近似した応答の確率密度より求めた研究⁽⁴⁾などが報告されている。

閾値通過が独立に起こると仮定すると, 平均通過率から初通過確率を簡単に求めることができる⁽⁵⁾。しかし, この独立通過の仮定は, 通過がまれにしか起こらないという仮定に相当するので, 閾値が小さくなるにつれ, 独立通過を仮定した方法は不正確になる。

厳密な初通過確率は, Riceのin and exclusion級数⁽¹⁾⁽²⁾⁽⁶⁾により得られる。しかし, 線形系の応答のガウス確率密度に対しても, この級数の高次の項を求めることは非常に困難である⁽⁶⁾。そのため, 応答の信頼度関数の厳密解を求めることは事実上不可能である。

そこで, 線形系や非線形系に対して, 信頼度関数のさまざまな近似解析法が提案されてきた。系の応答の確率密度を支配する偏微分方程式であるFokker-Planck方程式に対して, 計算領域を安全な領域に等しくとり, 閾値を越えた確率が再び計算領域内に戻る

* 原稿受付 2000年3月2日。

^{*1} 正員, 東京工業大学大学院 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。^{*2} 正員, 東京工業大学大学院情報理工学研究科。
E-mail: kkimura@mei.titech.ac.jp

ことのない境界条件を設定して、計算領域内の全確率を求めることで、信頼度関数の数値解析を行った研究も行われている。これまでに、中心差分法を適用した研究⁽⁷⁾、有限要素法を適用した研究⁽⁸⁾、経路積分法を適用した研究⁽⁹⁾、Cell Mapping 法を適用した研究⁽¹⁰⁾などが報告されている。

また、Fokker-Planck 方程式の随伴方程式である後退 Kolmogorov 方程式を有限要素法を用いて数値解析した研究も行われている^{(11)~(13)}。後退 Kolmogorov 方程式と Fokker-Planck 方程式による初通過確率を求めて、両者が一致することを検証した論文も報告されている⁽⁸⁾。

しかし、著者らが以前の論文^{(14)~(16)}で述べてきたように、既存の有限差分法、有限要素法を Fokker-Planck 方程式に適用すると、確率密度の非負が常に満足されるとは限らない。そのため、負の確率密度によって信頼度関数に誤差が生じる可能性がある。また、経路積分法と Cell Mapping 法では負の確率密度の問題は発生しないが、非定常応答計算における時刻刻みを決める基準がないという問題がある⁽¹⁷⁾。後退 Kolmogorov 方程式を用いると、計算領域内のすべての初期値に対する初通過確率が一度に求められる。しかし、現実の問題ではさまざまな初期値に対する初通過確率を求める必要はほとんどなく、むしろ平衡状態にある系に不規則励振が加わったときの初通過問題が重要であると思われる。また、後退 Kolmogorov 方程式では、著者らが前報⁽¹⁴⁾で行ったような、方程式の性質に合わせたスキームの改良を行うことが難しい。

そこで、本研究では、ホワイトノイズ励振を受ける 1 自由度系を対象として、前報⁽¹⁴⁾で提案した全確率が 1 の条件と確率の非負の条件を常に満足する差分スキームの境界条件を変更することによって、着目時間 t までに系が破壊されていない確率である信頼度関数を直接求める手順を示す。本研究で提案する手法は、系の線形/非線形に関わらず、全く同一の解析を適用することが可能である。

計算例として Duffing 系を取上げ、本論文の手順により求めた信頼度関数を、前報⁽¹⁴⁾の手順により得られる非定常確率密度を用いて独立通過を仮定した解析により求めた結果、モンテカルロ・シミュレーション結果と比較することによって、境界条件を変更した差分スキームにより信頼度関数を直接求める本手法の有効性を示す。

2. 支配方程式

2.1 運動方程式と Fokker-Planck 方程式

下の運動方程式で表される、1 自由度振動系を考える。

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x}) = f(t) \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

