サンプル値 H_∞ 制御を用いた磁気軸受のロバストデジタル制御*平田 光男^{*1}, 亀井 正史^{*2}, 野波 健蔵^{*1}Robust Digital Control of a Magnetic Bearing System
Using Sampled-Data H_∞ ControlMitsuo HIRATA^{*3}, Masashi KAMEI and Kenzo NONAMI^{*3} Department of Electronics and Mechanical Engineering, Chiba University,
1-33 Yayoi-cho, Inage-ku, Chiba-shi, Chiba, 263-8522 Japan

In this paper, we apply the method of a sampled-data H_∞ control to the robust digital control of a magnetic bearing system. At first, we discuss the construction of the generalized plant which achieves the robust stability for the unmodeled dynamics and the nominal performance to the sensitivity function. By using this generalized plant, a digital controller is directly obtained by using the sampled-data H_∞ control theory so as to minimize L_2 induced norm from $w(t)$ to $z(t)$. The obtained performances of the sampled-data H_∞ controller are compared with that of the conventional type controllers by the experimental results, and the effectiveness of our proposed method is shown.

Key Words: Sampled-Data H_∞ Control, Active Magnetic Bearing System, Robust Control

1. は じ め に

半導体製造過程で使用する超真空ポンプや精密加工機器のモータなど, 超高速回転が要求されるシステムでは, 回転軸受の摩擦によるエネルギーの損失と, それによって発生する大量の熱が無視できないものとなっている。このような場合, 非接触支持が可能な磁気軸受が非常に有効である。磁気軸受は本質的に不安定な系であり, 制御系の良し悪しが軸受の性能を大きく左右する。そのため, PID など古典的な手法だけでなく, H_∞ 制御理論や μ 設計法などのロバスト制御理論の適用が試みられ, 性能の向上が図られてきた^(7, 8)。

H_∞ 制御器や μ 制御器は通常高次の連続時間補償器として求まる。しかし, 一般に高次補償器をアナログ回路で実現することは難しいため, 制御器を離散化してデジタル制御器として実装する場合がほとんどである。磁気軸受では多くの場合超高速回転を想定しているため, 広い周波数帯域にわたって連続時間補償器の良い近似となる離散時間補償器を求める必要がある。そのため, サンプル周期を非常に短くとらなければ

ならず, DSP などの非常に高価なデジタル制御装置が必要となる。

一方, サンプル点間の挙動を陽に考慮した H_∞ 制御法として, サンプル値 H_∞ 制御理論が近年精力的に研究されている。本手法では, 連続時間信号に対する仕様を満たす離散時間補償器が直接設計できるため, 離散化の際の近似誤差による制御性能の劣化が全くなく, 実装時の制御性能を設計の段階から保障できる。したがって, サンプル周期を長くとした場合でも, 比較的良好な性能を得ることができる。

そこで, 本研究ではより長いサンプル周期でのロバスト制御系の実現を目指し, サンプル値 H_∞ 制御法の適用を試みる。その際, 具体的な一般化プラントの構成方法について考察を行い, 出力端重み関数を用いた場合と入力端重み関数を用いた場合で, 得られる結果が大きく異なることを示し, 良好な結果を得るには後者の一般化プラントを用いる必要があることを述べる。そして, 浮上応答実験及び高速回転実験を通して, 連続時間 H_∞ 制御と双一次変換による手法, 及び, 零時ホールドで離散化した制御対象に対して離散時間 H_∞ 制御を適用した従来法との比較を行い, 本手法の有効性を示す。

2. 制 御 対 象

* 原稿受付 2000 年 4 月 19 日。

^{*1} 正員, 千葉大学工学部 (☎ 263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-33)。^{*2} 千葉大学大学院。

