減衰系に取り付ける動吸振器の H_2 最適化における代数的厳密解*浅見 敏彦^{*1}, 西原 修^{*2}
Amr M. Baz^{*3}, 木村 文義^{*1}Closed-Form Exact Solution to H_2 Optimization of Dynamic
Vibration Absorbers Attached to Damped Linear SystemsToshihiko ASAMI^{*4}, Osamu NISHIHARA,
Amr M. Baz and Fumiyoshi KIMURA^{*4} Himeji Institute of Technology, Dept. of Mechanical Engineering, 2167 Shosha, Himeji, Hyogo, 671-2201 Japan

The objective of the H_2 optimization of the dynamic vibration absorbers (DVAs) is to minimize the vibration energy transmitted to the system from the source of excitation. In this optimization criterion, the squared area (called H_2 -norm) under the frequency response curve of the system is minimized. If the system is subjected to random excitation instead of sinusoidal one, then the H_2 optimization is probably desirable than the popular H_∞ optimization. The H_2 optimization is a classical optimization problem of DVAs, and has been already solved for a special case when the primary system has no damping. However, for the general case where the damping is present in the primary system, the H_2 optimization problem is not solved by algebraic approach until today. This paper proposes a closed-form exact solution for the H_2 optimization of DVAs attached to the damped primary systems.

Key Words: Damping, Dynamic Vibration Absorber, Vibration Isolation, Algebraic Manipulation, H_2 Optimization, Damped Primary System, Closed-Form Exact Solution

1. 緒 言

代表的な受動型の制振装置として知られる動吸振器は、外乱を受けて振動している物体(主系と呼ばれる)の運動エネルギーを吸収することによって物体の振動を抑える。その解析モデルを図1に示している。1909年に最初に Frahm によって考案された動吸振器⁽¹⁾には減衰がなく(図1において $c_2 = 0$)、それは動吸振器の固有振動数(ω_2)近傍のごく限られた周波数帯域でしか有効に働かなかった。その後、Ormondroyd と Den Hartog は1928年の論文⁽²⁾で、図1のようにエネルギー散逸機構を備えた動吸振器が広い周波数範囲において効果があることを見出した。この減衰のある動吸振器は Voigt 型動吸振器と呼ばれ、今日まで動吸振器の標準的なモデルとなっている。この論文をきっかけに、Voigt 型動吸振器の最適化に関する研究が始まり、これまでに多くの最適化規範が提案されている。表1はその代表的な三つの規範を示している。これらの最適化規範にお

いて、主系に減衰のない場合($c_1 = 0$ または $\zeta_1 = 0$)が最初に研究され、次に $\zeta_1 \neq 0$ の一般的な場合について研究がなされた。その重要な研究論文を表2に示している。以下、この表に従って過去の研究経過について概説する。

(1) H_∞ 最適化規範 Den Hartog らによって最初に提案された動吸振器の設計規範は、系の予想される最悪の応答を最小化しようというもので、これは今日では H_∞ 最適化規範と呼ばれている。我々の知る限りでは、この規範による最適の同調条件、すなわち主系と動吸振器の固有振動数比の最適値 v_{opt} は Hahnkamm によって導かれた⁽³⁾、この最適同調条件を導くのに系の応答曲線において現れる定点が利用されたので、この最適化手法はしばしば定点理論と呼ばれる。その後、Brock が

(a) Force excitation system (b) Motion excitation system
Fig.1 Systems subjected to random excitation.

* 原稿受付 2000年6月5日。

^{*1} 正員, 姫路工業大学(〒671-2201 姫路市書写 2167)。^{*2} 正員, 京都大学大学院情報学研究所(〒606-8501 京都市左京区吉田本町)。^{*3} Univ. of Maryland, College Park, MD 20742-3035, USA
E-mail: asami@mech.eng.himeji-tech.ac.jp

動吸振器の最適減衰の計算式を導出し⁽⁴⁾、ここに定点理論による動吸振器の設計手法が完成した。これらの最適パラメータは Den Hartog のテキスト⁽⁵⁾に紹介され、今でも動吸振器の代表的な設計式となっている。

定点理論は、動吸振器の H_∞ 最適化における近似解法に過ぎないことは昔から知られていたが、厳密解の導出は不可能とされていた。ところが最近、 H_∞ 最適化における厳密解法が西原・松久によって報告され⁽⁶⁾、表 3 の No.1 に示すような代数解が導出されるに至った⁽⁷⁾。このことにより、定点理論による解が数値的には厳密解に極めて近いことが証明された。

