区分線形振動系の一般解の大域構造* (退化した場合の大域表現)

今 村 仁^{*1}, 鈴木 浩 平^{*2}

Global Structure of General Solution for Piecewise Linear Oscillators (Global Representation of Degenerate Case)

Hitoshi IMAMURA^{*3} and Kohei SUZUKI

^{*3} Mechanical Engineering, Ibaraki University, 4-12-1 Nakanarusawa Hitachi, Ibaraki, 316-8511 Japan

In the previous paper, a global formulation method was proposed for representing the general response solution of piecewise linear oscillator systems. In this paper, the method is expanded to further generalized systems such as those whose solutions are contracting with the boundary region or having trapping behaviour. First, after giving the definition of “degenerative” solution, it was made clear that only the acceleration can be discontinuous on the boundary region among the other differentials of those solutions. Secondly, by use of Filippov’s definition for the expanded solutions, following specific characteristics regarding the solutions were obtained. (1) While “bounded leap” is keeping positive on the discontinuous point of restoring function, singular local trapping solutions appear which can not be given through ordinal linear solutions. (2) By regarding contact of the solution with the boundary region as non-transverse crossing in wide sense, proposed global expressions are available even for the contact case. Finally, discussions are devoted to the development of this global formulation. And it leads to unified expression for both of trapping and non-trapping solutions whereby local trapping solutions within the crossing interval are replaced by local “constant” solutions.

Key Words: Nonlinear Vibration, Piecewise Linear Oscillator, General Solution, Global Representation, Degenerate Case, Lipshitz Condition, Temporal Trapping Solution, Tangent Solution

1. 緒 言

著者らは先に、復元力特性が任意の区分線形関数で表される強制振動系(以下、区分線形系と略称)の大域形式解を導出することにより、この系の一般解の大域的な構造を解明するための基礎理論を提示した⁽¹⁾。本論文ではこの大域表現を、退化した場合を含んだこの系に発生するすべての解を完全に規定する形式へ拡張する。まず、退化した解の定義を与え、領域境界上における退化した解の微分は加速度のみ不連続になり得ることを示す。次に Filippov により拡張された解の定義⁽²⁾を用いて、不連続な特性を有する区分線形系において、ある条件下で通常の部分解では表せない特異な解(部分停留解)が発生することを示す。さらに大域形式解を、解が領域境界との接触や、領域境界での停

留を伴う場合をも包含する形式へ一般化する。

2. 系の記述と問題提起

2・1 運動方程式と部分解 本論文では以下の無次元化された運動方程式

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + f_{0,n}(x) = \eta \cos \omega t \quad \cdots \cdots (1)$$

$$f_{0,n}(x) = \begin{cases} \beta_0 x + \lambda_0; & -\infty < x \leq \gamma_1 \\ \beta_1 x + \lambda_1; & \gamma_1 \leq x \leq \gamma_2 \\ : \\ \beta_n x + \lambda_n; & \gamma_n \leq x < \infty \end{cases}$$

で表される一自由度強制振動系を考察する。 $f_{0,n}(x)$ は分割数 n の区分線形関数で表される復元力である。変位 x の変域は領域境界 $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_n$ により $n+1$ 個の領域に分割され、その各領域を

$$\bar{L}_{n, n+1} \equiv \{x | \gamma_i \leq x \leq \gamma_{i+1}\} \quad (i=0, \cdots, n)$$

$$\cdots \cdots (2)$$

で定義し、 $\bar{L}_i$ と略記する(ただし、形式的に $\gamma_0 = -\infty$, $\gamma_{n+1} = +\infty$ とする)。また、 $\bar{L}_{n, n+1}$ の内点の集合 $\text{int}(\bar{L}_{n, n+1})$ を

* 原稿受付 2000年7月19日。

^{*1} 茨城大学工学部機械工学科(☎ 316-8511 日立市中成沢町4-12-1)。

^{*2} 東京都立大学工学部機械工学科(☎ 192-0397 八王子市南大沢1-1)。

E-mail: imamura@mech.ibaraki.ac.jp

$$L_{\gamma_i, \gamma_{i+1}} \equiv \{x | \gamma_i < x < \gamma_{i+1}\} \quad (i=0, \dots, n)$$

.....(3)

と定義する。 $\beta_i = df_{0,n}/dx(x \in L_i)$ であり、 λ_i は領域 $\bar{L}_i$ での復元力関数のバイアス項である。また $(\cdot)$ は無次元時間 t に関する微分を表す。式(1)は区分的に線形であるので、領域ごとの厳密解(部分解)が存在する。領域 $\bar{L}_j$ での部分解を $x_j^i(t)$ と表記すると、これは次式で与えられる。

$$x_j^i(t) = \mathcal{L}_j^i(t; x(\tau), \dot{x}(\tau)) - \lambda_j \mathcal{H}_j^i(t) \quad \text{.....(4)}$$

ここで、 $\mathcal{L}_j^i(t; x(\tau), \dot{x}(\tau))$ は、 $\lambda_j=0$ で、 $x(\tau), \dot{x}(\tau)$ を初期値とする領域 L_j に関する線形系の応答、 $\mathcal{H}_j^i(t)$ は、単位定値入力 $\lambda_j=1$ に対するインディシャル応答関数であるが、これらの具体的な関数形はパラメータ β, ζ, ω により異なる。 $\mathcal{L}$ に関して、上付き添字は領域の指標 j を、下付き添字は領域 L_j での部分解の初期時間 τ を表すものとし、誤解の恐れのないときは、これを $\mathcal{L}_j^i(t)$ と略記する。さらに初期時間 τ を明示する必要のないときは、 $x_j^i(t)$ を $x^i(t)$ と表記する。

