入口旋回流速度が平行環状シールの動特性に及ぼす影響* (乱流係数を適用した平均化されたナビエ・ストークス方程式に基づく数値解析)

金子 覚^{*1}, 斎藤 卓郎^{*2}
小柳 貴博^{*3}, 伊藤 伸^{*2}

Effects of Inlet Swirl Velocity on Dynamic Characteristics of Annular Plain Seals (Numerical Analysis Based on Averaged Navier-Stokes Equations With Turbulent Coefficients)

Satoru KANEKO^{*4}, Takuro SAITO,
Takahiro KOYANAGI and Shin ITO

^{**} Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology,
1603-1 Kamitomioka-machi, Nagaoka-shi, Niigata, 940-2188 Japan

Averaged Navier-Stokes equations with turbulent coefficients and the continuity equation are applied to a theoretical investigation of the effects of inlet swirl velocity on the dynamic characteristics of annular plain seals employed in pumps. The turbulent coefficients are calculated based on the "law of the wall" and Prandtl's mixing length hypothesis. The numerical results show that for any eccentricity ratio at an equilibrium position of the rotor center and for any rotor spinning velocity, the inlet swirl velocity significantly influences the cross-coupled stiffness terms, whose magnitudes increase as the inlet swirl velocity increases in the direction of the rotor spin. This phenomenon yields an increase of the whirl-frequency ratio, resulting in a narrower stable range of the rotor spinning velocity.

Key Words: Fluid Force, Turbulent flow, Pump, Annular Plain Seals, Inlet Swirl Velocity, Dynamic Coefficients, Whirl-Frequency Ratio

1. はじめに

前報⁽¹⁾において著者らは、ポンプなどに使用されているバランスピストン、ウェアリングなどの平行環状シールを対象として、ロータがシールすきま内で偏心している場合の静特性を理論的に解析し、入口旋回流速度がシールすきま内の流速分布、圧力分布、液膜反力などに及ぼす影響を明らかにした。本研究では、その続報として、入口旋回流速度がシール部液膜の動特性に及ぼす影響を理論的に明らかにする。

入口旋回流速度がシール部液膜の動特性に及ぼす影響に関する従来の研究には、Childsらの理論的解析^{(2)~(4)}、岩壺らの理論的解析⁽⁵⁾ならびに実験的解析⁽⁶⁾⁽⁷⁾、兼森らの実験的解析⁽⁸⁾などがあるが、これらはいずれもロータの静的偏心率が零(同心状態)における解析である。一方、ロータが偏心している場合の動特性については従来より理論的解析^{(9)~(13)}、実験的解析⁽¹⁴⁾がなされているが、偏心した状態の動特性に及

ぼす入口旋回流速度の影響は明らかにされていない。

そこで本研究では、入口旋回流速度をパラメータにして、シールすきま内を同心または偏心した状態で自転しているロータに外部から微小変動量を与えたときに生じる動的流体力を算出し、これをもとに動特性係数ならびにふれまわり周波数比(Whirl-frequency ratio)を求める。そして得られた結果を用いてこれら諸特性に及ぼす入口旋回流速度の影響を調べる。なお、前報⁽¹⁾と同様に乱流係数を適用したすきまの厚さ方向に平均化されたナビエ・ストークスの運動方程式と連続の式とを基礎方程式として、これらを連立して解くことによりシールすきま内の動的な液膜圧力分布および流速分布を求めた。

