ピストン形空気圧バイブレータの非線形特性解析*

藤 田 壽 憲^{*1}, 萬 田 泰 辰^{*2}
原 靖 彦^{*3}, 香 川 利 春^{*1}

Nonlinear Analysis on Characteristic of Piston Type Pneumatic Vibrator

Toshinori FUJITA, Yasutoki MANDA,
Yasuhiko HARA and Toshiharu KAGAWA^{*4}^{*4} Tokyo Institute of Technology, Precision and Intelligence Laboratory,
4259 Nagatsuta-cho, Midori-ku, Yokohama, Kanagawa, 226-8503 Japan

Piston-type pneumatic vibrator is a device for generating mechanical oscillations by only pneumatic energy. This vibrator is used in parts feeder etc., because it has advantages of simple structure and high power. When applying a vibrator to the system, required frequency and amplitude must be realized. However the behavior of the vibrator is not formulated, so it is difficult to decide the dimensions of vibrator for given conditions. The purpose of this study is to clarify the characteristics of the piston-type vibrator by modeling the nonlinear dynamics and by analyzing its linearized model utilizing Fourier Series development. Consequently it is found that this phenomenon is a self-excited oscillation caused by the relay element. Equations relating frequency and amplitude to load mass, cylinder diameter and so on, are obtained. The calculated results from the model or its derived equations are in good agreement with experiments and are effective for the design of vibrator.

Key Words: Dynamics of Machinery, Oil and Air Hydraulics, Self-Excited Vibration, Vibrator, Nonlinear Analysis, Modeling, Relay, Fourier Series

1. は じ め に

疲労試験機など空気圧は加振機のエネルギー源としても多く用いられている⁽¹⁾。加振方法にもサーボ機構を応用したもの⁽²⁾をはじめ、いくつかの方式が実用化されているが、その中でピストン形空気圧バイブレータは、細かな動きや精度が要求される加振装置としては不向きなものの、外付け機器を必要としない非常に簡単な機構と高出力であることを特徴として、パーツフィーダ、振動コンベア等に利用されている。加振装置としては所望の周波数振幅を実現することが求められるが、著者らが調べた限り、この種の加振機に関する定式化は行われておらず、その要求仕様を満たす確固たるその方策が示されていない。

わずかに行われている空気圧加振機に関する研究も使用するサーボ機構の制御手法に関するもの⁽³⁾がほとんどで、本バイブレータに類似した機構まで含めても当該する研究は見当たらない。対象とする空気圧バ

イブレータはリレー要素を含む三次系であり、その振動解析はプロセス制御や電気系サーボ機構など、これまで一、二次系を中心として研究が行われてきた非線形解析の面からも、工学上、意義深い⁽⁴⁾。

そこで本研究では、ピストン形バイブレータの振動現象をモデル化し、フーリエ級数を用いて非線形解析を行うことにより、負荷質量、供給圧力等と振動周波数や振幅とを関係付け、本バイブレータの特性と振動現象の様相を解明することを目的とする。

まず、はじめに2章ではピストン形空気圧バイブレータの動作原理とそのモデルについて述べる。

お も な 記 号

A : 受圧面積 m^2
 C_v : 定容比熱 $\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$
 G : 質量流量 kg/s
 h : 熱伝達率 $\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$
 g : 重力加速度 m/s^2
 K_G : 流量ゲイン $(\text{kg/s})/(\text{m}^2\cdot\text{Pa})$
 M : ピストン質量 kg
 P : 圧力 Pa
 R : 気体定数 $\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$
 S_e : 有効断面積 mm^2

* 原稿受付 2000 年 1 月 31 日。

^{*1} 正員, 東京工業大学精密工学研究所 (〒226-8503 横浜市緑区長津田町 4259)。^{*2} 東京工業大学大学院。^{*3} (株)山武 (〒253-0113 神奈川県高座郡寒川町大曲 4-1-1)。