2.2 Lipschitz 条件についての考察 式(1)の復元力関数 $f_{0,n}(x)$ は、分割点 $\gamma_i (1 \leq i \leq n)$ 上で不連続になり得るので、不連続点 γ_i における $f_{0,n}(x)$ の有界跳躍量は

$$\begin{aligned} \delta_i &= f_{0,n}(\gamma_i^+) - f_{0,n}(\gamma_i^-) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{0,n}(\gamma_i + \varepsilon) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{0,n}(\gamma_i - \varepsilon) \\ &= (\beta_i - \beta_{i-1})\gamma_i + \lambda_i - \lambda_{i-1} \quad \text{.....(5)} \end{aligned}$$

と与えられる。 $\delta_i \neq 0$ のとき、式(1)は Lipschitz 条件を満たさない。このことは、以下のようにして示せる。式(1)を次式のように一階正規形に変換する。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(t, x, y) = y \quad \text{.....(6a)} \\ \dot{y} &= f_2(t, x, y) = -f_{0,n}(x) - 2\zeta y + \eta \cos \omega t \quad \text{.....(6b)} \end{aligned}$$

式(6)が Lipschitz 条件を満たすと仮定すると、適当な定数 $L > 0$ が存在して、 $x = \gamma_i, y = 0$ 近傍で

$$|f_1(t, \gamma_i + \varepsilon, 0) - f_1(t, \gamma_i - \varepsilon, 0)| = 0 \leq L \cdot 2\varepsilon \quad \text{.....(7a)}$$

$$|f_2(t, \gamma_i + \varepsilon, 0) - f_2(t, \gamma_i - \varepsilon, 0)| = |-\delta_i - (\beta_i + \beta_{i-1})\varepsilon| \leq L \cdot 2\varepsilon \quad \text{.....(7b)}$$

が成立する。式(7b)で $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると、 $|\delta_i| = 0$ となるので、 $\delta_i \neq 0$ である限り Lipschitz 条件が成り立つとした仮定と矛盾する。

2.3 問題提起 微分方程式が Lipschitz 連続でないとき、解の一意性が失われたり、微分方程式を差分化した方程式の解が $\Delta t \rightarrow 0$ で元の微分方程式の解に収束しないなど、種々の pathological な現象が発生し得る⁽³⁾。しかしながら、数学的な困難によるためか、

そのような微分方程式に関する研究は比較的少ない。不連続区分線形ベクトル場で記述される最も基本的なシステムの一つとして、減衰力特性が不連続な区分線形関数で表されるクーロン摩擦振動系が古くから研究されている。

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + F(\dot{x}) + x = \eta \cos \omega t \quad \text{.....(8)}$$

$$F(\dot{x}) = \begin{cases} +\mu; & \dot{x} > 0 \\ +1; & \dot{x} = 0^+ \\ h; & \dot{x} = 0 \quad |h| < 1, 0 \leq \mu \leq 1 \\ -1; & \dot{x} = 0^- \\ -\mu; & \dot{x} < 0 \end{cases}$$

この系には、速度零で復元力と外力の和が静摩擦力より小さいとき、停滞を伴う解(sticking solution)が発生することが知られており⁽⁴⁾、この停滞振動が系のダイナミクスにおいて顕著な特徴を為している。一方、復元力関数 $f(x)$ が不連続な区分線形関数で表される典型的な系として予圧縮ばね系がある。

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x + \text{sgn}(x) = \eta \cos \omega t \quad \text{.....(9)}$$

ここで $\text{sgn}(\cdot)$ は

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \quad \text{.....(10)} \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

で定義される符号関数である。この系は、式(1)で $n=1, \gamma_1=0, \beta_0=\beta_1=1, \lambda_0=-1, \lambda_1=1$ とした最も簡単な区分線形系である。清水は、式(9)の系で $\zeta=0$ の場合に、 $x=0, \dot{x}=0$ で加速度が一般には零にならないことを示し、このことから「解はどんな停止する部分をもたない」と結論している⁽⁵⁾⁽⁶⁾ が、そのような状況下で実際にどのような解が発生するかについては言及されていない。一方、Shaw らの論文には、 $\eta < 1$ であるとき、永久に停止したままとどまる自明な平衡解 $x(t)=0$ が存在すると述べられている⁽⁷⁾。しかしながら、 $\eta < 1$ であっても、3.3節で論じるように $x=0, \dot{x}=0$ となるときの加速度は一般には零にならない。したがって上記の清水の主張⁽⁵⁾ が正しいとすれば、解はそこで停止しないはずである。このように、外力が零でないとき予圧縮ばね系(9)に一時的に停止する解が存在するか否かには、あいまいさが残されているように思われる。

3. 退化した解の挙動

3.1 切り換え時間と領域境界における記号の定義

解の領域境界 $\gamma_j (1 \leq j \leq n)$ との交差時間の系列を $t_i (i \in \mathbb{Z})$ で表す。隣接する交差時間 t_i, t_{i+1} で区切られた区間を

$$I_{t_i, t_{i+1}} \equiv \{t | t_i \leq t \leq t_{i+1}\} \quad \text{.....(11)}$$