2. 本論文に用いる主要な記号

B_x : 周方向無次元圧力こう配

$$= -(h^2/\mu U)(\partial p/\partial x)$$

B_z : 軸方向無次元圧力こう配・

$$= -(h^2/\mu U)(\partial p/\partial z)$$

$C_{ij}(i, j = X, Y)$: 液膜の減衰係数 N・s/m

C_m, C_c : $x_0=0$ における液膜の主対角減衰係数および
連成減衰係数 N・s/m

D : シール内径 $= 2R$ m

* 原稿受付 2000年7月6日。

^{*1} 正員, 長岡技術科学大学工学部(〒940-2188 長岡市上富岡町1603-1)。

^{*2} 長岡技術科学大学大学院。

^{*3} システム精工(株)(〒940-1164 長岡市南陽2-951-6)。

E-mail: kaneko@mech.nagaokaut.ac.jp

G_x, G_z : 乱流係数
 $K_{ij}(i, j = X, Y)$: 液膜のばね係数 N/m
 K_m, K_c : $\kappa_0 = 0$ における液膜の主対角ばね係数および連成ばね係数 N/m
 $M_{ij}(i, j = X, Y)$: 液膜の付加質量係数 kg
 M_m, M_c : $\kappa_0 = 0$ における液膜の主対角付加質量係数および連成付加質量係数 kg
 L : シール長さ m
 N : ロータ自転速度 rpm
 O_R, O_s : ロータ中心およびシール中心
 Q : 軸方向流量(漏れ流量) m^3/s
 R : シール内半径 m
 R_a : 軸方向平均レイノルズ数 $= \rho Q / (2\pi R \mu)$
 R_h : 周方向局所レイノルズ数 $= \rho R \omega h / \mu$
 U : ロータの周速度 $= R\omega$ m/s
 X, Y : O_s を原点とした水平および鉛直方向座標, ロータ中心の座標
 c : シール平均半径すきま m
 e : ロータの偏心量 m
 f : 液膜反力 N
 f_x, f_y : 液膜反力の X, Y 方向成分 N
 f_κ, f_θ : 液膜反力の偏心方向およびそれに直角方向の成分 N
 h : 液膜厚さ $= c(1 + \kappa \cos \theta) = c + Y \cos \theta' + X \sin \theta'$ m
 p_a : 差圧 $= p_{in} - p_{out} (= p_{in})$ Pa
 p_{in} : シール高圧側流入端直前 ($z = -0$) における圧力 Pa
 p'_{in} : シール高圧側流入端直後 ($z = +0$) における圧力 Pa
 p_{out} : シール低圧側流出端 ($z = L$) における圧力 Pa
 t : 時間 s
 u : 周方向流速 m/s
 u_{in} : 入口旋回流速度 m/s
 u_m : すきまの厚さ方向に平均した周方向流速 m/s
 v : すきまの厚さ方向の流速 m/s
 w : 軸方向流速 m/s
 w_m : すきまの厚さ方向に平均した軸方向流速 m/s
 x : 周方向座標 $= R\theta$
 y : 液膜厚さ方向座標
 z : 軸方向座標
 α : 入口旋回流速度係数 $= u_{in}(R\omega)$
 ζ : 入口損失係数

θ : 最大すきま位置からの角座標
 θ' : 鉛直上方からの角座標
 κ : 偏心率 $= e/c$
 μ : 作動流体(水)の粘性係数 Pa·s
 ρ : 作動流体の密度 kg/m^3
 ϕ : 偏心角 rad
 ω : ロータの自転角速度 rad/s
 $\cdot$: $\equiv d/dt$; 時間による1階微分

上添字(0): 粘性力に基づく成分

上添字(1): 慣性力に基づく成分

下添字0: 静的平衡状態にある諸量

Δ : 変数の微小変動量

3. 数値解析

解析の対象は平行環状シールである。図1には、シールすきま内で静的に偏心した状態で角速度 ω で自転しているロータに、微小変位、微小運動速度、微小加速度などの微小変動量が与えられたときに生じる動的な液膜反力 f とその成分を示す。

3.1 基礎方程式 作動流体(水)は非圧縮性、等粘度であると仮定し、さらにシールすきまが他の諸寸法に比べて非常に小さいことを考慮すると、シールすきま内の速度分布および圧力分布は以下の運動方程式(ナビエ・ストークスの式)ならびに連続の式によって支配される。

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x^*}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z^*}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで τ_x^*, τ_z^* はそれぞれ液膜に作用するせん断応力の x, z 方向成分である。流れが十分に発達した乱流域では速度成分の形状が平均化されると仮定し、流速

Fig.1 Annular plain seal and coordinate system

に関する境界条件

$$\begin{aligned} y=0: u=v=w=0 \\ y=h: u=R\omega, v=R\omega(\partial h/\partial x)+\partial h/\partial t, w=0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

を用いて式(1)～(3)をすきまの厚さ方向に積分すると

$$\begin{aligned} \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(hu_m^2) + \frac{\partial}{\partial z}(hu_m w_m) + \frac{\partial}{\partial t}(hu_m) \right\} \\ = -h \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{12\mu}{hG_x} \left(u_m - \frac{R\omega}{2} \right) \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(hu_m w_m) + \frac{\partial}{\partial z}(hw_m^2) + \frac{\partial}{\partial t}(hw_m) \right\} \\ = -h \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{12\mu}{hG_z} w_m \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(hu_m) + \frac{\partial}{\partial z}(hw_m) + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 u_m, w_m はすきまの厚さ方向に平均した u, w を示す。すなわち

$$u_m = \frac{1}{h} \int_0^h u dy, w_m = \frac{1}{h} \int_0^h w dy \quad \dots\dots\dots (8)$$