ここで、 x は変位であり、 $g(x, \dot{x})$ は減衰や復元力を表す関数である。 $f(t)$ は、平均値 0、スペクトル密度 S_0 のホワイトノイズとする。系は、初期状態で静止しているものとする。以降の解析において、状態変数 $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$ を導入する。

式(1)の応答の推移確率密度関数 $p(y_1, y_2, t)$ は、次の Fokker-Planck 方程式と呼ばれる偏微分方程式によって支配される⁽¹⁸⁾。

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(y_1, y_2, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial y_1} \{y_2 p(y_1, y_2, t)\} \\ & + \frac{\partial}{\partial y_2} \{g(y_1, y_2) p(y_1, y_2, t)\} \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \{\pi S_0 p(y_1, y_2, t)\} \quad \cdots \cdots \cdots (2) \end{aligned}$$

ここで、Fokker-Planck 方程式(2)の初期条件、境界条件は、それぞれ以下である。

$$p(y_1, y_2, 0) = \delta(y_1) \cdot \delta(y_2) \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

$$\lim_{|y_1|, |y_2| \rightarrow \infty} p(y_1, y_2, t) = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

式(3)の $\delta(\cdot)$ はデルタ関数である。

2.2 Fokker-Planck 方程式の解の性質 Fokker-Planck 方程式(2)の解は確率密度であるので、有限差分法による数値解析結果が妥当となるためには、以下の性質を満たす必要がある。

(1) y_1, y_2 の全領域にわたる $p(y_1, y_2, t)$ の積分値が 1。

(2) すべての (y_1, y_2, t) において、 $p(y_1, y_2, t) \geq 0$ 。上記の 1 の性質は全確率が常に 1 のまま保存されることを、2 の性質は確率が非負であることを意味している。

3. 有限差分法による解析

本章では、著者らが Fokker-Planck 方程式に対して以前に開発した⁽¹⁴⁾、上記の全確率が 1 の性質と確率の非負の性質を同時に満足する差分スキームについて簡単に述べる。

3.1 有限差分法の適用 式(2)は、対流拡散方程式の 1 種であり、1 次の偏微分項である対流項と 2 次の偏微分項である拡散項の物理的な意味の異なる 2 種類の項をもつ。そこで、これらの項を分けて考え、対流項について風上差分、拡散項について中心差分を用いる⁽¹⁹⁾。

3.2 対流項に対する改良された風上差分 表現を簡潔にするため、Fokker-Planck 方程式(2)の対流項を 1 項だけ取出した、以下の 1 次元対流方程式に

について考える。

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial x} \{c(x)u\} \cdots \cdots (5)$$

x を Δx で等間隔に $x_1, x_2, \dots, x_N$ と分割し, τ を $\Delta \tau$ で離散化して風上差分を適用する。

しかしながら, 通常の風上差分を適用すると, 数値拡散のため非常に多くの格子点を必要とする, あるいは負の確率が発生してしまうなどの問題が発生する。

そこで, 著者らは前報⁽¹⁴⁾において, 2 次の風上差分公式をベースとして, 係数に場合分けを導入することにより, 数値拡散を起こすことなく, 全確率が 1 の性質と確率の非負の性質を同時に満たす差分スキームを提案した。この差分スキームにより, 式(5)は次式と差分近似される。

$$u_j^{i+1} - u_j^i = \frac{\Delta \tau}{2\Delta x} (\Delta_u u_j^i + \Delta_d u_j^i) \cdots \cdots (6)$$

ここで, u_j^i は, $x = x_j$, $\tau = \tau_i (= i\Delta \tau)$ における u である。また $c_j = c(x_j)$ とすると, 式(6)中の $\Delta_u u_j^i$, $\Delta_d u_j^i$ は以下の式で求められる。