と定義し, 交差区間(crossing interval)と呼ぶものとする. また, 交差時間を含む交差区間内の以下の関係を満たす時間 $\bar{t}_i, \underline{t}_i$ を導入する.

$$t_{i-1} < \underline{t}_i \leq \bar{t}_i \leq \bar{t}_i < t_{i+1} \quad \cdots \cdots (12)$$

また, 領域境界に関する以下の記号を定める.

$$\partial \bar{L}_i = \{\gamma_i, \gamma_{i+1}\} \quad (0 \leq i \leq n),$$

$$\partial \bar{L}_i^- = \gamma_i, \quad \partial \bar{L}_i^+ = \gamma_{i+1} \quad (0 \leq i \leq n) \quad \cdots \cdots (13)$$

解が $x(t_i) = \gamma_j (1 \leq j \leq n)$ となる時間 t_i を“領域境界通過時間”と定義する. 通常の領域境界通過時間は以下に示す2とおりの場合に分類できる. まず,

$$\operatorname{sgn}(x(t_i + \epsilon) - \gamma_j) = -\operatorname{sgn}(x(t_i - \epsilon) - \gamma_j)$$

$$\operatorname{sgn}(\dot{x}(t_i)) \neq 0 \quad (\epsilon \ll 1) \quad \cdots \cdots (14)$$

が成り立つとき, 解は t_i で領域境界と横断的に交差する [図1(a)]. このとき t_i を“狭義の”(領域境界)交差時間と定義する. また,

$$\operatorname{sgn}(x(t_i + \epsilon) - \gamma_j) = \operatorname{sgn}(x(t_i - \epsilon) - \gamma_j) \neq 0$$

$$\operatorname{sgn}(\dot{x}(t_i)) = 0 \quad (\epsilon \ll 1) \quad \cdots \cdots (15)$$

が成り立つとき, 解は t_i で領域境界と接触し, その前後で領域は不変 ($\rho(t_i + \epsilon) = \rho(t_i - \epsilon) (\epsilon \ll 1)$) である [図1(b)]. 同様に,

$$\operatorname{sgn}(x(t_i + \epsilon) - \gamma_j) = -\operatorname{sgn}(x(t_i - \epsilon) - \gamma_j) \neq 0$$

$$\operatorname{sgn}(\dot{x}(t_i)) = 0 \quad (\epsilon \ll 1) \quad \cdots \cdots (16)$$

が成り立つとき, 解は t_i で領域境界で接するが, その前後で領域は変化する [$\rho(t_i + \epsilon) \neq \rho(t_i - \epsilon) (\epsilon \ll 1)$],

図1(c)]. このように接触を伴う式(15), (16)の場合の t_i を“広義の”(領域境界)交差時間と定義する.

3.2 退化した解の定義とその領域境界における高階微分の連続性

$x(t_i) = \gamma_j$ で $\dot{x}(t_i) = 0$ となるときの, 解は領域境界 γ_j で接するが, $f_{0,n}(x)$ が γ_j で連続, すなわち $\delta_j = 0$ であれば, 解が $t > t_i$ で $x > \gamma_j, x < \gamma_j$ のどちらの領域へ移行するかは, 加速度 $\ddot{x}(t_i)$ の符号によって一意に決まる. しかしながら, $\delta_j \neq 0$ である場合には $\ddot{x}^{[j]}(t) \neq \ddot{x}^{[j]}(t)$ であるので, $\operatorname{sgn}(\ddot{x}^{[j]}(t)) \neq \operatorname{sgn}(\ddot{x}^{[j]}(t))$ のときには, $t > t_i$ で移行する領域を加速度の符号のみでは決定できない. そこで, 解が領域境界で接する場合の解の移行領域を調べるために, 以下ではそのような状況における解の高階微分について検討する.

解が領域境界で $\dot{x}(t_i) = \cdots = x^{(n-1)}(t_i) = 0 (n \geq 2)$ となるときの, “退化している”と呼ぶものとする. $n=2$ のとき, 解は領域境界と単純に接するので, 退化した解は接触の程度を指標化した概念である. 領域 $\bar{L}_{j-1}$, γ_j を負の側へ拡張した左側半空間 $\bar{L}_{-\infty, \gamma_j} = \{x | x \leq \gamma_j\}$ の右側境界 $\partial \bar{L}_{-\infty, \gamma_j}^+$ 上で $\dot{x}(t) = 0$ となるときの系の加速度を γ_j に関する左側境界接触加速度と呼び, これを次式で定義する.

$$\ddot{x}^{[j]}(t) = -\beta_{j-1}\gamma_j - \lambda_{j-1} + \eta \cos \omega t \quad \cdots \cdots (17)$$

また, $\bar{L}_{\gamma_j, \gamma_{j+1}}$ を正の側へ拡張した右側半空間 $\bar{L}_{\gamma_j, \infty} = \{x | \gamma_j \leq x\}$ の左側境界 $\partial \bar{L}_{\gamma_j, \infty}^-$ 上で $\dot{x}(t) = 0$ となるときの加速度を γ_j に関する右側境界接触加速度と呼び, 次式で定義する.

$$\ddot{x}_+^{[j]}(t) = -\beta_j\gamma_j - \lambda_j + \eta \cos \omega t \quad \cdots \cdots (18)$$

一般に $\partial \bar{L}_{-\infty, \gamma_j}^+$ および $\partial \bar{L}_{\gamma_j, \infty}^-$ 上で x の t に関する n 階微分 ($n \geq 3$) は, おおの次式で与えられる.