また、式(5)、(6)中の G_x, G_z は乱流係数であり、圧力こう配に基づく流量と圧力こう配の比として以下のように定義される。

$$G_x = 12 \left\{ \int_0^h u dy / (hR\omega) - 0.5 \right\} / B_x \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$G_z = 12 \left\{ \int_0^h w dy / (hR\omega) \right\} / B_z \quad \dots\dots\dots (10)$$

本研究では G_x, G_z の値を定めるために、前報⁽¹⁾と同様に、壁法則と混合距離仮説に基づき流速分布を算出した。その際、無次元圧力こう配 B_x, B_z および周方向局所レイノルズ数 R_h をパラメータとした。なお G_x, G_z の算出方法の詳細については既報⁽¹⁵⁾を参照してほしい。式(5)～(7)がシールすきま内の液膜圧力 p および速度成分 u_m, w_m を支配する基礎方程式となる。

p, u_m, w_m に関する境界条件は以下のように与えられる。

$$z=+0: p=p'_{in}=p_{in}-\Delta p \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$z=L: p=p_{out}$$

ここで $p_{out}=0$ (大気圧) とする。また Δp はシール流入端での圧力降下であり、入口損失係数 ζ を用いて次式で表す。

$$\Delta p = (1+\zeta) \rho (w_m|_{z=+0})^2 / 2 \quad \dots\dots\dots (12)$$

これを式(11)に代入すると p'_{in} は次式で与えられる。

$$p'_{in} = p_{in} - (1+\zeta) \rho (w_m|_{z=+0})^2 / 2 \quad \dots\dots\dots (13)$$

u_m のシール流入端における値は入口旋回流速度係数 α を用いて

$$u_m|_{z=0} = u_{in} = \alpha R\omega \quad \dots\dots\dots (14)$$

で与える。ここで α は入口旋回流速度 u_{in} とロータの周速度 $R\omega$ との比である。

w_m のシール流入端直後における境界条件は式(6)を用いて

$$\begin{aligned} w_m|_{z=+0} = & \left[-\frac{h^2 G_z}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right]_{z=+0} \\ & - \left[\frac{h G_z}{12\mu} \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(hu_m w_m) + \frac{\partial}{\partial z}(hw_m^2) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial}{\partial t}(hw_m) \right\} \right]_{z=+0} \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

で与えられる。

3・2 基礎方程式の解法 前報⁽¹⁾と同様に、各変数を粘性力に基づく成分(慣性力を無視した項)と慣性力に基づく成分(慣性効果による補正項)の和として表す。すなわち

$$\begin{aligned} p = p^{(0)} + p^{(1)}, u_m = u^{(0)} + u^{(1)}, w_m = w^{(0)} + w^{(1)} \\ \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

上添字(0)、(1)はそれぞれ粘性力に基づく成分、慣性力に基づく成分であることを示す。粘性力に基づく成分を支配する方程式は次式で与えられる。

$$u^{(0)} = -\frac{h^2 G_x}{12\mu} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x} + \frac{R\omega}{2} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$w^{(0)} = -\frac{h^2 G_z}{12\mu} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(hu^{(0)}) + \frac{\partial}{\partial z}(hw^{(0)}) + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

式(17)、(18)を式(19)に代入すると $p^{(0)}$ に関する圧力方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 G_x \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 G_z \frac{\partial p^{(0)}}{\partial z} \right) \\ = 6\mu R\omega \frac{\partial h}{\partial x} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

が得られる。

一方、慣性力に基づく成分を支配する方程式は以下のように与えられる。

$$u^{(1)} = -\frac{h^2 G_x}{12\mu} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} - \frac{h G_x}{12\mu} A \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$w^{(1)} = -\frac{h^2 G_z}{12\mu} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial z} - \frac{h G_z}{12\mu} B \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(hu^{(1)}) + \frac{\partial}{\partial z}(hw^{(1)}) = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで

$$\begin{aligned} A = & \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} \{ h(u^{(0)} + u^{(1)})^2 \} \right. \\ & + \rho \left[\frac{\partial}{\partial z} \{ h(u^{(0)} + u^{(1)})(w^{(0)} + w^{(1)}) \} \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial}{\partial t} \{ h(u^{(0)} + u^{(1)}) \} \right] \right] \\ B = & \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} \{ h(u^{(0)} + u^{(1)})(w^{(0)} + w^{(1)}) \} \right] \end{aligned}$$

$$+ \rho \left[\frac{\partial}{\partial z} \{h(w^{(0)} + w^{(1)})^2\} + \frac{\partial}{\partial t} \{h(w^{(0)} + w^{(1)})\} \right] \quad \dots\dots\dots (24)$$

式(21), (22)を式(23)に代入すると $p^{(1)}$ に関する圧力方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 G_x \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 G_z \frac{\partial p^{(1)}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} (h^2 G_x A) - \frac{\partial}{\partial z} (h^2 G_z B) \quad \dots\dots\dots (25)$$