E-mail: hirata@meneth.tn.chiba-u.ac.jp

Fig. 1 Flexible rotor-magnetic bearing system

Fig. 2 Rotor, AMB and Eddy current sensors

本研究で取り扱う磁気軸受装置は図1に示す5軸制御型の磁気軸受である。ラジアル方向には、向かい合う2対の電磁石がフロント側とリア側に互いに直角になるように取り付けられている。本研究では、アキシアル方向に対しては、従来のPID制御を用いるため、ラジアル方向についてのみモデル化を行う。簡単のため、ラジアル方向の直角2方向の間に連成はないものと仮定し、一方向のみについて考える。これを図示したのが図2である。

図2において、 i_f, i_r [A] はフロント及びリア側の電磁石に流れる電流の定常電流 I_0 からの変化分を表し、これらが駆動電流となる。また、フロント及びリア側にはギャップセンサが取り付けられており、定常ギャップ長からの変位を電圧として検出することができる。これが観測出力となり、フロント及びリア側のセンサからの出力電圧値をそれぞれ y_f, y_r [V] で定義する。また、 x_f 及び x_r は各電磁石設置位置での浮上中心からの変位を表すものとする。

制御系設計のための数学モデルを導出するため、ローターを剛体棒と仮定して運動方程式を立てる。図3において、 G をローターの重心、 x [m] を重心の浮上中心位置からの並進距離、 θ [rad] を重心まわりの回転角を表すものとする、次式を得る。

$$M\ddot{x} = p_f + p_r \quad (1a)$$

$$I_r\ddot{\theta} = -\ell_1 p_f + \ell_2 p_r \quad (1b)$$

ここで、 p_f, p_r [N] はフロント及びリアに取り付けた電磁石の吸引力を表しており、(1) 吸引力はコイル電

Fig. 3 Radial direction model

Table 1 Specifications of the AMB system

Parameter	Value [Unit]
Total Length (L)	388.80 [mm]
Total Mass (M)	7844.57 [g]
Inertia of the rotor (I_r)	939158.19 [g·cm ²]
Distance to the AMB (ℓ_1, ℓ_2)	65.5, 100.5 [mm]
Distance to the sensor (L_1, L_2)	99.0, 120.0 [mm]
Sensor gain (g_s)	20000 [V/m]
Amplifier gain (g_{af}, g_{ar})	0.556, 0.700 [A/V]
Time constant (τ_f, τ_r)	0.644, 0.224 [ms]
Stiffness coefficient (k_f, k_r)	314, 293 [N/mm]
Force/current factor (g_f, g_r)	73.8, 41.2 [N/A]

流の2乗に比例し、ギャップ長の2乗に反比例する(2)速度に比例する逆起電力は発生しない(3)コイルのインダクタンスは周波数、ギャップ長によらず一定(4)ラジアル方向の直角2方向(x -方向、 y -方向)の間に連成はない、と仮定する。すると、浮上中心位置近傍では次式が成り立つ。

$$p_f := k_f \cdot x_f - g_f \cdot i_f \quad (2a)$$

$$p_r := k_r \cdot x_r - g_r \cdot i_r \quad (2b)$$

なお、 k_f, k_r [N/m] は電磁石が持つ負のバネ定数、 g_f, g_r [N/A] は電磁石の力定数に相当する。また、幾何学的関係から、電磁石の設置位置での浮上変位 x_f, x_r は

$$x_f = x - \ell_1 \theta, \quad x_r = x + \ell_2 \theta \quad (3)$$

また、センサ設置位置での変位はフロント側とリア側でそれぞれ $(x - L_1 \theta)$ 及び $(x - L_2 \theta)$ [m] となる。

以上から、駆動電流からセンサ出力電圧までの特性は以下の状態方程式で記述できる。

$$\dot{x} = A_r x + B_r u, \quad y = C_r x \quad (4)$$

ただし、

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_f + k_r}{M} & \frac{-k_f \ell_1 + k_r \ell_2}{M} & 0 & 0 \\ \frac{-\ell_1 k_f + \ell_2 k_r}{I_r} & \frac{\ell_1^2 k_f + \ell_2^2 k_r}{I_r} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{g_f}{M} & -\frac{g_r}{M} \\ \frac{\ell_1 g_f}{I_r} & -\frac{\ell_2 g_r}{I_r} \end{bmatrix}$$