主系に減衰がある場合には、この最適化規範で代数解を導くことは不可能であり、数値解⁽⁸⁾⁻⁽¹²⁾もしくは級数解⁽¹³⁾の形でしか解が求められていない。

(2) H_2 最適化規範 系が様々な周波数成分を含む外乱により励振される場合には、単一の周波数成分(系の共振振動数)に対する応答のみに注目する必要はなく、系に伝達される総エネルギー、すなわち周波数応答曲線の下での自乗面積を最小化するという考えが生まれる。この規範は 1963 年に Crandall と Mark⁽¹⁴⁾によって提案され、現在では H_2 最適化規範として知られる。主系に減衰がないときの H_2 最適解は岩田⁽¹⁵⁾と浅見⁽¹⁶⁾によって見出され、その解は表 3 の No.2 に示されている。この H_2 最適化規範においても、主系に減衰があるときの代数解の導出は極めて難しく、これまでに数値解⁽¹⁶⁾と級数解⁽¹⁷⁾が得られているに過ぎない。

(3) 安定度最大化規範 H_∞ と H_2 最適化は系の定常応答を改善することを目的としているが、安定度最大化規範の目的は系の過渡応答の改善にある。この考え方は最初に山口⁽¹⁸⁾によって提案された。山口は対数減衰率を最大化することを最適化の規範としていたが、その後、西原⁽¹⁹⁾はこの考え方を、複素平面上における系の特性根(極)と虚軸との距離を最大にするという、

より簡単な指標で置き換えた(表 1 中の図参照)。この規範により、主系減衰がない($\zeta_1 = 0$)場合には表 3 の No.3 に示すような代数解が得られる^{(18),(19)}。また、この規範の場合には主系に減衰がある場合にも代数解が求められている⁽¹⁹⁾。

図 2 は、 $\zeta_1 = 0$ の場合について、上記 3 種類の設計規範によって設計された動吸振器が取り付けられた系の周波数応答を示している。 H_∞ 最適化では応答曲線の最大値が最小に抑えられ、 H_2 最適化では曲線の下での自乗面積(評価関数 I_1)が最小化される。このように定常応答で比較すると安定度最大化規範にとって不利である。この規範の目的は系の過渡応答の改善にある。

主系に減衰がある場合の一般的な最適化問題については、上記の安定度最大化規範以外についてはまだ代数解は得られていない。本論文は、動吸振器の H_2 最適化における代数的厳密解を提案するものである。それは四次方程式の一つの実根として与えられることが示される。得られた解は従来の数値解と一致することが確認された。

2. 最適化問題の定式化

H_2 最適化における評価関数を次のように定義する。図 1(a) に示された力加振系に対しては

$$I_1 = \frac{E[x_1^2]}{2\pi S_f \omega_1 / k_1^2} = \frac{\langle x_1^2 \rangle}{2\pi S_f \omega_1 / k_1^2} \quad \text{..... (1)}$$

同図(b)の変位加振系に対しては

$$I_1 = \frac{E[x_1^2]}{2\pi S_0 \omega_1} = \frac{\langle x_1^2 \rangle}{2\pi S_0 \omega_1} \quad \text{..... (2)}$$

ここで、記号 $E[\]$ と $\langle \rangle$ はそれぞれ集合平均と時間平均を表している。評価関数 I_1 (あるいは I_2) は、一様なパワースペクトル密度 S_f (あるいは S_0) を有する励振力(あるいは変位)に対する主系の応答の比を表している。 S_f と S_0 の単位は、それぞれ N^2/rad と m^2/rad である。定数 $2\pi\omega_1/k_1^2$ と $2\pi\omega_1$ は、これらの評価関数を無次元化するために導入されたものである。

主質量 m_1 の変位の自乗平均値は以下のように表される。

$$\langle x_1^2 \rangle = \frac{S_f}{k_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} A^2 d\omega = \frac{S_f \omega_1}{k_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} A^2 d\lambda \quad \text{..... (3)}$$

ここで

$$A = \left| \frac{x_1}{x_{st}} \right| = \left| \frac{x_1}{f_0/k_1} \right| = \sqrt{\frac{A_1^2 + B_1^2}{C^2 + D^2}} \quad \text{..... (4)}$$

は振幅応答倍率を表している。根号中の記号は以下のように表される。

Fig.2 Three different optimum frequency response curves.