が得られる。

一方, $p^{(0)}, p^{(1)}, u^{(1)}, w^{(1)}$ の境界条件は次のように与えられる。 $p^{(0)}$ に関する境界条件は, 式(11), (13), (18)より

$$p^{(0)}|_{z=+0} = p_{in} - (1 + \zeta) \rho \left(\frac{h^2 G_z}{12\mu} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=+0} \right)^2 / 2 \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$p^{(0)}|_{z=L} = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

で与えられる。 $p^{(1)}$ に関する境界条件は, 式(16)を式(11), (13)に代入し, さらに式(26), (27)を用いると

$$p^{(1)}|_{z=+0} = -(1 + \zeta) \rho [2w^{(0)}w^{(1)} + (w^{(1)})^2]_{z=+0} / 2 \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$p^{(1)}|_{z=L} = 0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

$u^{(1)}$ のシール流入端における境界条件は, 式(16)を式(14)に代入し, さらに式(17)を用いると

$$u^{(1)}|_{z=0} = (\alpha - 0.5) R \omega + \left[\frac{h^2 G_x}{12\mu} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x} \right]_{z=0} \quad \dots\dots\dots (30)$$

また $w^{(1)}$ のシール流入端における境界条件は式(22)より

$$w^{(1)}|_{z=+0} = \left[- \frac{h^2 G_z}{12\mu} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial z} - \frac{h G_z}{12\mu} B \right]_{z=+0} \quad \dots\dots\dots (31)$$

で与えられる。

3・3 計算方法 まず粘性力に基づく成分を計算し, 次にその結果を用いて慣性力に基づく成分を計算する。粘性項 $p^{(0)}$ は式(20)を境界条件式(26), (27)を用いて計算する。 $u^{(0)}, w^{(0)}$ は $p^{(0)}$ を式(17), (18)に代入することにより得られる。慣性項 $p^{(1)}, u^{(1)}, w^{(1)}$ は, 境界条件式(28)~(31)を用いて, 式(25), (21), (22)を連立して解くことにより算出される。各基礎方程式は差分法を用いて離散値化され, $p^{(0)}$ は逐次加速緩和法を用いて, また $p^{(1)}, u^{(1)}, w^{(1)}$ は Newton-Raphson 法を用いてそれぞれ繰返し計算により求めた。なお, シール流入端直後 ($z=+0$) の $p^{(0)}, p^{(1)}$ (または $w^{(1)}$) の値は逐次減速緩和法を用いて求めた。各変数の繰返し計算における収束判定基準値は 10^{-5} とした。

液膜圧力が求まれば液膜反力 f の偏心方向成分 f_x およびそれに直角方向成分 f_θ は次式で与えられる。

$$f_x = - \int_0^L \int_0^{2\pi} p R \cos \theta \, d\theta dz \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$f_\theta = \int_0^L \int_0^{2\pi} p R \sin \theta \, d\theta dz \quad \dots\dots\dots (33)$$

これより液膜反力の水平方向, 鉛直方向成分は

$$f_x = f_x \sin \phi - f_\theta \cos \phi$$

$$f_y = f_x \cos \phi + f_\theta \sin \phi \quad \dots\dots\dots (34)$$

となる。ここで, f_x, f_y の正の方向は, $-X, -Y$ 方向とする。また ϕ は偏心角であり, 静的平衡状態の場合には,

$$\phi_0 = \tan^{-1}(f_{\theta 0}/f_{x 0}) \quad \dots\dots\dots (35)$$

で与えられる。さらにシール中心を原点とした静的平衡状態におけるロータ中心の座標は, ϕ_0 を用いて

$$X_0 = e \sin \phi_0, Y_0 = e \cos \phi_0 \quad \dots\dots\dots (36)$$

で表される。

3・4 動特性係数の算出方法 静的平衡状態にある

ロータに, 微小変位 $\Delta X, \Delta Y$, 微小運動速度 $\Delta \dot{X}, \Delta \dot{Y}$, 微小加速度 $\Delta \ddot{X}, \Delta \ddot{Y}$ を与えたときに生じる液膜反力の X, Y 方向成分 f_x, f_y は, 12 個の動特性係数を用いて次式のように表すことができる。

$$f_x = f_{x0} + K_{xx} \Delta X + K_{xy} \Delta Y + C_{xx} \Delta \dot{X} + C_{xy} \Delta \dot{Y} + M_{xx} \Delta \ddot{X} + M_{xy} \Delta \ddot{Y}$$

$$f_y = f_{y0} + K_{yx} \Delta X + K_{yy} \Delta Y + C_{yx} \Delta \dot{X} + C_{yy} \Delta \dot{Y} + M_{yx} \Delta \ddot{X} + M_{yy} \Delta \ddot{Y} \quad \dots\dots\dots (37)$$