$$C_r = \begin{bmatrix} g_s & -g_s L_1 & 0 & 0 \\ g_s & g_s L_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = [x \ \theta \ \dot{x} \ \dot{\theta}]^T$$

$$u = [i_f \ i_r]^T, \quad y = [y_f \ y_r]^T$$

また、伝達関数を

$$P_r(s) := C_r(sI - A_r)^{-1}B_r \quad (5)$$

で定義する。

さらに、実際の制御入力に電流帰還形アンプへの入力電圧 v_f, v_r [V] であり、電流帰還形アンプと磁気回路をあわせた特性を簡単のため 1 次遅れ系で近似し

$$\begin{bmatrix} i_f \\ i_r \end{bmatrix} = G_{amp} \begin{bmatrix} v_f \\ v_r \end{bmatrix} \quad (6)$$

ただし、

$$G_{amp}(s) = \text{diag} \left[\frac{g_{af}}{\tau_f s + 1}, \frac{g_{ar}}{\tau_r s + 1} \right] \quad (7)$$

とモデリングする事とした。

以上から、制御系設計に用いる数学モデル (ノミナルモデル) は、駆動アンプの特性を含めたものとして、

$$P(s) := P_r(s)G_{amp}(s) \quad (8)$$

とした。

ところで、 $P_r(s)$ を導出する際はローターは剛体であると仮定したが、実際には弾性モードを持つ。従って、両者のギャップを考慮しないで設計すると、スピルオーバーを引き起こし、制御系が不安定になる可能性がある。そこで、これらモデル化誤差を加法的誤差として設計時に考慮するため、ローターの両端をフリーフリー形と仮定し、27 分割 FEM 解析によりフルオーダーモデルを数値計算で求めた⁽⁸⁾。

3. サンプル値 H_∞ 制御問題

図 4 に示す連続時間信号と離散時間信号が混在したハイブリッドシステムを考える。図において S は

Fig. 4 Hybrid system

サンプリング、 $\mathcal{H}$ はホールドを表し、 $G(s)$ は一般化プラントである。また、 $w(t)$ 、 $z(t)$ 、 $u(t)$ 及び $y(t)$ はそれ

ぞれ外部入力、制御量、制御入力及び観測出力を表し、 $G(s)$ の状態空間表現は次式で与えられるとする。

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & O & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & O \end{array} \right] \quad (9)$$

以上のもと、サンプル値 H_∞ 制御問題では、 $w(t)$ から $z(t)$ までの H_∞ ノルムを最小化する制御器 $K[z]$ を求めることが目的となる。このとき、良く知られる連続時間 H_∞ 制御問題と大きく異なる点は、問題設定の中に初めからデジタル制御を仮定し、連続時間信号と離散時間信号が混在したハイブリッドシステムを取り扱う所にある。これにより、サンプル点上だけでなく、サンプル点間の挙動までも評価する事が可能となるため、サンプリング周期が長い時に、特に有効な手法として知られる⁽²⁾。

図 4 はサンプリング周期に依存した周期系で時変システムとなる。したがって、 $w(t)$ から $z(t)$ までの H_∞ ノルムを伝達関数を用いて定義することが難しい。そこで、 $w(t)$ と $z(t)$ の 2 ノルムの比から

$$J = \sup_{w(t) \in \mathcal{L}^2} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \quad (10)$$

として定義された値 J が良く用いられている。これは、 $\mathcal{L}^2$ 誘導ノルムと呼ばれ、連続時間システムにおける H_∞ ノルムの時間域での定義式と完全に一致する。

サンプル値 H_∞ 制御系では、 $w(t)$ から $z(t)$ までの H_∞ ノルムが有界となるために $D_{21} = 0$ でなければならない。これは、 $w(t)$ から $y(t)$ への直達項が零になる事に等価である事から、 $y(t)$ に厳密なプロバなフィルタを導入することで常に満たすことができる。通常、デジタル制御系では、エリアシングを抑えるため、 $y(t)$ にアンチエリアシングフィルタを導入するが、これを一般化プラントに陽に考慮して設計を行う事に対応する。