$$(x_-^{[j]}(t))^{(n)} = -2\zeta(x^{[j]}(t))^{(n-1)} - \beta_{j-1}(x^{[j]}(t))^{(n-2)}$$

$$+ (\omega)^{n-2} \eta \cos \left(\omega t + \frac{(n-2)\pi}{2} \right) \quad \cdots \cdots (19 \cdot a)$$

$$(x_+^{[j]}(t))^{(n)} = -2\zeta(x^{[j]}(t))^{(n-1)} - \beta_j(x^{[j]}(t))^{(n-2)}$$

$$+ (\omega)^{n-2} \eta \cos \left(\omega t + \frac{(n-2)\pi}{2} \right) \quad \cdots \cdots (19 \cdot b)$$

特に $(x^{[j]}(t))^{(n-2)} = 0, (x^{[j]}(t))^{(n-1)} = 0 (n \geq 3)$ となるときの, 領域境界における接触を伴う解の $n (\geq 3)$ 階微分は外力の $n-2$ 階微分に一致するので, $(x_-^{[j]}(t))^{(n)} = (x_+^{[j]}(t))^{(n)}$ が成り立つ. このことから, 領域境界 γ_j 上での $n \geq 3$ 階の微分は, それより低次の微分がすべて零となるときの, $x = \gamma_j$ 近傍で連続になり, 領域境界上における退化した解の微分は加速度のみ不連続になることがわかる. したがって, $x(t_i) = \gamma_j$ で $n-1 (n \geq 3)$ 階以下の解の微分が退化している場合, $t > t_i$ で解が $x > \gamma_j, x < \gamma_j$ のどちらの領域へ移行するかは

Fig. 1 Definition of crossing time

$(x^{[j]}(t))^{(n)}$ の符号を考慮することによって決定できる。

3・3 停留を伴う解の存在について 解が領域境界 γ_j を速度零で通過するとき $\delta_j \neq 0$ である場合、 $t > t_i$ で解が移行する領域はそこでの加速度の単純な符号判定のみでは決定できない。このような状況における退化した解の挙動に関する基礎的知見を得るために、予圧縮ばね系(9)の初期値 $x(t_i) = \dot{x}(t_i) = 0$ 、すなわち原点に静止している解の $t > t_i$ での振る舞いについて考察する。 $\eta > 1$ のパラメータ領域において、 $x > 0$ の領域を支配する運動方程式

$$\ddot{x}_+ + 2\zeta\dot{x}_+ + x_+ + 1 = \eta \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (20)$$

は $x_+(t) = 0, \dot{x}_+(t) = 0$ のとき、領域

$$D_n^- \equiv \left\{ t \left| \frac{1}{\omega} \cos^{-1} \frac{1}{\eta} + \frac{2n\pi}{\omega} < t < -\frac{1}{\omega} \cos^{-1} \frac{1}{\eta} + \frac{2(n+1)\pi}{\omega} \right. \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

で $\dot{x}_+(t) < 0$ となる。 $x \geq 0$ の領域での $x_+(t_i) = \dot{x}_+(t_i) = 0$ を初期値とする部分解の Taylor 展開は

$$x_+(t; t_i, 0, 0) = \frac{1}{2}(\eta \cos \omega t_i - 1)(t - t_i)^2 + O((t - t_i)^3) \quad \dots\dots\dots (22)$$

となるので、その符号は t_i の近傍で

$$\text{sgn}(x_+(t_i + \varepsilon)) = \text{sgn}(\eta \cos \omega t_i - 1) < 0 \quad (t \in D_n^-, \varepsilon \ll 1) \quad \dots\dots\dots (23)$$

となることから $x_+(t_i + \varepsilon) < 0$ ($\varepsilon \ll 1$) と評価できる。ここで、 $O(t^n)$ は t に関する n 次の高次項である。同様の考察により、 $x < 0$ の領域を支配する運動方程式

$$\ddot{x}_- + 2\zeta\dot{x}_- + x_- - 1 = \eta \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (24)$$

は初期条件 $x_-(t) = 0, \dot{x}_-(t) = 0$ のとき、領域

$$D_n^+ \equiv \left\{ t \left| -\frac{1}{\omega} \cos^{-1} \frac{-1}{\eta} + \frac{2n\pi}{\omega} < t < \frac{1}{\omega} \cos^{-1} \frac{-1}{\eta} + \frac{2(n+1)\pi}{\omega} \right. \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

で $\dot{x}_-(t) > 0$ となり、 $x \leq 0$ の領域での $x_-(t_i) = \dot{x}_-(t_i) = 0$ を初期値とする解の符号は t_i の近傍で $x_-(t_i + \varepsilon) > 0$ ($\varepsilon \ll 1$) と評価できる。以上の考察から、

$$D_n \equiv D_n^+ \cap D_n^- = D_n^a \cup D_n^b \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$D_n^a \equiv \left\{ t \left| \frac{1}{\omega} \cos^{-1} \frac{1}{\eta} + \frac{2n\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{1}{\omega} \cos^{-1} \frac{-1}{\eta} + \frac{2(n+1)\pi}{\omega} \right. \right\} \quad \dots\dots\dots (27\cdot a)$$

$$D_n^b \equiv \left\{ t \left| -\frac{1}{\omega} \cos^{-1} \frac{-1}{\eta} + \frac{2(n+1)\pi}{\omega} \leq t \leq -\frac{1}{\omega} \cos^{-1} \frac{1}{\eta} + \frac{2(n+2)\pi}{\omega} \right. \right\} \quad \dots\dots\dots (27\cdot b)$$