E-mail: kagawa@pi.titech.ac.jp

S_h : 伝熱面積 m^2

V : 体積 m^3

W : 空気質量 kg

x : ピストン変位 m

κ : 比熱比

θ : 温度 K

添 字

o : 平衡点

a : 大気側

c : シリンダ室

s : 供給側

Δ : 平衡点からのずれ量

2. ピストン形空気圧バイブレータ

2・1 動作原理 動作原理を説明するため、ピストン形空気圧バイブレータの構造を図1(a)に示す。バイブレータは可動部ピストン、および本体シリンダの二つの部品のみからなる単純な構成となっている。可動部ピストンには給気用、排気用にそれぞれ二つの孔が開けられている。充てん時には左図のように上側の排気孔が閉じられ、下側の給気孔が供給圧に接続されることで、ピストン下部に形成されるシリンダ室に空気が流入し圧力を増加させる。このときシリンダ室に対抗する側も供給圧となるが受圧面積差があるので、供給圧に近づくピストンが押し上げられることになる。ピストンがあるところまで上昇すると右図の

(a) Structure and Principle

(b) Forces Worked in Piston

Fig.1 Piston Type Pneumatic Vibrator

ように、逆に給気孔が閉まり、排気孔が大気圧に開放されることによりシリンダ室内の空気が放出される。するとシリンダ室内の圧力が低下しピストンは下降する。これら充てん・放出の行程を繰り返すことで、外部に何ら機器を取付けなくとも振動が持続される。

2・2 数学モデル ピストン形空気圧バイブレータについて成り立つ数学モデルを以下に記述する。図1(b)に示した各圧力がかかる受圧部分を参考にピストンに作用する力を考えると、ピストンが鉛直方向に駆動するとしたときの運動方程式は次式となる。

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = P_c A_c - P_s A_s - P_a A_a - Mg \cdots \cdots (1)$$

ただし、ピストンとシリンダ間には含油式の滑り軸受けが採用され、測定の結果、生じる両者間の摩擦は、圧力による駆動力に比較して無視できるうため摩擦項を含めないこととした。また軸受部では、シール構造をもたないため漏れを生じるが、給排気孔からの流出入流量から見れば小さく、これを無視するとシリンダ室内の空気に対して状態方程式が成り立つので、これを微分した形で表すと次式が得られる。

$$V_c \frac{dP_c}{dt} + A_c P_c \frac{dx}{dt} = GR \theta_c + W_c R_c \frac{d\theta_c}{dt} \cdots (2)$$

このとき、この空気に対して放出時($G < 0$)には、

$$C_v W_c \frac{d\theta_c}{dt} = GR \theta_c - A_c P_c \frac{dx}{dt} + h S_h (\theta_a - \theta_c) \cdots \cdots (3)$$

の充てん時($G \geq 0$)には、

$$C_v W_c \frac{d\theta_c}{dt} = C_v G (\theta_a - \theta_c) + GR \theta_a - A_c P_c \frac{dx}{dt} + h S_h (\theta_a - \theta_c) \cdots \cdots (4)$$

のエネルギー方程式がそれぞれ成り立つ。ここで熱伝達率は一定とした。また給気、排気孔を通過する質量流量は、絞り要素とみなせるので次式のように表される。すなわち放出時には、

$$G = -S_e P_c \varphi(P_c, P_a, \theta_c) \cdots \cdots (5)$$

となり、充てん時には、

$$G = S_e P_s \varphi(P_s, P_c, \theta_a) \cdots \cdots (6)$$

となる。ただし、シリンダ室圧力が供給圧を越えることがあるので、このときには、

$$G = -S_e P_c \varphi(P_c, P_s, \theta_c) \cdots \cdots (7)$$

とする。なお、流量に関する式における関数 φ は以下のとおりである。 $P_d/P_u \geq 0.528$ のとき

$$\varphi(P_u, P_d, \theta_u) = \sqrt{\frac{2 \kappa}{R \theta_u (\kappa - 1)}} \left\{ \left(\frac{P_d}{P_u} \right)^{2/\kappa} - \left(\frac{P_d}{P_u} \right)^{(\kappa+1)/\kappa} \right\} \cdots \cdots (8)$$