(1) $c_j \geq 0$ の場合

(a) 上流方向 x_{j-2}, x_{j-1}

(i) $c_{j-1}, c_{j-2} \geq 0$

$$\begin{aligned} \Delta_u u_j^i &= -r_{j-2}^i c_{j-2} u_{j-2}^i \\ &\quad + (3 + \delta_j^N r_{j-1}^i) c_{j-1} u_{j-1}^i - 3\delta_j^N c_j u_j^i \cdots (7) \end{aligned}$$

(ii) $c_{j-1} \geq 0$ かつ $c_{j-2} < 0$

$$\begin{aligned} \Delta_u u_j^i &= (3 + \delta_j^N r_{j-1}^i) c_{j-1} u_{j-1}^i - 3\delta_j^N c_j u_j^i \\ &\cdots \cdots (8) \end{aligned}$$

(iii) $c_{j-1} < 0$

$$\Delta_u u_j^i = -3\delta_j^N c_j u_j^i \cdots \cdots (9)$$

(b) 下流方向 x_{j+1}, x_{j+2}

(i) $c_{j+1}, c_{j+2} < 0$

$$\Delta_d u_j^i = -3c_{j+1} u_{j+1}^i + r_{j+2}^{i*} c_{j+2} u_{j+2}^i \cdots \cdots (10)$$

(ii) $c_{j+1} < 0$ かつ $c_{j+2} \geq 0$

$$\Delta_d u_j^i = -3c_{j+1} u_{j+1}^i \cdots \cdots (11)$$

(iii) $c_{j+1} \geq 0$

$$\Delta_d u_j^i = 0 \cdots \cdots (12)$$

(2) $c_j < 0$ の場合

(a) 上流方向 x_{j+1}, x_{j+2}

(i) $c_{j+1}, c_{j+2} \leq 0$

$$\begin{aligned} \Delta_u u_j^i &= 3\delta_j^1 c_j u_j^i - (3 + \delta_j^1 r_{j+1}^{i*}) c_{j+1} u_{j+1}^i \\ &\quad + r_{j+2}^{i*} c_{j+2} u_{j+2}^i \cdots \cdots (13) \end{aligned}$$

(ii) $c_{j+1} \leq 0$ かつ $c_{j+2} > 0$

$$\begin{aligned} \Delta_u u_j^i &= 3\delta_j^1 c_j u_j^i - (3 + \delta_j^1 r_{j+1}^{i*}) c_{j+1} u_{j+1}^i \\ &\cdots \cdots (14) \end{aligned}$$

(iii) $c_{j+1} > 0$

$$\Delta_u u_j^i = 3\delta_j^1 c_j u_j^i \cdots \cdots (15)$$

(b) 下流方向 x_{j-2}, x_{j-1}

(i) $c_{j-1}, c_{j-2} > 0$

$$\Delta_d u_j^i = -r_{j-2}^i c_{j-2} u_{j-2}^i + 3c_{j-1} u_{j-1}^i \cdots \cdots (16)$$

(ii) $c_{j-1} > 0$ かつ $c_{j-2} \leq 0$

$$\Delta_d u_j^i = 3c_{j-1} u_{j-1}^i \cdots \cdots (17)$$

(iii) $c_{j-1} \leq 0$

$$\Delta_d u_j^i = 0 \cdots \cdots (18)$$

これらの式において, $u_{-1}^i = u_0^i = u_{N+1}^i = u_{N+2}^i = 0$ とする。また, r_j^i, r_j^{i*} は, それぞれ, 以下の式で定義される量である。

$$r_j^i = U(3c_{j+1} u_{j+1}^i - c_j u_j^i) \cdots \cdots (19)$$

$$r_j^{i*} = U(c_j u_j^i - 3c_{j-1} u_{j-1}^i) \cdots \cdots (20)$$

ここで, $U(\cdot)$ は単位ステップ関数である。また, δ_j^k は次式で定義される。

$$\delta_j^k = \begin{cases} 0, & j=k \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \cdots \cdots (21)$$