サンプル値 H_∞ 制御問題の解法は、一般化プラント $G(s)$ に対して、それと離散時間域で w から z までの H_∞ ノルムが等しくなる様な仮想的な離散時間一般化プラント $G[z]$ を求め、 $G[z]$ に対する離散時間 H_∞ 制御問題に帰着する手法が良く知られている^(1, 4, 5)。また、これらは $\mathcal{H}_{SYS}$ module などの市販の制御系 CAD に実装されているため、制御器の計算は比較的簡単に行うことができる⁽⁶⁾。

4. 制御系設計

連続時間 H_∞ 制御と同様、サンプル値 H_∞ 制御でも、設計に用いる一般化プラントの選択が性能の良し悪しを決定するが、基本的な考え方は連続時間 H_∞ 制

Fig. 5 Generalized plant I

Fig. 6 Generalized plant II

御問題と同じである。そこで、本研究では図5及び図6の2つの一般化プラントを構成した。図5は連続時間 H_∞ 制御で良く用いられる通常の混合感度問題の一般化プラントである。 W_S で感度関数に対する制御性能, W_T で加法的誤差に対するロバスト安定性の仕様を与える。なお, F_a はアンチリアシングフィルタであり, 3章で述べた様に $D_{21} = 0$ を満たすために導入した。

一方, 図6は, 重み関数を外部入力側に付加したもので, 図5と同様に, W_S で感度関数に対する制御性能, W_T で加法的誤差に対するロバスト安定性の仕様を与える。特に, 連続時間制御器によって $u = K(s)y$ なる制御を行う場合, P が SISO 系 ならば 図5と図6は全く等価な問題となる。

重み関数は連続時間 H_∞ 制御での結果が良好となるよう, 次のように選んだ。ただし, W_T は図7に示すようにノミナルモデル $P(s)$ と FEM 解析から求めたフルオーダーモデルを用いて求めた加法的誤差を覆うように決めている。各重みの伝達関数は

$$W_S(s) = \text{diag} \left[\frac{s+4000}{s+0.1}, \frac{s+4000}{s+0.1} \right] \times 0.033$$

$$W_T(s) = \text{diag} \left[\frac{s+1000}{s+30000}, \frac{s+1000}{s+30000} \right] \times 0.22$$

となっている。また, アンチリアシングフィルタ F_a はサンプル周期 τ で帯域を制限する形で

$$F_a(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (11)$$

と選んだ。

以上の準備の下, 一般化プラント I (以後 GP-I) 及び一般化プラント II (以後 GP-II) に対し, サンプリング周波数 $f_s = 1/\tau$ を 1.5KHz ~ 10KHz まで変化させながら, 各 f_s について, J を最小にする離散時間補償器 $K[z]$ をサンプル値 H_∞ 制御問題を解いて求めた。結果を表2に示す。また, 比較のため, 同じ重み関数

Fig. 7 Weighting functions and the additive error

Table 2 τ vs J

f_s [KHz]		1.5	2	4	8	10
CB	GP-I,II	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
SD	GP-I	290	228	113	48	15
	GP-II	0.98	0.88	0.69	0.63	0.62

CB: Continuous-Time based design

SD: Sampled-Data design

を用いて, GP-I, GP-II に対して連続時間 H_∞ 制御を適用した場合の H_∞ ノルムの値もあわせて示した。ただし, 連続時間 H_∞ 制御器を求める場合は, D_{21} が行フルランクとなり問題が可解となるよう $F_a = 1$ としている⁽⁹⁾。

サンプル値 H_∞ による結果を見ると, 入力端に重み関数を導入した GP-II では, τ が小さくなるに従って連続時間 H_∞ 制御で求まる H_∞ ノルムの値に近づくが, GP-I では, τ の値を十分小さくとっても, J の値と連続時間 H_∞ 制御問題で求まる H_∞ ノルムとのギャップが大きいことがわかる。一般に, サンプル周期 τ を短くとるに従い, サンプル値制御での振る舞いが連続時間制御での振る舞いにしだいに近づくという直感を持つのが自然であるが, GP-I の結果は必ずしもその様になっていない。