$P_d/P_u < 0.528$ のとき

$$\varphi(P_u, P_d, \theta_u) = \sqrt{\frac{\kappa}{R\theta_u} \left(\frac{2}{\kappa}\right)^{(\kappa+1)/(\kappa-1)}} \quad \dots\dots\dots (9)$$

シミュレーションにおいては、これら基礎式を2次のルンゲクッタ法で解いた。数値計算により周波数、振幅など運動の様相は明らかとなるが、このままでは供給圧、シリンダ径等がそれらに与える影響は不明確である。そこで非線形解析手法を適用することにより、これら各パラメータと振動特性との関係を3章で検討する。

3. 非線形解析

3.1 基礎式の線形化 適当な平衡点を与え線形化を施すことで扱いを容易にする。まず加速度が零となる圧力

$$P_0 = \frac{P_s A_s + P_a A_a - Mg}{A_c} \quad \dots\dots\dots (10)$$

を平衡点に取る。この点を中心とした微小変数であることを Δ で示す。また例えば変位の時間微分を $\Delta \dot{x}$ のように表すこととすれば運動方程式は次式のように書き換えられる。

$$M \Delta \ddot{x} = \Delta P_c A_c \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし変位は給排気が切り換る点を原点とし、このとき形成されるシリンダ室容積 V_0 を用いて状態方程式を書き直すと次式となる。

$$\Delta \dot{P}_c = \frac{\kappa R \theta_a}{V_0} \Delta G - \frac{P_0}{V_0} A_c \Delta \dot{x} \quad \dots\dots\dots (12)$$

シリンダ室内の状態変化は断熱変化を仮定した。式(5)、(6)を用いて、供給圧力が300 kPaのときの質量流量とシリンダ圧力との関係を描くと図2のように質量流量は圧力に対し非線形性を有するが、これを図の一点鎖線のように直線近似すると質量流量は次式のように書ける。

$$\Delta G = K_c S_e (\Delta P_e - \Delta P_c) \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし、 ΔP_e は次式で与える。

Fig. 2 Linear Approximation of Mass Flow Rate

$$\Delta P_e = \begin{cases} P_s - P_0 & (\Delta x < 0) \\ P_a - P_0 & (\Delta x \geq 0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (14)$$

以上、線形化した基礎式をラプラス変換してブロック線図を描くと図3ようになる。このシステムは給排気が切換わることを表すリレー要素、および圧力変化とピストンの運動を表す線形部により構成される。つまりピストン形バイブレータは制御工学的な立場から観れば、リレー要素による自励振動を利用したものであることがわかった。ここで図3の線形部の伝達関数は次式となる。

$$Z(s) = \frac{K_{pq}}{s(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)} \quad \dots\dots\dots (15)$$

各係数は次のようにおいた。

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa P_0 A_c^2}{M V_0}} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\zeta = \frac{K_c S_e R \theta_a}{2\omega_0 V_0} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$K_{pq} = \frac{2\zeta\omega_0 A_c}{M} \quad \dots\dots\dots (18)$$

リレーは孔の接続状態により供給圧と大気圧かを取る二値要素であり、その出力は流量であるためピストンの駆動力となる圧力までには積分器が存在し、結果として線形部の伝達関数は積分器を含む三次系となる。したがって、線形部は無定位性であり、ピストンがリレーの切り換わり位置にくる間に平衡状態はないので、絶えず自励振動を生じるシステムであることは容易に想像できる。