ここで K_{mn}, C_{mn}, M_{mn} ($m, n = X, Y$) はそれぞれ液膜のばね係数, 減衰係数, 付加質量係数である。各液膜係数を求めるために p を次式のように表す⁽¹⁶⁾。

$$p = p_0^{(0)} + p_X^{(0)} \Delta X + p_Y^{(0)} \Delta Y + p_X^{(0)} \Delta \dot{X} + p_Y^{(0)} \Delta \dot{Y} + p_X^{(1)} \Delta X + p_Y^{(1)} \Delta Y + p_X^{(1)} \Delta \dot{X} + p_Y^{(1)} \Delta \dot{Y} + p_X^{(1)} \Delta \ddot{X} + p_Y^{(1)} \Delta \ddot{Y} \quad \dots\dots\dots (38)$$

上式で下添字 0 は静的平衡状態の諸量を表す。また例えば $p_X^{(0)} \Delta X$ はロータに ΔX の微小変位を与えたときの粘性解 $p^{(0)}$ の変化量を表す。式(38)と(16)を比較すると次式が得られる。

$$p^{(0)} = p_0^{(0)} + p_X^{(0)} \Delta X + p_Y^{(0)} \Delta Y + p_X^{(0)} \Delta \dot{X} + p_Y^{(0)} \Delta \dot{Y}$$

$$p^{(1)} = p_0^{(1)} + p_X^{(1)} \Delta X + p_Y^{(1)} \Delta Y + p_X^{(1)} \Delta \dot{X} + p_Y^{(1)} \Delta \dot{Y} + p_X^{(1)} \Delta \ddot{X} + p_Y^{(1)} \Delta \ddot{Y} \quad \dots\dots\dots (39)$$

同様に, $u^{(0)}, u^{(1)}, w^{(0)}, w^{(1)}$ を次式で表す。

$$u^{(0)} = u_0^{(0)} + u_X^{(0)} \Delta X + u_Y^{(0)} \Delta Y + u_X^{(0)} \Delta \dot{X} + u_Y^{(0)} \Delta \dot{Y}$$

$$u^{(1)} = u_0^{(1)} + u_X^{(1)} \Delta X + u_Y^{(1)} \Delta Y + u_X^{(1)} \Delta \dot{X} + u_Y^{(1)} \Delta \dot{Y} + u_X^{(1)} \Delta \ddot{X} + u_Y^{(1)} \Delta \ddot{Y} \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$w^{(0)} = w_0^{(0)} + w_X^{(0)} \Delta X + w_Y^{(0)} \Delta Y + w_X^{(0)} \Delta \dot{X} + w_Y^{(0)} \Delta \dot{Y}$$

$$w^{(1)} = w_0^{(1)} + w_X^{(1)} \Delta X + w_Y^{(1)} \Delta Y + w_X^{(1)} \Delta \dot{X} + w_Y^{(1)} \Delta \dot{Y} + w_X^{(1)} \Delta \ddot{X} + w_Y^{(1)} \Delta \ddot{Y} \quad \dots\dots\dots (41)$$

また静的平衡状態にあるロータに $\Delta X, \Delta Y$ の微小変位を与えたときのすきま h は次式で表される。

$$h = h_0 + \Delta h = c + (X_0 + \Delta X) \sin \theta'$$

$$+(Y_0 + \Delta Y) \cos \theta' \dots\dots\dots (42)$$

ここで h_0 は

$$h_0 = c + x_0(1 + \cos \theta) = c + X_0 \sin \theta' + Y_0 \cos \theta' \dots\dots\dots (43)$$

であり, θ' は鉛直上方からロータの自転方向に測った角座標である(図1参照)。また式(42)より

$$\dot{h} = \Delta \dot{h} = \Delta \dot{X} \sin \theta' + \Delta \dot{Y} \cos \theta' \dots\dots\dots (44)$$

となる。

ここで, 具体例として, K_{xx}, K_{yx} を算出する場合の手順を示す。

① 式(39)~(41)において, すべての微小変動量を零とおく。式(42), (44)より

$$h = h_0 = c + x_0(1 + \cos \theta), \dot{h} = 0$$

となり, これらを基礎方程式に代入して, $p^{(0)} (= p_0^{(0)})$, $p^{(1)} (= p_0^{(1)})$, $u^{(0)} (= u_0^{(0)})$, $u^{(1)} (= u_0^{(1)})$, $w^{(0)} (= w_0^{(0)})$, $w^{(1)} (= w_0^{(1)})$ を計算する。得られた $p (= p_0^{(0)} + p_0^{(1)})$ を式(32), (33)に代入して f_{x0}, f_{y0} を求め, さらに式(34)~(36)を用いて, f_{x0}, f_{y0}, X_0, Y_0 を求める。