Table 1 Typical optimization criteria of the dynamic vibration absorbers

No.	Optimization criterion	Performance index	Objective	Analytical model	Definition of the symbols
			Who/When proposed?		
1	H_∞ Optimization	$A_{1\max} = \left \frac{x_1}{x_{st}} \right _{\max}$	to minimize the maximum amplitude response of the system	<p>(a) Force excitation system</p>	$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ $\mu = \frac{m_2}{m_1}$ $\nu = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ $\zeta_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$ $\zeta_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$
		or $T_{1\max} = \left \frac{x_1}{x_0} \right _{\max}$	Ormondroyd, J & Den Hartog, J. P., 1928		
2	H_2 Optimization	$I_1 = \frac{E[x_1^2]}{2\pi S_f \omega_1 / k_1^2}$	to minimize the vibration energy transmitted to the system from the source of excitation	<p>(b) Motion excitation system</p>	$\zeta_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$ $\zeta_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$
		or $I_t = \frac{E[x_1^2]}{2\pi S_0 \omega_1}$	Crandall, S. H. & Mark, W. D., 1963		
3	Stability Maximization	$\Lambda = -\max_i (\text{Re}[s_i])$	to attenuate the transient vibration of the system as soon as possible		$x_{st} = f_0 / k_1$ $E[\]$: ensemble mean S_f, S_0 : uniform power spectrum density of the excitation
			Yamaguchi, H., 1988 Nishihara, O. & Matsuhisa, H., 1997		

Table 2 Past research on the optimization of the dynamic vibration absorbers

No.	Special case of $\zeta_1 = 0$		General case of $\zeta_1 \neq 0$		
	Approximate solution	Exact solution	Numerical solution	Series solution	Exact solution
1	ν_{opt} : Hahnkamm, H., 1932 $\zeta_{2\text{opt}}$: Brock, J. E., 1946	Nishihara, O. & Matsuhisa, H., 1997	Ikeda, K. & Ioi, T., 1978 Randall, S. E. et al., 1981 Thompson, A. G., 1981 Soom, A. & Lee, M., 1983 Sekiguchi, H. & Asami, T., 1984	Asami, T. & Hosokawa, Y., 1995	probably impossible
2		Iwata, Y., 1982 Asami, T., et al., 1991	Asami, T., et al., 1991	Asami, T., et al., 1993	proposed in this paper
3		Yamaguchi, H., 1988 Nishihara, O. & Matsuhisa, H., 1997			Nishihara, O. & Matsuhisa, H., 1997

Table 3 Solutions of the optimization problems of the dynamic vibration absorbers for the special case of $\zeta_1 = 0$.

No.	Optimization criterion & performance index	Optimum tuning ν_{opt}	Optimum damping $\zeta_{2\text{opt}}$	Optimized value of performance index
1	H_∞ Optimization	$\frac{1}{1+\mu}$	$\sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}}$	$\sqrt{\frac{2+\mu}{\mu}}$
	Approx. solution			
1	$\left \frac{x_1}{x_{st}} \right _{\max}, \left \frac{x_1}{x_0} \right _{\max}$	$\frac{2}{1+\mu} \sqrt{\frac{2[16+23\mu+9\mu^2+2(2+\mu)\sqrt{4+3\mu}]}{3(64+80\mu+27\mu^2)}}$	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{8+9\mu-4\sqrt{4+3\mu}}{1+\mu}}$	$\frac{1}{3\mu} \sqrt{\frac{(8+9\mu)^2(16+9\mu)-128(4+3\mu)^{3/2}}{3(32+27\mu)}}$
	Exact solution			
2	H_2 Optimization $E[x_1^2] / (2\pi S_0 \omega_1)$	$\frac{1}{1+\mu} \sqrt{\frac{2+\mu}{2}}$	$\sqrt{\frac{\mu(4+3\mu)}{8(1+\mu)(2+\mu)}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4+3\mu}{\mu(1+\mu)}}$
3	Stability Maximization $-\max_i (\text{Re}[s_i])$	$\frac{1}{1+\mu}$	$\sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}}$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= v^2 - \lambda^2 \\ B_1 &= 2v\lambda\zeta_2 \\ C &= v^2 - [1 + 4v\zeta_1\zeta_2 + (1+\mu)v^2]\lambda^2 + \lambda^4 \\ D &= 2\lambda\{(v^2 - \lambda^2)\zeta_1 + v[1 - (1+\mu)\lambda^2]\zeta_2\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \mu &= m_2 / m_1 : \text{mass ratio} \\ v &= \omega_2 / \omega_1 : \text{natural frequency ratio} \\ \lambda &= \omega / \omega_1 : \text{forced frequency ratio} \\ \zeta_1 &= c_1 / (2m_1\omega_1) : \text{primary damping ratio} \\ \zeta_2 &= c_2 / (2m_2\omega_2) : \text{absorber damping ratio} \end{aligned} \right\} \dots\dots (6)$$

は無次元パラメータを表している。こうして、評価関数 I_1 は次のように表現できる。

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_1^2 + B_1^2}{C^2 + D^2} d\lambda \dots\dots (7)$$