この δ_j^k は, 計算領域の境界部での確率の減少を抑制するために導入した係数である。

これらの式を, Fokker-Planck 方程式(2)の対流項(右辺第 1, 2 項)それぞれについて適用する。

3.3 拡散項に対する中心差分 Fokker-Planck 方程式(2)の拡散項(右辺第 4 項)に対する中心差分公式について, 確率の保存則を考慮すると以下となる⁽¹⁴⁾。

$$\begin{aligned} u_j^{i+1} - u_j^i &= \pi S_0 \frac{\Delta \tau}{(\Delta x)^2} \{u_{j-1}^i - (\delta_j^1 + \delta_j^N) u_j^i + u_{j+1}^i\} \\ &\cdots \cdots (22) \end{aligned}$$

3.4 差分近似された Fokker-Planck 方程式

式(6) [対流項] を各格子点の y_1, y_2 方向に適用し, さらに y_2 について式(22) [拡散項] を適用して, これらの式の右辺を足し合わせることで, 差分近似された Fokker-Planck 方程式が構築される。この差分近似された式により, 応答の非定常確率密度が計算される。

4. 初通過問題に対する境界条件の変更

4.1 差分スキームにおける境界条件と計算領域

著者らが以前に報告した論文^{(14)~(16)}では, 不規則励振を受ける系の応答の確率密度を解析することを目的としていた。そのため, Fokker-Planck 方程式(2)を有限差分法で解析する際の考えている計算領域を図 1 のます目で示した場合, 境界条件として図 1 中の矢印が表す, 計算領域外への確率の流出と, 計算領域内への確率の流入が起こらないという条件を用いた。この確率の流入および, 流出が起こらない条件より, 全確率が 1 の性質が満足される。

Fig. 1 Boundary condition of finite difference method for probability density

Fig. 2 Boundary condition of finite difference method for first passage problem

本論文で考える初通過問題では、安全領域に残存している確率を評価することが目的である。そのため、例えば図2のように、 y_1 に関して閾値 $\pm\xi$ を設定した場合には、 $y_1 = \pm\xi$ で計算領域を区切り、この閾値 ξ に関する境界でのみ確率が流出することを許容する境界条件に変更する。確率の流入に関しては、以前の論文と同様に許容しない境界条件とする。この境界条件のもとで Fokker-Planck 方程式を数値解析し、計算領域内に残存している全確率の総和を信頼度関数 $R_f(t)$ とする。

4.2 対流項における流出形の境界 $c(x) < 0$ では、対流方程式(5)は x 軸の負の方向に物理量 u が移動することを表す方程式となる。この $c(x) < 0$ という条件で $j=1, 2, 3, \dots$ に式(6)を適用すると以下の式が得られる。

$$u_3^{i+1} - u_3^i = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \{ 3\delta_3^1 c_3 u_3^i - (3 + \delta_3^1 r_4^{i*}) c_4 u_4^i + r_5^{i*} c_5 u_5^i \}$$

Fig. 3 Difference scheme diagram of flow-out boundary

Fig. 4 Difference scheme diagram of flow-out boundary for first passage problem

$$= \frac{\Delta t}{2\Delta x} \{ 3c_3 u_3^i - (3 + r_4^{i*}) c_4 u_4^i + r_5^{i*} c_5 u_5^i \} \dots \dots \dots (23)$$

$$u_2^{i+1} - u_2^i = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \{ 3\delta_2^1 c_2 u_2^i - (3 + \delta_2^1 r_3^{i*}) c_3 u_3^i + r_4^{i*} c_4 u_4^i \} \\ = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \{ 3c_2 u_2^i - (3 + r_3^{i*}) c_3 u_3^i + r_4^{i*} c_4 u_4^i \} \dots \dots \dots (24)$$

$$u_1^{i+1} - u_1^i = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \{ 3\delta_1^1 c_1 u_1^i - (3 + \delta_1^1 r_2^{i*}) c_2 u_2^i + r_3^{i*} c_3 u_3^i \} \\ = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \{ 3c_2 u_2^i + r_3^{i*} c_3 u_3^i \} \dots \dots \dots (25)$$