② 式(39)~(41)において, ΔX 以外の微小変動量を零とおく。式(42), (44)より

$$h = c + (X_0 + \Delta X) \sin \theta' + Y_0 \cos \theta', \\ \dot{h} = \Delta \dot{X} \sin \theta' = 0$$

となり, これらを基礎方程式に代入して, $p^{(0)} (= p_0^{(0)} + p_x^{(0)} \Delta X)$, $p^{(1)} (= p_0^{(1)} + p_x^{(1)} \Delta X)$, $u^{(0)} (= u_0^{(0)} + u_x^{(0)} \Delta X)$, $u^{(1)} (= u_0^{(1)} + u_x^{(1)} \Delta X)$, $w^{(0)} (= w_0^{(0)} + w_x^{(0)} \Delta X)$, $w^{(1)} (= w_0^{(1)} + w_x^{(1)} \Delta X)$ を計算する。

③ ΔX を与えたときの液膜反力 f_x, f_y を次式により算出する。

$$f_x = - \int_0^L \int_0^{2\pi} (p_0^{(0)} + p_x^{(0)} \Delta x + p_0^{(1)} + p_x^{(1)} \Delta x) \\ \times R \sin \theta' d\theta' dz \dots\dots\dots (45)$$

$$f_y = - \int_0^L \int_0^{2\pi} (p_0^{(0)} + p_x^{(0)} \Delta x + p_0^{(1)} + p_x^{(1)} \Delta x) \\ \times R \cos \theta' d\theta' dz \dots\dots\dots (46)$$

④ 式(37)より導出される式

$$K_{xx} = (f_x - f_{x0}) / \Delta X, K_{yx} = (f_y - f_{y0}) / \Delta X \\ \dots\dots\dots (47)$$

を用いて, K_{xx}, K_{yx} を算出する。

以下同様な手順で, 他の10個の動特性係数も求められる。なお本研究では微小変動量の大きさを次式のように与えた。

$$|\Delta X| = |\Delta Y| = 5 \times 10^{-3} \times c \\ |\Delta \dot{X}| = |\Delta \dot{Y}| = 5 \times 10^{-3} \times c\omega \\ |\Delta \ddot{X}| = |\Delta \ddot{Y}| = 5 \times 10^{-3} \times c\omega^2 \dots\dots\dots (48)$$

Table 1 Parameters in analysis

Seal diameter $D (=2R)$ mm	71.714
Mean radial clearance c mm	0.168
Clearance ratio c/R	4.7/1000
Seal Length L mm	60.0
Length-diameter ratio L/D	0.84
Fluid density ρ kg/m ³	998
Fluid viscosity μ mPa·s	0.931
Inlet pressure loss coefficient ζ	0.5

(a) Added-mass coefficients

(b) Damping coefficients

(c) Stiffness coefficients

Fig. 2 Comparison of present authors' result and other researchers' results for dynamic coefficients

4. 数値解析結果と考察

表1に本解析モデルの諸元を示す。これらの諸元は解析結果において図2以外はすべて共通である。なお、これらの計算条件のもとで得られた軸方向平均レイノルズ数 Re は2000~3000の範囲にあった。

図2に動特性係数と静的偏心率 κ_0 の関係について、本解析結果と bulk-flow 理論に基づく San Andres の数値解析結果⁽¹²⁾ ならびに Kanki らの実験結果⁽¹⁴⁾ との比較を示す。解析の対象は平行環状シール、諸元は $D=200$ mm, $c=0.5$ mm, $L=200$ mm, $p_d=0.98$

(a) Added-mass coefficients

(b) Damping coefficients

(c) Stiffness coefficients

Fig. 3 Dynamic coefficients versus eccentricity ratio for various inlet swirl velocities; $p_d=0.9$ MPa, $N=3000$ rpm

MPa, $N=2000$ rpm, $\rho=997$ kg/m³, $\mu=0.89$ mPa·s である。また $\zeta=0.0$, $\alpha=0.2$ とした。これより本解析結果は他の研究者の結果とおおむね一致しており、本解析は妥当であると考えられる。