同様に I_t については

$$I_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_t^2 + B_t^2}{C^2 + D^2} d\lambda \dots\dots (8)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} A_t &= v^2 - (1 + 4v\zeta_1\zeta_2)\lambda^2 \\ B_t &= 2\lambda[(v^2 - \lambda^2)\zeta_1 + v\zeta_2] \end{aligned} \right\} \dots\dots (9)$$

式(7)と(8)の積分は、留数定理によって実行することができる。その結果は次式で与えられる。

$$I_1 = \frac{1}{4} \frac{p_{01}\zeta_2^3 + p_{02}\zeta_2^2 + p_{03}\zeta_2 + p_{04}}{q_{01}\zeta_2^3 + q_{02}\zeta_2^2 + q_{03}\zeta_2 + q_{04}} \dots\dots (10)$$

$$I_t = \frac{1}{4} \frac{r_{01}\zeta_2^3 + r_{02}\zeta_2^2 + r_{03}\zeta_2 + r_{04}}{q_{01}\zeta_2^3 + q_{02}\zeta_2^2 + q_{03}\zeta_2 + q_{04}} \dots\dots (11)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} p_{01} &= 4(1+\mu)v^2 \\ p_{02} &= 4v[1 + (1+\mu)v^2]\zeta_1 \\ p_{03} &= 1 + (1+\mu)v^4 - v^2(2+\mu-4\zeta_1^2) \\ p_{04} &= \mu v^3\zeta_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} q_{01} &= 4(1+\mu)v^2\zeta_1 \\ q_{02} &= v\{\mu + 4[1 + (1+\mu)v^2]\zeta_1^2\} \\ q_{03} &= \zeta_1[1 + (1+\mu)v^4 - 2v^2(1-2\zeta_1^2)] \\ q_{04} &= \mu v^3\zeta_1^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} r_{01} &= 4v^2(1+\mu+4\zeta_1^2) \\ r_{02} &= 4v\zeta_1[1+4\zeta_1^2+v^2(1+\mu+4\zeta_1^2)] \\ r_{03} &= 1+4\zeta_1^2+v^4(1+\mu)(1+\mu+4\zeta_1^2) \\ &\quad - v^2(2+\mu+4\zeta_1^2-16\zeta_1^4) \\ r_{04} &= \mu v^3\zeta_1(1+4\zeta_1^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

3. 問題の解法

評価関数 I_1 と I_t は、 μ と ζ_1 が与えられたときに、 v と ζ_2 のある組合せ、すなわち最適条件 v_{opt} , $\zeta_{2\text{opt}}$ において最小値をとる。この条件は、関数 I_1 の v と ζ_2 のそれぞれに関する偏導関数が共に零になる条件から求められる。式(10)を v と ζ_2 のそれぞれで微分し、その結果を零とおくと、以下の連立方程式が得られる⁽¹⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} v[-(2+\mu)+2(1+\mu)v^2]\zeta_2^2 \\ + [-1+2\mu v^2+(1+\mu)^2v^4]\zeta_1\zeta_2 + \mu v^3\zeta_1^2 &= 0 \\ 4(1+\mu)v^2\zeta_2^2 + 4(1+\mu)v^3\zeta_1\zeta_2 + (1+\mu)^2v^4 - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (15)$$

最適パラメータ v_{opt} , $\zeta_{2\text{opt}}$ は、この連立方程式の解として求められる。これらの式から v と ζ_2 のいずれか一方のパラメータを消去することができる。もし ζ_2 の方を消去すれば、以下の式が得られる。

$$b_0v^8 + b_1v^6 + b_2v^4 + b_3v^2 + b_4 = 0 \dots\dots (16)$$

この式の係数 $b_0 \sim b_4$ については表4に与えられている。ここで、 $x = v^2$, $a_1 = b_1/b_0$, $a_2 = b_2/b_0$ 等々の置き換えをすると、式(16)は以下のように表現できる。

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \dots\dots (17)$$

最適同調条件 v_{opt} は、四次方程式(17)の一つの正の実根として求められる。Ferrariの解法⁽²⁰⁾を用いてこの方程式を解いて得られた最適同調 v_{opt} の式を表4に示している。動吸振器の最適減衰比 $\zeta_{2\text{opt}}$ は最適同調 v_{opt} の関数として表現でき、その式も表4で与えられている。これらの式は、 $\zeta_1 = 0$ の特別な場合には表3のNo.2の式に一致することを代数計算により確認している。

式(15)から v の方を消去すれば、また別の四次方程式が得られる。この式からは、最適パラメータのまた別の計算式が得られることになるが、数値的には同じ結果になるので、ここでは省略する。