の領域では、解が $x > 0, x < 0$ のどちらの領域に移行しても矛盾が生じる。一方、符号関数 $\text{sgn}(\quad)$ の定義

より $x=0$ での運動方程式は

$$\ddot{x}_0 + 2\zeta\dot{x}_0 + x_0 = \eta \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (28)$$

となるので、 $x_0(t_i) = \dot{x}_0(t_i) = 0$ となる退化した場合の加速度は次式で与えられる。

$$\ddot{x}_0(t_i)|_{x(t_i)=\dot{x}(t_i)=0} = \eta \cos \omega t_i \quad \dots\dots\dots (29)$$

したがって、 $t_i \neq \pi/(2\omega) + 2n\pi/\omega, 3\pi/(2\omega) + 2n\pi/\omega$ であれば加速度は零とはならず、一般には $x=0$ にとどまることはできない。このことは、 $x(t_i) = \dot{x}(t_i) = 0$ ($t_i \in D_n$) であるとき、 $t \geq t_i$ 以降の解が定義できないことを意味する。しかしながら、物理的には、外力の大きさが予圧縮ばね力よりも小さければ、はじめに静止していた質点は動くことができず、外力が予圧縮ばね力よりも大きくなる外力の位相で一時的な停止状態を脱すると考えるのが自然である。式(20)以下の考察から、このような停止状態に関して、「 $x \geq 0$ の領域の解は $t \geq t_i$ で $x \leq 0$ へ動こうとし、 $x \leq 0$ の領域の解は $t \geq t_i$ で $x \geq 0$ へ動こうとするため、解はどちらの領域へも移行できず停止する」との解釈が可能である。そのような解(以下、“部分停留解”または“部分定数解”と呼ぶものとし、 $\bar{x}(t) = 0$ ($t \in D_n$) と表記する)は、自由振動で存在する自明な平衡解(永久停止解) $x(t) = 0$ ($t \in R$) が外力の作用によってその存在領域が狭められ、部分定数解へと変化したものであり、自明な平衡解を外力が存在する場合へ自然に拡張したものと考えられる。これは領域ごとの部分解の公式(4)では表せない特異な解である。しかしながら、部分停留解は式(29)に示したように領域境界 $x=0$ を支配する微分方程式を厳密には満たしていない。このことから、部分停留解を微分方程式(9)の解と認めるためには、“解”の定義を“拡張された意味で微分方程式を満たすこと”へと緩める必要がある。

Filippov は、一階正規形で表された微分方程式の右辺に不連続関数がある場合の微分方程式の解の定義を拡張した⁽²⁾⁽⁸⁾。 $x \in R^n$ として以下のベクトル形式の微分方程式を考える。

$$\dot{x} = f(x, t) \quad \dots\dots\dots (30)$$

ここで不連続関数 $f: R^n \times R \rightarrow R^n$ は開領域 Q のほとんど至る所で定義され、 $Q \subset R^{n+1}$ で可測であり、すべてのコンパクト集合 $W \subset Q$ に対してある可積分関数 $A(t)$ が存在し、 W のほとんどすべての (x, t) に対して $\|f(x, t)\| \leq A(t)$ が成り立つものとする。このとき、

$$\dot{x} \in K[f](x, t) \quad \dots\dots\dots (31\cdot a)$$

$$K[f](x, t) \equiv \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N=0} \overline{\text{co}} f(B(x, \delta) - N, t) \quad \dots\dots\dots (31\cdot b)$$

を満たす x は微分方程式(30)の(拡張された意味での)解である⁽²⁾⁽⁹⁾。ここで $\overline{\text{co}}(X)$ は集合 X の凸包(convex closure)であり、 $\bigcap_{\mu \in N=0}$ は、Lebesgue 測度零の集合 N のすべてにわたる積演算である。

式(9)を一階正規形へ書き換えると次式となる。

$$\dot{x} = f_1(x, y, t) = y \cdots \cdots (32 \cdot a)$$

$$\dot{y} = f_2(x, y, t) = -x - 2\zeta y - \text{sgn}(x) + \eta \cos \omega t \cdots \cdots (32 \cdot b)$$

部分停留解 $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t) \equiv \bar{x}'(t)$ ($t \in D_n$) は、次式に示すように式(31・a), (31・b)を満たしている(図2)。

$$\dot{\bar{x}}(t) \in K[f_1](0, 0, t) = 0 \quad (t \in D_n) \cdots \cdots (33 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{y}}(t) &\in K[f_2](0, 0, t) \\ &= \overline{\text{co}}\{-1 + \eta \cos \omega t, 1 + \eta \cos \omega t\} \\ &= [-1 + \eta \cos \omega t, 1 + \eta \cos \omega t] \quad (t \in D_n) \end{aligned} \cdots \cdots (33 \cdot b)$$

ここで式(33・b)の最右辺における $[\]$ は閉区間を表す記号である。このことから、部分定数解 $\bar{x}(t)$ は Filippov の意味で微分方程式(32)の解となっている。以上により、予圧縮ばね系(9)に部分停留解が存在することが示された。同様の論法を用いることにより、一般の区分線形系(1)の場合にも、部分停留解の存在が保証される。