3.2 解析方法⁽⁴⁾ 図3において入力の変位となるが、自励振動系であり外部からの入力を与えられないので、解析に際して、入力は零と考えてよい。今、バイブレータの振動応答の概要を考えると図4のように描ける。リレー要素の出力は受圧面積の関係から P_0 は供給圧と大気圧の差の中心とならず、その出力応答は図示すると図4(a)のようにオフセットをもった形となる。このことが基因して、変位も図4(b)のように若干、非対称形となり切り換わり点が半周期よりずれる。これらを考慮してリレー応答をフーリエ級数展開すると次式が得られる。

$$\Delta P_e(t) = (2\gamma - 1)K_p - P_{e0}$$

Fig. 3 Block Diagram of Vibrator

Fig. 4 Outline of Vibrator Response

$$+ \frac{4K_p}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin r\gamma\pi \cos(\omega t - r\gamma\pi)}{r} \dots\dots\dots (19)$$

ただし、 ω は図のように自励振動の基本周波数成分であり、 γ は一周期ないのリレー切り換え時間を表し、周期との比を取っているため 0~1 の値を取る。また K_p はリレー入力の大さを表し、

$$K_p = \frac{P_s - P_a}{2} \dots\dots\dots (20)$$

である。また P_{e0} はオフセット量であり、

$$P_{e0} = K_p - P_0 \dots\dots\dots (21)$$

である。一方、変位応答は、そのオフセット量を x_0 としフーリエ級数を用いて表せば次式のようなになるはずである。

$$\Delta x(t) = x_0 + \frac{4K_p}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \sin r\gamma\pi \frac{|Z(jr\omega)|}{r} \cos[\omega t - r\gamma\pi - \angle Z(jr\omega)] \dots\dots\dots (22)$$

ここで、式(15)のように線形部には積分要素が含まれるので、これが同じ状態を保って振動し続けるためにはリレー出力の定常成分が零となる必要がある。この条件から、

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{P_{e0}}{K_p} + 1 \right) \dots\dots\dots (23)$$

が求められる。ここで、自励振動が発生しているときの切替時点の条件は次のように書ける。

$$\Delta x\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = \Delta x\left(\gamma \frac{2\pi}{\omega}\right) = 0 \dots\dots\dots (24)$$

これから振動数を決定する次式を得る。

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r\omega} \frac{\omega_0^2 - r\omega^2}{(2\zeta\omega_0 r\omega)^2 + (\omega_0^2 - r\omega^2)^2} \sin 2r\gamma\pi = 0 \dots\dots\dots (25)$$

特別な場合として以下の二つを考える。

(1) $\zeta \rightarrow 0$ のとき

条件式を解くと解の一つとして、

$$\omega = \omega_0 \dots\dots\dots (26)$$

が得られ、自励振動周波数の基本周波数はシリンダの固有周波数と一致することが明らかになった。また、

(2) $\zeta \rightarrow \infty$ のとき

$$\omega = \sqrt{\frac{\sum \sin^2(r\gamma\pi)/r^4}{\sum \sin^2(r\gamma\pi)/r^2}} \omega_0 \dots\dots\dots (27)$$

が得られ、リレーにオフセットがなく、ちょうど、1 周期の半分でリレーが切替わる場合、すなわち $\gamma \approx 0.5$ のときの平方根の値を求めると、

$$\omega = 0.9087 \dots \omega_0 \dots\dots\dots (28)$$

となる。減衰が非常に大きい時は周波数が 9% ほど下がることがわかった。この周波数の値と先の切換え条件から、振動のオフセット量 x_0 が求まり自励振動の様相を知ることができる。オフセット量については今回の実験の範囲では小さく特に問題とはならなかった。振動振幅 $|\hat{x}|$ については基本周波数成分が支配的だと考え、式(26)、(27)を用いて解くと、

$$|\hat{x}| = \frac{8K_p A_c}{\pi \omega^2 M} \dots\dots\dots (29)$$

となる。その過程は示さないが、式(26)と(29)の結果は、 $\gamma \approx 0.5$ として記述関数法で解いた場合と等しくなる。また式(24)は自励振動が発生する必要十分条件とはならないが、記述関数法を用いて、その根軌跡を解析すると、安定に持続するリミットサイクルであり、必ず自励振動を生ずる系となることを証明できることがわかった⁽⁵⁾。4 章では、本解析結果の有効性を示すために実験結果との比較を行う。