評価関数 I_t に対しても、同様に最適パラメータ v_{opt} , $\zeta_{2\text{opt}}$ を求めることができ、その計算式をそれぞれ表5と6に示している。今度は v_{opt} については二つの解 v_{opt1} と v_{opt2} が示されている。これらの式は、主系減衰 ζ_1 の値に応じて使い分ける必要がある。 v_{opt} の式の適当な選択については、表5の中のと表に記載されている。 ζ_1 の小さい範囲 ($\zeta_1 < 0.4$) においては、常に v_{opt1} の方を選択すればよい。

表6には $\zeta_{2\text{opt}}$ についても二つの式が与えられているが、これらは同じ結果を与える。 $\zeta_1 = 0$ の極限においてこれらの式は $0/0$ の不定形になるが、数値的には表3に示された従来の式による計算値に漸近していく。

Table 4 Exact solution of the H_2 optimization for the system subjected to force excitation.

Optimum tuning	$v_{\text{opt}} = \sqrt{-\frac{p_2}{2} - \sqrt{\frac{p_2^2}{4} - q_2}}$	Optimum damping	$\zeta_{2\text{opt}} = \sqrt{\frac{[1 - (1 + \mu)^2 v_{\text{opt}}^4][1 - 2\mu v_{\text{opt}}^2 - (1 + \mu)^2 v_{\text{opt}}^4] - 4\mu(1 + \mu)v_{\text{opt}}^6 \zeta_1^2}{4(1 + \mu)v_{\text{opt}}^4[1 - (2 + 3\mu)v_{\text{opt}}^2 + (1 + \mu)^2 v_{\text{opt}}^4]}}$
Symbols	$p_2 = \frac{1}{2} \left[a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4y_1} \right], \quad q_2 = \frac{1}{2} \left[y_1 - \frac{a_1 y_1 - 2a_3}{\sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4y_1}} \right]$ $y_1 = \frac{a_2}{3} + 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{R}{\sqrt{-Q^3}}\right)$ $Q = -\frac{1}{9} (a_2^3 - 3a_1 a_3 + 12a_4) \quad , \quad R = \frac{1}{54} (2a_2^3 - 9a_1 a_2 a_3 + 27a_3^2 + 27a_1^2 a_4 - 72a_2 a_4)$		$a_1 = b_1 / b_0, \quad a_2 = b_2 / b_0, \quad a_3 = b_3 / b_0, \quad a_4 = b_4 / b_0$ $b_0 = 4(1 + \mu)^5(1 + \mu - \zeta_1^2)$ $b_1 = 4\mu(1 + \mu)^2(1 + \mu - \zeta_1^2)(1 + \mu - 4\zeta_1^2)$ $b_2 = -(1 + \mu)^2(8 + 12\mu + 3\mu^2 - 8\zeta_1^2)$ $b_3 = -2\mu(1 + \mu)(2 + \mu - 6\zeta_1^2)$ $b_4 = (2 + \mu)^2 - 4(1 + \mu)\zeta_1^2$

Table 5 Exact solution of the H_2 optimization for the system subjected to motion excitation (Part 1: optimum tuning parameter).

Optimum tuning	Optimum tuning v_{opt} is either $v_{\text{opt}1}$ or $v_{\text{opt}2}$ that produce the positive optimum damping $\zeta_{2\text{opt}}$.
	$v_{\text{opt}1} = \sqrt{-\frac{p_2}{2} - \sqrt{\frac{p_2^2}{4} - q_2}} \quad \text{or} \quad v_{\text{opt}2} = \sqrt{-\frac{p_2}{2} + \sqrt{\frac{p_2^2}{4} - q_2}}$
Symbols	$p_2 = \frac{1}{2} \left[a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4y_1} \right], \quad q_2 = \frac{1}{2} \left[y_1 - \frac{a_1 y_1 - 2a_3}{\sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4y_1}} \right]$ $y_1 = \frac{a_2}{3} + 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{R}{\sqrt{-Q^3}}\right)$ $Q = -\frac{1}{9}(a_2^3 - 3a_1 a_3 + 12a_4), \quad R = \frac{1}{54}(2a_2^3 - 9a_1 a_2 a_3 + 27a_3^2 + 27a_1^2 a_4 - 72a_2 a_4)$
	$a_1 = b_1 / b_0, \quad a_2 = b_2 / b_0, \quad a_3 = b_3 / b_0, \quad a_4 = b_4 / b_0$ $b_0 = 4(1+\mu)^2(1+\mu+8\zeta_1^2)(1+\mu-\zeta_1^2)[(1+\mu)^2 + 16(1+\mu)\zeta_1^4 + 32(1+\mu)\zeta_1^6 - 256(1+\mu)\zeta_1^8 + 256\zeta_1^{10}]$ $b_1 = 4(1+\mu)(1+\mu-\zeta_1^2)[\mu(1+\mu)^2 - 16(1+\mu)\zeta_1^2 - 32(1+\mu)(8+7\mu)\zeta_1^4 - 768(1+\mu)\zeta_1^6 + 256(8+9\mu)\zeta_1^8]$ $b_2 = -(1+\mu)^2(8+12\mu+3\mu^2) - 8(1+\mu)^3(15+22\mu+6\mu^2)\zeta_1^2 - 16\mu(1+\mu)(7+5\mu)\zeta_1^4 + 64(1+\mu)(50+75\mu+12\mu^2)\zeta_1^6 - 256(3+4\mu)(4+3\mu)\zeta_1^8]$ $b_3 = -2[\mu(1+\mu)(2+\mu) - 2(1+\mu)(16+15\mu+4\mu^2)\zeta_1^2 - 56(4+7\mu+2\mu^2)\zeta_1^4 + 32(8+13\mu+4\mu^2)\zeta_1^6]$ $b_4 = (2+\mu)^2 + 4(7+3\mu)\zeta_1^2 - 16(2+\mu)\zeta_1^4$