文献(3)ではサンプル値 H_∞ 制御系設計におけるサーボ系設計問題について考察しており, W_S を $1/s$ に選んだ場合, 入力端重みを用いた場合に可解である問題が, 出力端重みでは可解とならない事を理論的に証明している。サーボ系設計を想定し, W_S を $1/s$ に選ぶとこのように違いが明確に現れるが, 本論文の様に重みを安定なものに選んだ場合でも, 表2に示すよう, J の値に明らかな違いが現れることがわかった。

GP-I では, $\mathcal{L}^2$ に属すすべての信号を外乱として直接加えて評価しているが, GP-II では, 外部入力 w_1, w_2 を W_S, W_T によりフィルタリングし, 実外乱に近いスペクトルを持つ信号を外乱として加え, z で評価しており, この点で GP-II の方がより現実の制御系を反映しているとも言える。以上のことから, 本研究

(a) Time response of y_f

(b) Control input u_f

Fig. 8 Step and impulse response ($f_s = 8\text{kHz}$)

(a) Time response of y_f

(b) Control input u_f

Fig. 9 Step and impulse response ($f_s = 4\text{kHz}$)

では GP-II の一般化プラントを採用することにした。

5. 実験

本研究では十分短いサンプリング周期から比較的長いサンプリング周期までを実現できるよう、制御演算装置として DSP (TMS320C40) を用いた。フロント及びリア側に取りつけられた 8 個のギャップセンサで検出された浮上位置は 4ch の A/D 変換器を通して DSP へ取り込まれ、そこで制御入力計算される。そして、D/A 変換器によりアナログ信号へ変換され、電流帰還型アンプを経て、バイアス電流とともに回転軸の半径方向の運動を制御する 8 つの電磁石に加えられる。なお、アキシャル方向は本磁気軸受装置に搭載されている PID 制御を用いる。

まず、ステップ応答及び外乱応答により、浮上応答時の性能評価を行う。比較のため、GP-II に対して求めたサンプル値 H_∞ 制御器の他、GP-I を用いた従来のロバスト制御系設計法として以下の二つの離散時間制御器を求めた。

1. 連続時間 H_∞ 補償器を各サンプリング周期に対し双一次変換により離散化した制御器 (K_{cb})。

2. GP-I を零時ホールドにより離散化した後に、離散時間 H_∞ 制御理論を適用して求めた制御器 (K_d)。

なお、 K_{cb} 、 K_d を求める際に用いた重み関数は、得られる性能が最も良くなるよう、サンプル値 H_∞ 制御器を求める際に用いた重み関数を元に、さらに調整

(a) Time response of y_f

(b) Control input u_f

Fig. 10 Step and impulse response ($f_s = 2\text{kHz}$)

した。

これらの補償器を用い、浮上中心から $t = 0[s]$ で 0.05mm 浮上させ、 $t = 0.05[s]$ で入力電圧に疑似インパルス外乱を加えてその時の時刻歴応答を調べた。まず、連続時間に基づく設計でも良好な結果が得られる

サンプリング周波数 8kHz での結果を図 8 に示す。いずれの設計法でも良好な浮上特性が得られていることから、 $f_s = 8[\text{kHz}]$ は本制御系にとって十分なサンプリング周波数であることがわかる。

次に、従来の半分のサンプリング周波数である 4kHz での結果を図 9 に示す。離散時間 H_∞ 制御では、安定性は保たれているものの、出力応答や制御入力に振動が見られ、制御性能の劣化が確認できる。一方、サンプル値 H_∞ 制御では、インパルス外乱が加わったときの動きが多少大きくなっているものの、制御性能の劣化は最小限に押さえられていることがわかる。なお、 K_{cb} を用いた場合、制御系が不安定となったため、実験を行うことができなかった。さらに、従来の 1/4 である、 $f_s = 2[\text{kHz}]$ に対する設計を行った。その結果、 K_{cb} 及び K_d を用いた場合では、制御系が不安定となり、実験を行うことができなかった。一方、サンプル値 H_∞ 制御では、浮上実験に成功し、図 10 に示す結果を得ることができた。応答波形に明らかな劣化が見られるものの、安定性は保たれ、図 9 の K_d による応答に近い結果を得ることができた。