図3は入口旋回流速度係数 α をパラメータとして動特性係数と κ_0 の関係を示している。いずれの係数も κ_0 が0.4より小さい範囲では κ_0 に対する変化は小さい。一方、入口旋回流速度はおもに連成ばね係数 (K_{XY} , K_{YX}) に影響を及ぼし、入口旋回流速度がロータ自転方向に大きくなるにつれて係数の絶対値が大きくなっている。これは入口旋回流速度とともにシールすきま内の周方向速度が増加し、接線方向流体力 f_θ が大きくなったことに起因している。

また図2, 3より、いずれの κ_0 に対しても、 $M_{XX} \approx M_{YY}$ より $M_{XX}=M_{YY}=M$, また $|M_{XY}|, |M_{YX}| \ll M_{XX}$, M_{YY} より $M_{XY}=M_{YX} \approx 0$ とみなすことができる。この関係を用いてふれまわり周波数比 WFR (Whirl-frequency ratio) を算出すると図4に示すごとくなる。 WFR は二つの同一形状のシールで両端をささえられた剛性ロータ(質量 $2m$) の安定限界におけるロータ自転速度 ω に対する角振動数 Ω_n の比を表し、次式で与えられる⁽⁴⁾。

$$WFR = \frac{\Omega_n}{\omega} = \sqrt{\frac{(K_{eq} - K_{XX})(K_{eq} - K_{YY}) - K_{XY}K_{YX}}{(C_{XX}C_{YY} - C_{XY}C_{YX})\omega^2}} \quad \dots\dots\dots (49)$$

ここで K_{eq} は等価ばね係数であり、

$$K_{eq} = (m + M)\Omega_n^2 = \frac{C_{XX}K_{YY} + C_{YY}K_{XX} - C_{XY}K_{YX} - C_{YX}K_{XY}}{C_{XX} + C_{YY}} \quad \dots\dots\dots (50)$$

で与えられる。 WFR はロータ系の安定性を示す指標の一つである。例えば Ω_n をロータの一次危険速度とみなすと ω が Ω_n の $1/WFR$ 倍に達したとき ($\omega = \omega_s$)

Fig. 4 Whirl-frequency ratio versus eccentricity ratio for various inlet swirl velocities; $p_d=0.9$ MPa, $N=3000$ rpm

$=\Omega_n/WFR$) ロータは不安定振動を生じる。したがって、 WFR の値が小さいほど ω_s が大きくなり、ロータ系の安定性が向上することになる。図4に示すように、 κ_0 一定のもとで入口旋回流速度が大きくなると WFR が大きくなり、ロータ系は不安定になる傾向を示す。これは連成ばね係数の絶対値が大きくなることに起因している。すなわち入口旋回流速度とともに接線方向流体力が大きくなり、ロータの自転方向へのふれまわり運動を促進するためであると考えられる。なお κ_0 が大きくなると、 $\alpha=0.05, 0.75$ の WFR は $\alpha=0.5$ の場合に近づき、入口旋回流速度が WFR に及ぼ

す影響は定量的に小さくなる。

図5は $\kappa_0=0$ における動特性係数とロータ自転速度 N の関係を示す。ここで、 $M_m=M_{xx}=M_{yy}$, $M_c=M_{xy}=-M_{yx}$, $C_m=C_{xx}=C_{yy}$, $C_c=-C_{xy}=C_{yx}$, $K_m=K_{xx}=K_{yy}$, $K_c=-K_{xy}=K_{yx}$ である。 N が増加すると、 K_c および C_c は増加し、 K_m は減少する傾向を示すが、他の係数は N によってはあまり変化していない。一方、入口旋回流速度はおもに K_c に影響を及ぼし、入口旋回流速度がロータの自転方向に大きくなるにつれて K_c は増加している。

図6は、図5と同じ条件下での、 WFR と N の関係を示す。この場合、式(49)、(50)を C_m, C_c, K_m, K_c を用いて変形すると、 WFR は

$$WFR = K_c / (C_m \omega) \quad (51)$$

で与えられる。 WFR は N によってはあまり変化していないが、図4の場合と同様に、入口旋回流速度が大きくなるにつれて WFR は増加し、ロータ系が不安定になる傾向を示している。これは K_c の増加によるものであり、接線方向流体力の増加がロータの自転方向へのふれまわり運動を促進するためである。なお N が大きくなると、 $\alpha=0.05, 0.75$ の WFR は $\alpha=0.5$ の場合に近づき、入口旋回流速度が WFR に及ぼす影響は定量的に小さくなる傾向を示している。

5. 結 論

本研究では平行環状シールの動特性に及ぼすシール入口旋回流速度の影響を理論的に解析した。その際、壁法則と混合距離仮説に基づき導出された乱流係数を適用したナビエ・ストークスの運動方程式、ならびに連続の式を基礎方程式として、シールすきま内を同心または偏心した状態で自転しているロータに外部より微小変動量を与えたときのすきま内の動的な流速分布および圧力分布を数値計算により求めた。計算結果よ