Proper choice of optimum tuning v_{opt}		
μ	Range of primary damping ζ_1	
	$v_{\text{opt}} = v_{\text{opt}1}$	$v_{\text{opt}} = v_{\text{opt}2}$
0.01	0 ~ 0.435	0.436 ~ 0.752
0.05	0 ~ 0.438	0.439 ~ 0.730
0.1	0 ~ 0.441	0.442 ~ 0.719
0.2	0 ~ 0.447	0.448 ~ 0.709
0.3	0 ~ 0.453	0.454 ~ 0.707
0.5	0 ~ 0.464	0.465 ~ 0.709
0.7	0 ~ 0.474	0.475 ~ 0.715
1.0	0 ~ 0.486	0.487 ~ 0.727

Table 6 Exact solution of the H_2 optimization for the system subjected to motion excitation (Part 2: optimum damping parameter).

Optimum absorber damping $\zeta_{2\text{opt}}$ (we have two alternative expressions for $\zeta_{2\text{opt}}$)	
$\zeta_{2\text{opt}} = -\frac{\zeta_1}{v_{\text{opt}}} \frac{c_0 + c_1 \zeta_1^2 + c_2 \zeta_1^4 + c_3 \zeta_1^6 + c_4 \zeta_1^8 + c_5 \zeta_1^{10} + c_6 \zeta_1^{12}}{d_0 + d_1 \zeta_1^2 + d_2 \zeta_1^4 + d_3 \zeta_1^6 + d_4 \zeta_1^8 + d_5 \zeta_1^{10} + d_6 \zeta_1^{12}} \quad \text{or} \quad \zeta_{2\text{opt}} = -\frac{\zeta_1}{v_{\text{opt}}} \frac{e_0 + e_1 \zeta_1^2 + e_2 \zeta_1^4 + e_3 \zeta_1^6 + e_4 \zeta_1^8 + e_5 \zeta_1^{10} + e_6 \zeta_1^{12}}{c_0 + c_1 \zeta_1^2 + c_2 \zeta_1^4 + c_3 \zeta_1^6 + c_4 \zeta_1^8 + c_5 \zeta_1^{10} + c_6 \zeta_1^{12}}$	
Coefficients $c_0 - c_6$	$c_0 = (1+\mu)(1+v_{\text{opt}}^2 + \mu v_{\text{opt}}^2)[1-\mu v_{\text{opt}}^2 - (1+\mu)^2 v_{\text{opt}}^4][2+\mu-2(1+\mu)^2 v_{\text{opt}}^2]$ $c_1 = 4[4+3\mu+(5+4\mu)(2+2\mu+\mu^2)v_{\text{opt}}^2 - (1+\mu)(4+3\mu)(4+9\mu+4\mu^2)v_{\text{opt}}^4 - (1+\mu)^3(12+2\mu-5\mu^2)v_{\text{opt}}^6 + (1+\mu)^5(12+5\mu)v_{\text{opt}}^8 + 2(1+\mu)^7 v_{\text{opt}}^{10}]$ $c_2 = 16[-\mu+2(10+16\mu+7\mu^2)v_{\text{opt}}^2 + 2(1+\mu)(2-7\mu)v_{\text{opt}}^4 - 2(1+\mu)^2(24+37\mu+12\mu^2)v_{\text{opt}}^6 + (1+\mu)^4(12+11\mu)v_{\text{opt}}^8 + 12(1+\mu)^6 v_{\text{opt}}^{10}]$ $c_3 = -64 v_{\text{opt}}^2 [\mu(4+3\mu) - (40+90\mu+57\mu^2+12\mu^3)v_{\text{opt}}^2 + (1+\mu)(28+66\mu+40\mu^2+5\mu^3)v_{\text{opt}}^4 + (1+\mu)^3(32+31\mu+5\mu^2)v_{\text{opt}}^6 - 2(1+\mu)^5(10-\mu)v_{\text{opt}}^8]$ $c_4 = -256 v_{\text{opt}}^4 [\mu(4+3\mu) - 4(1+\mu)(10+16\mu+5\mu^2)v_{\text{opt}}^2 + (1+\mu)^2(38+49\mu+10\mu^2)v_{\text{opt}}^4 + 10\mu(1+\mu)^4 v_{\text{opt}}^6]$ $c_5 = -1024(1+\mu)v_{\text{opt}}^6 [\mu-5(1+\mu)(4+3\mu)v_{\text{opt}}^2 + 2(1+\mu)^2(7+5\mu)v_{\text{opt}}^4]$ $c_6 = 16384(1+\mu)^3 v_{\text{opt}}^{10}$