次の時間ステップにおける増分である、式(23)～(25)の右辺の $\{ \}$ の中の各項の係数を取り出して項別に並べると、図3となる。 $c(x) < 0$ の場合には、図3の上部の矢印の方向に物理量 u が移動する。図3で δ_j^i が0となる箇所を太字で示す。図3では各列で総和が0となるので、次式の確率の保存則⁽¹⁴⁾

$$\sum_{j=1}^N (u_j^{i+1} - u_j^i) = 0 \dots \dots \dots (26)$$

を満たし、図1に示す境界条件となる。そのため、式(23)～(25)では外部への確率の流出は発生しない⁽¹⁴⁾。

しかし、前述のように本論文で解析する初通過問題では、閾値に関する境界で確率の流出を許容しなければ

ばならない。そのため、この閾値に関する境界では確率の減少を抑制するための係数 δ_j^* を常に 1 として以下とする。

$$u_3^{i+1} - u_3^i = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \{3c_3 u_3^i - (3+r_4^*)c_4 u_4^i + r_3^* c_5 u_5^i\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$u_2^{i+1} - u_2^i = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \{3c_2 u_2^i - (3+r_3^*)c_3 u_3^i + r_4^* c_4 u_4^i\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$u_1^{i+1} - u_1^i = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \{3c_1 u_1^i - (3+r_2^*)c_2 u_2^i + r_3^* c_3 u_3^i\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

先ほどと同様の次の時間ステップにおける増分である、式(27)～(29)の右辺の{ }の中の係数を項別に並べると図4となり、 x_1, x_2 で各列の和が0とならない。そのため、流出形の境界では確率の保存則(26)が成立せず、境界部で確率が減少し、図2に示す境界条件となる。

この減少した確率は、閾値を通過した確率に相当する。計算領域内に残存している全確率は、系が破壊していない確率、すなわち系の信頼度関数 $R_f(t)$ である。

4.3 対流項における流入形の境界 $c(x) > 0$ では、対流方程式(5)は x 軸の正の方向に物理量 u が移動することを表す方程式となる。この $c(x) > 0$ という条件で $j=1, 2, 3, \dots$ に対して、式(6)に前節の δ_j^* を常に 1 とする条件を適用すると以下の式が得られる。

$$u_3^{i+1} - u_3^i = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \{-r_1^i c_1 u_1^i + (3+r_2^i) c_2 u_2^i - 3c_3 u_3^i\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$u_2^{i+1} - u_2^i = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \{(3+r_1^i) c_1 u_1^i - 3c_2 u_2^i\} \quad \dots\dots (31)$$

$$u_1^{i+1} - u_1^i = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \{-3c_1 u_1^i\} \quad \dots\dots\dots (32)$$

流出形の境界と同様に次の時間ステップにおける増分

Fig. 5 Difference scheme diagram of flow-in boundary

である、式(30)～(32)の右辺の{ }の中の各項の係数を取り出して項別に並べると、図5となる。図3、4と同様に、この場合には、図5の上部の矢印の方向に物理量 u が移動する。図5では各列で総和が0となり、確率の保存則(26)を満たすので、外部からの確率の流入は発生しない。

4.4 拡散項における境界 対流項における流出形の境界と同様に、拡散項に対する差分近似を表す式(22)においても、閾値に関する境界では δ_j^* を常に 1 として、

$$u_j^{i+1} - u_j^i = \pi S_0 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \{u_{j-1}^i - 2u_j^i + u_{j+1}^i\} \quad \dots (33)$$

とする。

以上のように、閾値に関する境界において δ_j^* を常に 1 とすることによって、図2に示す境界条件を実現することができる。

5. 計算手順

以上の境界条件を考慮した対流項に対する差分スキームを各格子点に対して、 y_1, y_2 の各方向に適用し、さらに y_2 について拡散項に対する差分スキームを適用して、これらの式の右辺を足し合わせるにより、差分近似された Fokker-Planck 方程式が構築される。