Fig. 5 Dynamic coefficients at a centered position versus rotor spinning velocity for various inlet swirl velocities; $\kappa_0=0$, $p_d=0.9$ MPa

Fig. 6 Whirl-frequency ratio versus rotor spinning velocity for various inlet swirl velocities; $\kappa_0=0$, $p_d=0.9$ MPa

り以下の点が明らかになった。

(1) ロータ中心の静的偏心率またはロータ自転速度がいずれの場合にも、入口旋回流速度はおもに連成ばね係数に影響を及ぼし、ロータ自転方向に入口旋回流速度が大きくなるにつれて連成ばね係数の絶対値は増加する。

(2) ロータ中心の静的偏心率またはロータ自転速度がいずれの場合にも、ロータ自転方向に入口旋回流速度が大きくなるにつれてふれまわり周波数比 (Whirl-frequency ratio) が増加し、ロータ系は不安定になりやすい。

最後に、本研究に対し、貴重な助言をいただいた神戸大学工学部教授岩壺卓三先生ならびに(株)荏原総合研究所江口真人氏に謝意を表する。

文 献

- (1) 金子寛・斎藤卓郎・小柳貴博・伊藤伸, 入口旋回流速度が平行環状シールの静特性に及ぼす影響(乱流係数を適用した平均化されたナビエ・ストークス方程式に基づく数値解析), 機論, **67**-656, C (2001), 1123-1130.
- (2) Childs, D. W., Dynamic Analysis of Turbulent Annular Plain Seals Based on Hir's Lubrication Equation, *ASME J. Lubrication Tech.*, **105**-3 (1983), 429-436.
- (3) Childs, D. W., Finite-Length Solutions for Rotordynamic Coefficients of Turbulent Annular Seals, *ASME J. Lubrication Tech.*, **105**-3 (1983), 437-444.
- (4) Childs, D. W., *Turbomachinery Rotordynamics*, (1993), 162, John Wiley & Sons, Inc.
- (5) 岩壺卓三・茨木隆次・梁保錫・川井良次, ポンプ用シールの動特性に関する研究(第5報, 入口旋回流を考慮した多段平行みぞ付シールの場合), 機論, **52**-474, C (1986), 456-464.
- (6) 岩壺卓三・盛本成・松本俊郎, ポンプ用平行環状シールの静および動特性の実験的研究(第1報, 静特性およびロータ回転速度による動特性への影響), 機論, **55**-510, C (1989), 310-316.
- (7) 岩壺卓三・盛本成・松本俊郎, ポンプ用平行環状シールの静および動特性の実験的研究(第2報, 同心ふれまわり時の動特性), 機論, **55**-510, C (1989), 317-322.
- (8) 兼森祐治・岩壺卓三, 長い平行環状シールの動的流体力に関する実験的研究(モーメントおよび並進力に及ぼすシール入口部の旋回流速度の影響), 機論, **56**-525, C (1990), 1273-1281.
- (9) 梁保錫・岩壺卓三・川井良次, ポンプ用シールの動特性に関する研究(第1報, 偏心時の環状シールの場合), **49**-445, C (1983), 1636-1642.
- (10) Nelson, C. C. and Nguyen, D. T., Analysis of Eccentric Annular Incompressible Seals: Part I—A New Solution Using Fast Fourier Transforms for Determining Hydrodynamic Force, *ASME J. Tribology*, **110**-2 (1988), 354-360.
- (11) Nelson, C. C. and Nguyen, D. T., Analysis of Eccentric Annular Incompressible Seals: Part II—Effects of Eccentricity on Rotordynamic Coefficients, *ASME J. Tribology*, **110**-2 (1988), 361-366.
- (12) San Andres L. A., Analysis of Variable Fluid Properties; Turbulent Annular Seals, *ASME J. Tribology*, **113**-4 (1991), 694-702.
- (13) Simon, F. and Frene, J., Analysis for Incompressible Flow in Annular Pressure Seals, *ASME J. Tribology*, **114**-3 (1992), 431-438.
- (14) Kanki, H. and Kawakami, T., Experimental Study on the Dynamic Characteristics of Pump Annular Seals, *IMEchE, paper*, C 297/84 (1984), 159-166.
- (15) 堀幸夫・ほか4名, 液膜シールの乱流潤滑理論, 潤滑, **30**-6 (1985), 430-437.
- (16) Reinhardt, E. and Lund, J. W., The Influence of Fluid Inertia on Dynamic Properties of Journal Bearings, *ASME J. Lubrication Tech.*, **97**-2 (1975), 159-167.