3.4 解の一意性が成り立たない場合 $\delta_j > 0$ の場合、解が不連続点を速度零で通過するとき、部分停留解が発生するが、 $\delta_j < 0$ で解が不連続点を速度零で通過するときは、解の一意性が成り立たない場合が起こり得る。したがって、そのような点 γ_j を通過する解の未来は一意に決定できない。このような状況は、予圧縮ばね系(9)の符号関数の係数を反転した次の運動方程式で表される区分線形系でも発生する。

$$\ddot{x} + 2\zeta \dot{x} + x - \text{sgn}(x) = \eta \cos \omega t \cdots \cdots (34)$$

実際に、 $x = \dot{x} = 0$ で解の一意性が成り立たないことは、以下のようにして確認できる。簡単のため $\zeta = \eta = 0$ の場合を考える。 $x(0) = 2$, $\dot{x}(t) = 0$ を初期値とする解は、 $t = \pi$ で $x(\pi) = \dot{x}(\pi) = 0$ に到達する(図3細実線)。また、 $x(0) = -2$, $\dot{x}(t) = 0$ を初期値とする解

Fig. 2 Convex closure $K[f](x, t)$ of trapping solution

は、同じく $t = \pi$ で $x(\pi) = \dot{x}(\pi) = 0$ に到達する(図3破線)。定数解 $x(t) = 0$ も一つの解となっているので(図3太実線)、 $t \geq \pi$ で解の一意性は成り立たない。

4. 退化した場合の大域形式解

退化を考慮しないとき、式(1)の $\bar{t}_0 \leq t \leq \bar{t}_m$ における一般解 $x_{\bar{t}_0, \bar{t}_m}(t)$ は擬フィードバック形式によって次式のように大域的に表記できる⁽¹⁾。

$$x_{\bar{t}_0, \bar{t}_m}(t) = u(t - \bar{t}_0) \mathcal{L}_{\bar{t}_0}^{\theta}(t) - \mathcal{N}_{\bar{t}_0, \bar{t}_m}^{\theta}(t) \cdots \cdots (35 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\bar{t}_0, \bar{t}_m}^{\theta}(t) &= u(t - \bar{t}_0) \{ \mathcal{L}_{\bar{t}_0}^{\theta}(t) - x_{\bar{t}_0}^{\rho(\bar{t}_0)}(t) \} \\ &+ \sum_{i=1}^{m-1} u(t - t_i) \{ x_{t_i}^{\rho(t_{i-1})}(t) - x_{t_i}^{\rho(t_i)}(t) \} \end{aligned} \cdots \cdots (35 \cdot b)$$

ここで $u(x)$ は

$$u(t) = \begin{cases} 1; & t \geq 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases} \cdots \cdots (36)$$

で定義された単位ステップ関数であり、 θ は基準線形領域の指標である⁽¹⁾。また、 ρ は解の領域 $L_0, \dots, L_n$ での多様な通過パターンを一意に決定する領域指標関数であり、次式で定義される。

$$\begin{aligned} \rho(x(t); \gamma_1, \dots, \gamma_n) \\ = \sum_{i=0}^q \sum_{k=1}^n \left\{ \prod_{j=0}^{i-1} \varepsilon(x^{(j)}(t) - \gamma_k^{(j)}) \right\} \bar{u}(x^{(i)}(t) - \gamma_k^{(i)}) \end{aligned} \cdots \cdots (37)$$

ここで、 $\bar{u}(x)$ は、次式で定義される単位ステップ関数である。

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ 0; & x \leq 0 \end{cases} \cdots \cdots (38)$$

また、 $\varepsilon(x)$ は、次式で表される記号関数である。

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1; & x = 0 \\ 0; & x \neq 0 \end{cases} \cdots \cdots (39)$$

さらに、 q は移行領域の評価に関わる領域境界上での解の微分の階数の上限である。以下では、式(35), (37)を退化を伴う場合へ拡張する方法について検討する。

4.1 接触による退化の場合 解が時間 t_i で、あ

Fig. 3 Example of non unique solution

る領域の境界と速度零で停留を伴わずに接する場合、接触前後の加速度の符号により2と通りの場合が起こり得る。このうち、接触の前後で $\ddot{x}(t)$ の符号が変化する場合には、 $\text{sgn}(\ddot{x}^+) = \text{sgn}(\ddot{x}^-)$ であれば、解は境界 $\partial\bar{L}_{j-1}^+$ と横断的に交差するので、解の切り替えに伴う擬フィードバック応答が発生する。一方、接触の前後で $\ddot{x}(t)$ の符号が変化しない場合には、解は境界 $\partial\bar{L}_{j-1}^+$ と横断的に交差せず、解の切り替えに伴う擬フィードバック応答は発生しない。したがって、このような場合 t_i を交差時間の系列から除外することができる。しかしながら、時間 t_i での“接触”を“(横断を伴わない)広義の交差”とみなすならば、次式のように時間 t_i で発生する消滅応答 $-u(t-t_i)x_{t_i}^{\rho(t_i-1)}(t)$ と生成応答 $u(t-t_i)x_{t_i}^{\rho(t_i-1)}(t)$ の結果、解は元の領域 L_{j-1} に戻ってくるとの解釈も成り立つ(図4)。

$$\begin{aligned} & u(t-t_{i-1})x_{t_{i-1}}^{\rho(t_{i-1})}(t) \\ & - u(t-t_i)\{x_{t_i}^{\rho(t_i-1)}(t) - x_{t_i}^{\rho(t_i-1)}(t)\} \\ & = u(t-t_{i-1})x_{t_{i-1}}^{\rho(t_{i-1})}(t); t \in I_{t_i, t_{i+1}} \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