本手法は、応答の確率密度を支配する偏微分方程式である Fokker-Planck 方程式を直接数値解析する手法であるので、系の線形/非線形にかかわらず適用することが可能である。

ここで、前報⁽¹⁴⁾で述べたように本差分スキームは条件付き安定なスキームであり、正と負の解が隣接する不安定解を抑制するために以下の式で示される安定条件を満たさなければならない⁽¹⁴⁾。

$$\Delta t \left\{ \frac{3}{2\Delta y_1} \max |y_2| + \frac{3}{2\Delta y_2} \max |g(y_1, y_2)| \right\}$$

Fig. 6 Restoring force and threshold levels of Duffing oscillator

$$+\frac{2\pi S_0}{(\Delta y_2)^2}\} < 1 \dots\dots\dots (34)$$

y_1, y_2 の計算領域と分割数を決定した時, 式(34)で時間刻み Δt の上限が与えられることが本差分スキームの特徴である。

本差分スキームでの初期条件として, デルタ関数で表される Fokker-Planck 方程式の初期条件(3)を表すために, 時刻 0 で $y_1=y_2=0$ に一番近い格子点に確率が集中しているとして計算を行った。

6. 計算結果

6.1 計算条件の設定 計算例として, 以下の運動方程式で表される Duffing 系を取上げる。

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + kx + \varepsilon x^3 = f(t) \dots\dots\dots (35)$$

計算には, 以下のパラメータを用いた。

$$\zeta=0.05, k=-1, \varepsilon=0.5, S_0=\frac{2\zeta}{\pi}$$

ホワイトノイズのスペクトル密度 S_0 については, 対応する線形系 ($k=1, \varepsilon=0$) での変位の定常標準偏差が 1 となるように設定している。

変位 y_1 について閾値 ξ を設け, その値を,

- (1) $\xi = \pm 1.5$
- (2) $\xi = \pm 2.0$

として計算を行った。この時の復元力特性と閾値を図 6 に示す。

計算領域は $y_1 \in [-\xi, \xi]$, $y_2 \in [-5, 5]$ とし, y_1 方向 j 番目, y_2 方向 k 番目の格子点をそれぞれ, $(y_{1,j}, y_{2,k})$ とすると, それらの格子点が

$$y_1 \in \left[y_{1,j} - \frac{1}{2}\Delta y_1, y_{1,j} + \frac{1}{2}\Delta y_1 \right)$$

$$y_2 \in \left[y_{2,k} - \frac{1}{2}\Delta y_2, y_{2,k} + \frac{1}{2}\Delta y_2 \right)$$

を代表していることを考慮して,

$$-\xi + \frac{1}{2}\Delta y_1, -\xi + \frac{3}{2}\Delta y_1, \dots, \xi - \frac{3}{2}\Delta y_1, \xi - \frac{1}{2}\Delta y_1$$

$$-5 + \frac{1}{2}\Delta y_1, -5 + \frac{3}{2}\Delta y_1, \dots, 5 - \frac{3}{2}\Delta y_1, 5 - \frac{1}{2}\Delta y_1$$

のように, 格子点間隔 $\Delta y_1, \Delta y_2$ に関して均等に 80×80 の格子点に分割した。時間刻み Δt については, 非定常応答計算における時間刻みの条件を与える式(34)を満たす値の内, $\Delta t=0.002$ とした。

6.2 計算結果 時刻 t までに変位 y_1 が閾値 $\pm\xi$ を越えていない確率である信頼度関数 $R_f(t)$ の計算結果を, $\xi = \pm 1.5$, $\xi = \pm 2.0$ について, それぞれ, 図 7, 8 に示す。図中で, 実線は本論文に示した境界条件を適用して求めた結果, 破線は著者らの以前の論文⁽¹⁴⁾の手順により得られた応答の非定常確率密度より, 閾