Coefficients $d_0 - d_6$	$d_0 = (1+\mu)(1+v_{\text{opt}}^2 + \mu v_{\text{opt}}^2)[2+\mu-2(1+\mu)^2 v_{\text{opt}}^2]$ $d_1 = 4[(2+\mu)(6+5\mu) + \mu(1+\mu)(1+5\mu+3\mu^2)v_{\text{opt}}^2 - (1+\mu)^3(32+39\mu+11\mu^2)v_{\text{opt}}^4 + 8(1+\mu)^5(2+\mu)v_{\text{opt}}^6 + 4(1+\mu)^7 v_{\text{opt}}^8]$ $d_2 = 16[7+3\mu-\mu^2 + (1+\mu)(31+54\mu+20\mu^2)v_{\text{opt}}^2 - (1+\mu)^2(55+100\mu+41\mu^2)v_{\text{opt}}^4 - 3(1+\mu)^4 v_{\text{opt}}^6 + 20(1+\mu)^6 v_{\text{opt}}^8]$ $d_3 = -64[2(1+\mu) - (27+52\mu+17\mu^2-3\mu^3)v_{\text{opt}}^2 - (1+\mu)(9+22\mu+27\mu^2+11\mu^3)v_{\text{opt}}^4 + (1+\mu)^3(59+61\mu+8\mu^2)v_{\text{opt}}^6 - (1+\mu)^5(25-4\mu)v_{\text{opt}}^8]$ $d_4 = -256(1+\mu)v_{\text{opt}}^2 [2(3+4\mu) - (43+68\mu+20\mu^2)v_{\text{opt}}^2 + (1+\mu)(27+28\mu)v_{\text{opt}}^4 + 8(1+\mu)^3(1+2\mu)v_{\text{opt}}^6]$ $d_5 = -1024(1+\mu)v_{\text{opt}}^4 [2(3+4\mu) - (1+\mu)(29+25\mu)v_{\text{opt}}^2 + (1+\mu)^2(17+13\mu)v_{\text{opt}}^4]$ $d_6 = 8192(1+\mu)^2 v_{\text{opt}}^6 [-1+3(1+\mu)v_{\text{opt}}^2]$
Coefficients $e_0 - e_6$	$e_0 = (1+\mu)(1+v_{\text{opt}}^2 + \mu v_{\text{opt}}^2)[1-3\mu v_{\text{opt}}^2 - (2+2\mu-\mu^2)v_{\text{opt}}^4 + \mu(1+\mu)^2 v_{\text{opt}}^6 + (1+\mu)^4 v_{\text{opt}}^8]$ $e_1 = 4[2+(7+8\mu+4\mu^2)v_{\text{opt}}^2 - (3+21\mu+29\mu^2+12\mu^3)v_{\text{opt}}^4 - (1+\mu)(14+29\mu+10\mu^2-4\mu^3)v_{\text{opt}}^6 + \mu(1+\mu)^3(9+4\mu)v_{\text{opt}}^8 + (1+\mu)^5(7+3\mu)v_{\text{opt}}^{10} + (1+\mu)^7 v_{\text{opt}}^{12}]$ $e_2 = 16 v_{\text{opt}}^2 [10(1+\mu) + (12+10\mu-\mu^2)v_{\text{opt}}^2 - (1+\mu)(22+59\mu+34\mu^2)v_{\text{opt}}^4 - 9(1+\mu)^3(2-\mu)v_{\text{opt}}^6 + 4(1+\mu)^4(3+2\mu)v_{\text{opt}}^8 + 6(1+\mu)^6 v_{\text{opt}}^{10}]$ $e_3 = 64 v_{\text{opt}}^4 [4(5+8\mu+2\mu^2) + (6-9\mu-32\mu^2-12\mu^3)v_{\text{opt}}^2 - (1+\mu)(30+57\mu+20\mu^2-4\mu^3)v_{\text{opt}}^4 - (1+\mu)^3(3+\mu)(2-\mu)v_{\text{opt}}^6 + 5(1+\mu)^5(2-\mu)v_{\text{opt}}^8]$ $e_4 = 256 v_{\text{opt}}^6 [2(10+19\mu+8\mu^2) + (1+\mu)(1-16\mu-20\mu^2)v_{\text{opt}}^2 - (1+\mu)^2(19+8\mu-12\mu^2)v_{\text{opt}}^4 - 12\mu(1+\mu)^4 v_{\text{opt}}^6]$ $e_5 = 1024(1+\mu)^2 v_{\text{opt}}^8 [10+3(1-\mu)v_{\text{opt}}^2 - (1+\mu)(7+3\mu)v_{\text{opt}}^4]$ $e_6 = 8192(1+\mu)^2 v_{\text{opt}}^{10} (1+v_{\text{opt}}^2 + \mu v_{\text{opt}}^2)$