4. 実験および解析結果

4.1 実験装置および方法

図 5 に実験装置の概要を示す。供給圧力を一定とするために減圧弁の後に容積 30 dm³ の容器を介して、バイブレータの供給ポートへ接続した。ピストンの質量は 0.15 kg であり、上部には適当な質量を取付けることにより負荷を調整した。ピストン径は 22 mm、ロッド径は 15 mm であり、切換え時のシリンダ容積 V_0 は 5.5 cm³ であった。供給ポート入口圧、およびシリンダ室内の圧力を半導体式圧力センサによって測定し、ピストン変位はレーザ変位計を用いて測定した。速度は変位のデータから数値微分により求めた。それぞれのデータは A/D 変換器を介して、パーソナルコンピュータにサンプリング時間 0.5 ms で取込んだ。シミュレーションに用いた給排気孔の有効断面積はブルドン管圧力計とフロー式流量計を用いてあらかじめ測定した。

Fig. 5 Experimental Apparatus

4.2 振動応答に関する比較 図6(a)に一例として供給圧力 300 kPa, ピストン質量 0.19 kg とした場合の結果を, 実験は実線で, 2.2 節の非線形性を含む基礎式に基づいたシミュレーション結果は破線で示す。各応答は上から切換え圧力, ピストン室圧力, ピストン速度および変位である。グラフより, 給排気孔が切換わることにより自励振動が発生しており, 特にシリンダ室圧力応答など, この特徴をシミュレーションではよく再現されていることがわかる。モデルにおいては, 給排気が瞬時に切換わると仮定しているが, 実際は孔が有限の大きさをもつため全開・全閉とならない区間がある。しかしながら, 図6の切換え領域 (Switching Region) のように, 全体に対してその間は短くほとんど影響しないことがわかった。この両者のもっとも大きな相違は, 給排気孔がともに閉じられるシリンダ室圧力が供給圧力 300 kPa 以上となる部分であり, モデルでは考慮されていない漏れが要因で, より厳密な解析を要する場合には, この漏れ部分のモデル化も必要となる。

図6(b)に今度は3.2節の線形化モデルでの計算結果との比較を示す。流量の非線形性を無視しているため, かなり様相は異なってくるものの, リレー出力の方形波が, シリンダ室の圧力変化などで崩れていく特徴はよく表しており, 線形モデルを用いても, おおよそその振動現象の理解には十分である。他の実験条件についても, おおむね同様な結果が得られた。

4.3 振幅と周波数の解析モデルとの比較 バイブレータを応用する場合には周波数 f ($=\omega/2\pi$) と振幅 $|x|$ が重要となる。そこで4.2節の振動応答から図7のように, これらについてデータを整理した。実験条件として供給圧力, および負荷質量を変化させた。

(a) In the Case of Nonlinear Model

(b) In the Case of Linearized Model

Fig. 6 Comparison with Experiments of Vibrator Response

また実験が可能な2種類のみであるが給排気孔は $\phi 1.5$ mm と $\phi 2.0$ mm とについて実験を行い, 周波数は角周波数 ω を周波数 f に変換して表示した。実験結果のほかに, 非線形および線形化モデルに対するシミュレーションから得られた結果, ならびに減衰率 ζ を零としたときの解析結果である式(26)と(29)により計算された周波数, 振幅との結果を同時にプロットしてある。結果としては示していないが, 式(28)を用いた減衰率が大きいときの結果は, それぞれ9%ずつ周波数は小さく振幅は大きくなるだけで, 図上では減衰率が零の曲線にごく近いものになった。