Fig. 7 Reliability at $\xi = \pm 1.5$

Fig. 8 Reliability at $\xi = \pm 2.0$

値の独立通過を仮定して⁽⁵⁾求めた結果, $\circ$ はモンテカルロ・シミュレーション結果である。モンテカルロ・シミュレーションには 10 万本の標本関数を用いた。

これらの結果より, 独立通過の仮定による信頼度関数に比べ, 本論文の手法を用いて求めた信頼度関数は, モンテカルロ・シミュレーション結果によく一致していることがわかる。よって, 本論文に示した境界条件を適用して信頼度関数を求める手法の有効性は明らかである。

緒言で述べたとおり, 独立通過の仮定は通過が稀にしか起こらないという仮定に相当する。通過確率が小さい(信頼度が 1 に近い)領域では, この独立通過を仮定した結果は, モンテカルロ・シミュレーション結果に一致している。しかし, 通過確率が大きくなるにしたがって, この独立通過の仮定が成り立たなくなるので, 結果が不正確となっている。

7. 結 言

ホワイトノイズ励振を受ける 1 自由度非線形系に対し, 著者らが以前に提案した差分スキームの境界条件を変更することによって, 着目時間 t までに系が破壊されていない確率である信頼度関数を直接求める手順

を示した。

計算例として, Duffing 系を取上げ, 本論文の手順による信頼度関数と, 著者らの以前の論文⁽¹⁴⁾の非定常確率密度から独立通過を仮定して求めた結果, モンテカルロ・シミュレーション結果との比較を行った。本論文に示した境界条件を適用した差分スキームにより求められた信頼度関数は, モンテカルロ・シミュレーション結果とよく一致することを示し, 本手法の有効性を明らかにした。

文 献

- (1) Rice, S. O., *Bell System Tech. J.*, **23**(1944), 282-332. Reprinted in *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes* (Wax, N. 編), Dover, New York, 1954.
- (2) Rice, S. O., *Bell System Tech. J.*, **24**(1945), 46-156. Reprinted in *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes* (Wax, N. 編), Dover, New York, 1954.
- (3) Dunne, J. F., *J. Sound Vib.* **147**-3(1991), 417-422.
- (4) Er, G. K., *Nonlin. Dyn.*, **14**(1997), 279-291.
- (5) Lin, Y. K. (森大吉郎・富田文治・小林繁夫・佐藤寿芳・小林暁峯共訳), 構造動力学の確率論的方法, (1972), 281-323, 培風館.
- (6) Roberts, J. B., *J. Sound Vib.*, **8**-2(1968), 301-328.
- (7) Roberts, J. B., *J. Sound Vib.*, **109**-1(1986), 33-50.
- (8) Spencer, B. F., Jr. and Bergman, L. A., *Nonlin. Dyn.*, **4**(1993), 357-372.
- (9) Cai, G. Q. and Lin, Y. K., *J. Engrg. Mech., ASCE*, **124**-8(1998), 852-856.
- (10) Sun, J. Q. and Hsu, C. S., *J. Sound Vib.*, **124**-2(1988), 233-248.
- (11) Bergman, L. A. and Heinrich, J. C., *Int. J. Numerical Methods Eng.*, **18**(1982), 1271-1295.
- (12) Langtangen, H. P., *SIAM J. Scientific Computing*, **15**-4(1994), 977-996.
- (13) Langrangen, H. P., Marthinsen, T. and Mathiesen, J., *Prob. Engrg. Mech.*, **13**-2(1998), 97-106.
- (14) 木村康治・田村晋司, 機論, **65**-634, C(1999), 2188-2195.
- (15) 田村晋司・木村康治, 機論, **65**-634, C(1999), 2196-2202.
- (16) 田村晋司・木村康治, 機論, **66**-641, C(2000), 16-22.
- (17) Sun, J. Q. and Hsu, C. S., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **57**(1990), 1018-1025.
- (18) Caughey, T. K., *J. Acoust. Soc. America*, **35**-11(1963), 1683-1692.
- (19) 高橋亮一・棚町芳弘, 差分法, (1991), 培風館.