次に、サンプリング周波数 8kHz、4kHz について、毎分 3 万回転での高速回転実験を行い、フロント及びリア側のリサージュ図形を記録した。サンプリング周波数 8kHz では設計法の違いによる性能差はほとんど見られなかったため、紙面の都合上従来法の結果は割愛し、サンプル値 H_∞ 制御による結果のみを図 11(a) に示す事とした。さらに、サンプリング周波数 4kHz の場合の実験を行ったが、 K_{cb} 及び K_d を用いた場合では、毎分 3 万回転へ達する前に危険な状態となったため、実験を途中で中止した。一方、サンプル値 H_∞ 制御器を用いた場合では、毎分 3 万回転での非接触支持に成功する事ができた。その時のリサージュ図形を図 11(b) に示す。サンプリング周波数 8kHz での結果と遜色ない特性を得ることができた。

6. 結 言

本研究では 5 軸制御型磁気軸受に対し、サンプル値 H_∞ 制御法を適用し、従来に比べより長いサンプル周期での制御を試みた。まず、設計に用いる一般化プラントの構成法について論じ、入力端重みを用いた場合と出力端重みを用いた場合とでは結果が大きく異なることを指摘した。そして、 w から z までの L^2 誘導ノルムを最小化するには後者の一般化プラントを用いると良いことを述べた。その後、ステップ応答及び外乱応答の実験を行い、サンプル値 H_∞ 制御の方がより長いサンプル周期に対し良好な結果が得られるこ

(a) Sampled-data H_∞ control ($f_s=8\text{kHz}$)

(b) Sampled-data H_∞ control ($f_s=4\text{kHz}$)

Fig. 11 High speed rotation tests (30000rpm)

とを示した。また、連続時間 H_∞ 制御器を双一次変換で離散化した場合では不可能な、サンプリング周波数 4kHz での高速回転実験に成功することができた。本手法を用いることにより、制御性能を低下させることなくサンプル周期を長くとることができるため、制御装置のコストダウンに大きく貢献できる。

文 献

- (1) B.A. Bamieh and J.B. Pearson. A General Framework for Linear Periodic Systems with Application to H_∞ Sampled-Data Control. *IEEE Trans. on A.C.*, 37-4 (1992), 418-435.
- (2) T. Chen and B. Francis. *Optimal Sampled-Data Control Systems* (1995), Springer Verlag.
- (3) Shinji Hara and Hisaya Fujioka. Synthesis of Digital Servo Controller Based on Sampled-Data H_∞ Control. In *22nd SICE Symposium on Control Theory* (1993), 21-24.
- (4) Y. Hayakawa, S. Hara, and Y. Yamamoto. H_∞ Type Problem for Sampled-Data Control System — A Solution via Minimum Energy Characterization —. *IEEE Trans. on A.C.*, 39-11 (1994), 2278-2284.
- (5) P.T. Kabamba and S. Hara. Worst-Case Analysis and Design of Sampled-Data Control Systems. *IEEE Trans. on A.C.*, 38-9 (1993), 1337-1357.
- (6) S. Hara, Y. Yamamoto, and A. Takeda. *H_{sys} Module Manual*. Sumisho Electronics, Col., Ltd. (1995)
- (7) 王晶文・野波健蔵・三平満司・美多勉. H_∞ 制御によるフレキシブルロータの制振制御. 機論 57-533, C (1991), 156-202.
- (8) 野波健蔵・井手訓之・上山拓知. ディスクリプタ μ 設計法に基づく磁気軸受系のロバスト制御. 機論, 63-606 (1997), 137-143.
- (9) 野波健蔵・西村秀和・平田光男. MATLAB による制御系設計 (1998), 東京電機大学出版.