したがって、接触に関しどちらの立場を採った場合でも、大域形式解(35)は、このような解を統一的に扱うことができる。

また、領域境界 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ の配置、外力の振幅 η 、初期値 $x(\bar{t}_0), \dot{x}(\bar{t}_0)$ の組合せによっては、ある時間 t_k ($\bar{t}_0 \leq t_k$)以降、交差を生じない場合も起こり得る。このとき最後の交差区間は、 $I_{t_k, \infty}$ となる。この場合には、 $N_{\bar{t}_0, \bar{t}_n}^{\partial}(t)$ を $N_{\bar{t}_0, t_k}^{\partial}(t)$ で置き換えることにより、式(35)の形式は成立する。

Fig. 4 Inter region response difference for tangential case

4・2 停留と非一意性による退化の場合 $\delta_j \neq 0$ のとき、系の加速度は γ_j で不連続($\ddot{x}^{[j]}(t) \neq \ddot{x}^{[j]}(t)$)になるので、領域指標関数(37)は成り立たない。解が $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ で停留を伴う場合、すなわち解が一定区間(または無限区間)にわたり一定値 γ_j で停止するとき(停留が無限区間にわたるときには、 $t_i = -\infty, t_{i+1} = \infty$ とする)、その近傍における解の符号は

$$\begin{aligned} & \text{sgn}(x(t_i - \epsilon) - \gamma_j) \neq 0, \\ & \text{sgn}(x(t_{i+1} + \epsilon) - \gamma_j) \neq 0 \quad (\epsilon \ll 1) \dots\dots\dots (41 \cdot a) \\ & \text{sgn}(x(t_i + \epsilon_1) - \gamma_j) = \text{sgn}(x(t_{i+1} - \epsilon_2) - \gamma_j) \\ & = 0 \quad (0 \leq \epsilon_1, \epsilon_2 \leq t_{i+1} - t_i) \dots\dots\dots (41 \cdot b) \end{aligned}$$

となる(図5)。このとき、 $x(t) = \gamma_j$ を満たす t は孤立点とはならず、 $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ で連続的に存在する。この場合も形式的に t_i と t_{i+1} を広義の交差時間に含めて考え、 $I_{t_i, t_{i+1}}$ を広義の交差区間と定義する。解が時間 t_i で、ある領域 L_{j-1} の境界 $\partial\bar{L}_{j-1}^+$ と接するとき左側境界接触加速度が零である場合、すなわち $x(t_i) = \partial\bar{L}_{j-1}^+, \dot{x}(t_i) = 0, \ddot{x}^{[j]}(t_i) = 0$ となる場合を考える($x(t_i) = \partial\bar{L}_{j-1}^-, \dot{x}(t_i) = 0, \ddot{x}^{[j]}(t_i) = 0$ となる場合も同様に考えることができる)。このとき、 $t > t_i$ で $\text{sgn}(\ddot{x}^{[j]}(t)) < 0$ 、 $\text{sgn}(\ddot{x}^{[j]}(t)) > 0$ が成り立つ区間にわたって解は領域境界 γ_j に停留する。 $\ddot{x}^{[j]}(t)$ と $\ddot{x}^{[j]}(t)$ のどちらかが零となるときは、 $\ddot{x}(t)$ と零にならない方の境界接触加速度とが解を領域境界に拘束するように作用するか否かを判定することにより、停留開始か終了かが決まる。さらに $n \geq 3$ に対し $x^{(n)}(t) = 0$ となるときは、 $x^{(n+1)}(t)$ をその代用として零にならない方の境界接触加速度と比較することにより、このような判定を順次行うことができるが、3・2節で明らかにしたように、領域境界上における退化した解の3階以上の微分の符号は連続となるので、停留の終了後に解が移行する領域はこれらの符号によって確定する。したがって、停留の終了時間 t_{i+1} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & t_{i+1} = \min \{ \inf \{ t | \text{sgn}(\ddot{x}^{[j]}(t)) = 0; t > t_i \}, \\ & \inf \{ \tau | \text{sgn}(\ddot{x}^{[j]}(\tau)) = 0; \tau > t_i \} \} \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

解の一意性が成り立たない場合も、その発生条件を $\text{sgn}(\ddot{x}^{[j]}(t)) > 0, \text{sgn}(\ddot{x}^{[j]}(t)) < 0$ とすることで同様

Fig. 5 Trapping solution and extended crossing time

の議論が成り立つ。そこで、以上を勘案し、領域 L_j と領域 L_{j+1} との境界の指標を便宜的に $j+1/2$ と規約すれば、 $\delta_j \neq 0$ の場合にも成り立つように拡張された領域指標関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \rho(x(t); \gamma_1, \dots, \gamma_n) &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^1 \left\{ \prod_{j=0}^{i-1} \varepsilon(x^{(j)}(t) - \gamma_k^{(j)}) \right\} \bar{u}(x^{(i)}(t) - \gamma_k^{(i)}) \\ &+ \sum_{k \in D} \sum_{i=2}^q \left\{ \prod_{j=0}^{i-1} \varepsilon(x^{(j)}(t) - \gamma_k^{(j)}) \right\} \bar{u}(x^{(i)}(t) - \gamma_k^{(i)}) \\ &+ \sum_{k \in D} \left[\prod_{j=0}^1 \varepsilon(x^{(j)}(t) - \gamma_k^{(j)}) \right] \left\{ \bar{\alpha}(\ddot{x}_+^{[k]}(t), \ddot{x}_-^{[k]}(t)) \right. \\ &+ \sum_{i=3}^q \left(\prod_{j=2}^{i-1} \varepsilon((x_+^{[k]}(t))^{(j)}) \bar{\alpha}((x_+^{[k]}(t))^{(i)}, \ddot{x}_-^{[k]}(t)) \right. \\ &+ \left. \left. \prod_{j=2}^{i-1} \varepsilon((x_-^{[k]}(t))^{(j)}) \bar{\alpha}(\ddot{x}_+^{[k]}(t), (x_-^{[k]}(t))^{(i)}) \right) \right\} \Bigg] \\ &\dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