非線形モデルでは実験結果との違いは周波数, 振幅

(a) In the Case of Supply Pressure Change

(b) In the Case of Load Mass Change

(c) In the Case of Effective Area Change

Fig. 7 Comparison between Models and Experiments of Frequency and Amplitude

とも 20%前後であり、パイプレータ設計時の振動予測には十分な精度である。線形モデルでも非線形の結果より定量的にはかなり劣るものの、定性的には負荷質量、供給圧力に対する周波数、振幅の変化の傾向をよ

Table 1 Relations between Each Parameter and Frequency or Amplitude

Increased Parameter	Frequency	Amplitude
A_c	+	=
M	-	=
P_s	+	+
S_e	-	+
V_c	-	+

+ : Increased - : Decreased = : Unchanged

く表しており、振動現象の定性的理解には十分である。絞り面積に対しては、 K_G を一定と近似しているため定性的にも異なってしまうが、実際に使用されるような S_e が比較的に小さい範囲に限定すれば線形モデルでも十分に役立ち、これらのことから線形近似の妥当性、有効性が証明された。また線形モデルを解析した結果である式(26)等は、当然のことながら線形モデルの結果と一致しているものといえ、解析結果の正当性も確認できる。つまり解析結果から振動の支配要因を決定できる。

4.4 各パラメータの影響 4.3 節の結果より、負荷質量など動作条件の各パラメータに対する周波数、振幅の変化は解析結果により、ほぼ説明できる。例えば、振動周波数はシリング固有周波数に等しく、振幅はリレーの出力、すなわち供給圧力に比例する。したがって供給圧力の増加に対して周波数は圧力の平方根に、振幅は圧力そのものに比例して大きくなるので図7の結果となる。負荷質量の増加は逆に固有周波数を低下させるので周波数は減少する。振幅に関しても流量の非線形性の影響により実際はわずかに増加傾向にあるが、このことを考慮すれば振幅は負荷質量に対して変化しないとする線形モデルの結果は妥当なものといえる。他のパラメータに対しても非線形シミュレーションにより確認したところ有効断面積の関係以外、その影響は同様に説明できた。各パラメータと周波数、振幅の関係を表1に示す。表1と解析結果を念頭に置けば、所望の周波数、振幅を実現するための必要なシリング面積、供給圧力などの決定の方策が得られ、これを基に非線形シミュレーションを行えば定量的にもかなり近い計算結果となるので、各パラメータを決定していくことができ、ピストン形空気圧パイプレータの設計が行うことが可能となる。

5. ま と め

本研究で行った内容、得られた結果をまとめると以下のようになる。

(1) ピストン形空気圧パイプレータに対して物理

方程式に基づきモデル化を行った。このモデルに対して適当な線形化を施した結果、この振動現象はリレー要素による一種の自励発振ととらえることができることがわかった。

(2) 導出した線形モデルに対してフーリエ級数展開を用いた非線形解析を適用し特性解析を行い振動現象を明快に説明した。振動周波数はシリンダ固有周期となり、振幅はほぼ供給圧力のみに依存することなど有益な結果が得られた。

(3) 特性解析により得られた結果は実験の振動状態と良好に一致し、モデルおよび理論の妥当性を確認するとともに、所望の周波数、振幅を得るための供給

圧力、シリンダ径などの設計指針を得ることができた。

本研究で示した解析方法、結果は他の類似した空気圧バイブレータの解析にも応用展開できるものと考えられる。

文 献

- (1) 佐藤慎二郎・榎本光孝, 機械設計, **41**-2 (1997), 89-95.
- (2) 佐々木勝美, 機械設計, **38**-8 (1994), 96-100.
- (3) 劉小平・荒木獻次, 油圧と空気圧, **24**-3 (1994), 386-393.
- (4) Zypkin, Ja. S., リレー式自動制御系の理論, (1960), 125-151, 日刊工業新聞社.
- (5) 藤堂勇雄, 制御工学基礎理論, (1987), 131-139, 森北出版.