4. 結果の表示

図1(a)と(b)に示された二つの系について動吸振器の H_2 最適解を計算した結果を、それぞれ図3と4に示す。各図の(a)と(b)は、表4～6の式から計算された最適パラメータ v_{opt} と ζ_{2opt} を示している。これらの値を式(10)と(11)に代入すると、与えられた μ と ζ_1 の値に対して達成可能な評価関数 I_1 と I_t の最小値が求められ、その結果が各図の(c)に示されている。これらの図から、 ζ_1 が0.1以上になると、力加振系と変位加振系の違いが顕著に現れてくることが分かる。

5. 結 言

主系の減衰を考慮した場合の動吸振器の一般的な H_2 最適化問題は、最終的には四次の代数方程式を解く問題に帰着することを示した。次にFerrariの解法を用いてこの方程式を解き、表4～6に示す代数解を得た。表4と5の式は、主系に減衰がない($\zeta_1=0$)場合には、表3のNo.2に示された従来の式に一致することを代数計算により確認した。表6の式については $\zeta_1=0$ において0/0の不定形になるが、数値的には従来の式による値に漸近する。

文 献

- (1) Frahm, H., U.S. Patent, No.989, 958 (1911), 3576-3580.
- (2) Ormondroyd, J. and Den Hartog, J. P., Trans. ASME, J. Appl. Mech., **50**-7 (1928), 9-22.
- (3) Hahnkamm, E., Ing. Arch., **4** (1932), 192-201.
- (4) Brock, J. E., Trans. ASME, J. Appl. Mech., **13**-4 (1946), A-284.
- (5) Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations*, 4th ed., McGraw-Hill, (1956), 100-103.
- (6) 西原修・松久寛, 機論 (C編), **63**-614 (1997), 3438-3445.
- (7) 西原修・浅見敏彦・渡辺晋哉, 機論 (C編), **66**-642 (2000), 420-426.
- (8) 池田健・五百井俊宏, 機論, **43**-369 (1977), 1707-1715.
- (9) Randall, S. E., et al., Trans. ASME, J. Mech. Des., **103**-4 (1981), 908-913.
- (10) Thompson, A. G., J. Sound Vib., **77**-3 (1981), 403-415.
- (11) Soom, A. and Lee, Ming-san, Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des., **105**-1 (1983), 112-119.
- (12) 関口久美・浅見敏彦, 機論 (C編), **50**-452 (1984), 607-617.
- (13) 浅見敏彦・細川欽延, 機論 (C編), **61**-583 (1995), 915-921.
- (14) Crandall, S.E. and Mark, W. D., *Random Vibration in Mechanical Systems*, Academic Press, (1963).
- (15) 岩田義明, 機講論, No. 820-8 (1982), 150-152.
- (16) 浅見敏彦・ほか4名, 機論 (C編), **56**-523 (1990), 619-627.
- (17) 浅見敏彦・桃瀬一成, 細川欽延, 機論 (C編), **59**-566 (1995), 2962-2967.
- (18) 山口秀谷, 機論 (C編), **54**-499 (1988), 561-568.
- (19) 西原修・松久寛, 機講論, No.97-10-1 (1997), 165-168.
- (20) 高木貞治, 代数学講義, 共立出版, (1948), 171-192.