ここで D は $f_{0,n}(x)$ が不連続となる領域境界の指標の集合であり、 $D = \emptyset$ (空集合) のとき式 (43) は式 (37) に帰着する。式 (43) の第 3 項は停留や非一意性をも考慮して拡張された部分であり、その i に関する和の () 内で $i \geq 3$ に関して、 $(x_+^{[k]}(t))^{(i)} = (x_-^{[k]}(t))^{(i)} = x^{(i)}(t)$ であることを用いている。また、 α は次式で定義される符号関数である。

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ \frac{1}{2}; & xy < 0 \\ 0; & y < 0 \end{cases} \dots\dots\dots (44)$$

$\alpha(\ddot{x}_+^{[j]}(t), \ddot{x}_-^{[j]}(t))$ は、 $\ddot{x}_+^{[j]}(t) > 0, \ddot{x}_-^{[j]}(t) < 0$ のとき多価関数となり、これは解の一意性が成り立たない場合に解が移行する領域の形式的な表現となっている。さらに、 $\bar{\varepsilon}, \bar{\alpha}$ はおののおの以下のように定義された関数である。

$$\bar{\varepsilon}(x) = 1 - \varepsilon(x) = \begin{cases} 1; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (45)$$

$$\bar{\alpha}(x, y) = \bar{\varepsilon}(x) \bar{\varepsilon}(y) \alpha(x, y) = \begin{cases} \alpha(x, y); & xy \neq 0 \\ 0; & xy = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (46)$$

停留区間 $I_{t_i, t_{i+1}}$ での部分解は、次式で表される定数解となる。

$$x_{t_i}^{\rho(t_i)}(t) = \gamma_j; (t \in I_{t_i, t_{i+1}}) \dots\dots\dots (47)$$

$I_{t_i, t_{i+1}}$ での領域間応答差は次式で与えられる (図 6)。

$$\begin{aligned} &u(t - t_{i-1})x_{t_{i-1}}^{\rho(t_{i-1})}(t) \\ &- u(t - t_i)\{x_{t_i}^{\rho(t_i-1)}(t) - \gamma_j\} \\ &= u(t - t_i)\gamma_j; t \in I_{t_i, t_{i+1}} \dots\dots\dots (48) \end{aligned}$$

したがって、解が停留を伴う広義の交差区間での部分解を式 (47) で定義された部分定数解で置き換えれば、大域形式解 (35) は停留を伴う場合にも成り立つことに

Fig. 6 Inter region response difference for trapping case

なる。以上により、大域形式解が停留を伴う場合をも包含する形式へ一般化された。

5. 結 言

先に提案した任意の区分線形系に関する一般解の大域表現を拡張し、以下の結論が得られた。

(1) $f_{0,n}(x)$ が γ_j で不連続であり、有界跳躍量 δ_j が正であると停留を伴う解が発生し得る。

(2) 停留解は加速度の不連続性のみによって発生し、それより高階の微分の符号には依存しない。

(3) 解の領域境界との接触を、横断を伴わない広義の交差とみなすことにより、大域形式解は領域境界と接する場合にも成り立つ。

(4) 大域形式解は、解が領域境界で停留を伴う交差区間での部分解を部分定数解で置き換えることにより、停留を伴う場合をも統一的に扱うことができる。

本論文をまとめるに当たりご教示いただいた、茨城大学工学部の西尾克義助教授に感謝申し上げます。

文 献

- (1) 今村仁・鈴木浩平, 区分線形振動系の一般解の大域構造 (一般解の大域化), 機論, **66**-649, C(2000), 2940-2947.
- (2) Filippov, A. F., Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side, *Amer. Math. Soc. Trans.*, **42**-2 (1964), 199-231.
- (3) 山口昌哉, カオス入門, (1996), 22-36, 朝倉書店.
- (4) Shaw, S. W., On The Dynamic Response of A System with Dry Friction, *J. Sound Vib.*, **108**-2(1986), 305-325.
- (5) Simizu, T., Non-Linear Differential Equations with Discontinuous Terms, II, *Mathematica Japonicae*, **10** (1965), 49-62.
- (6) 清水辰次郎, 非線形振動論, (1965), 114-122, 培風館.

- (7) Shaw, S. W., Tung, P. C., *Trans. ASME, J. Dyn. Syst., Meas., Cont.*, 110(1988), 278-283.
 - (9) Brad, E. P., Shanker, S. S., A Calculus for Computing Filippov's Differential Inclusion with Application to the Variable Structure Control of Robot Manipulators, *IEEE Trans., CAS-34*(1987), 73-82.
 - (8) 野波健蔵・田宏奇, スライディングモード制御, 非線形ロバスト制御の設計理論, (1994), 8-11, コロナ社.
-