強 制 摩 擦 振 動*

(第1報, 直線と双曲線の合成摩擦力速度特性における平均法の解と安定性)

高野 英 資^{*1}, 川口 英 伸^{*2}
張 祥 永^{*3}, 佐伯 暢 人^{*4}Self-excited and Forced Oscillations with Solid Friction
(1st Report, Solutions and Stabilities by Averaging Method in Case of
Combined Friction-Velocity Characteristics of Linear and Hyperbolic Curves)Eisuke TAKANO^{*5}, Hidenobu KAWAGUTI,
Xiang Yong ZHANG and Masato SAEKI^{*5} Department of Manufacturing Systems Engineering, Niigata College of Technology,
5-13-7 Kamishin'ei-cho, Niigata-shi, Niigata, 950-2076 Japan

In the present paper, the frictional oscillations in a mechanical driving system are studied theoretically on the self-excited and forced oscillations, when the friction-velocity characteristic curves are given as the combined curves of linear and hyperbolic functions and maximum static friction force is not an isolated point. Bodies acted upon by sinusoidal external force while sliding along a surface at a fixed velocity exhibit regular oscillations. We have analyzed these motions using an averaging method, without distinguishing between slipping and sticking. We have also examined the amplitude characteristic of motions found in the obtainable first approximations of the form of harmonic vibrations. Finally, we made a detailed investigation of the stability of these first approximations. Also, we have assembled the results of a comparison of the precise solutions for motions over a wide range of velocities where the kinetic velocity of the body exceeding the surface motion velocity, and we propose a usable theoretical analysis method, aimed at understanding the important aspects of regular harmonic solutions.

Key Words: Vibration, Frictional Vibration, Nonlinear Vibration, Forced Vibration, Mechanical Driving System, Self-excited Oscillation, Limit Cycle, Sliding Surface, Averaging Method, Piecewise Linear System, Sliding Friction

1. 緒 言

移動する面上を滑り運動する物体の強制自励系の摩擦振動についてはいくつかの報告をみることができ(1)~(6). 運動摩擦力速度特性曲線が性質の異なる二つの部分からなるため, 付着と滑りの両運動を繰返す運動の場合には, 運動の移行点において解のつなぎ合せという困難な問題を生ずる.

本報告は最大静止摩擦力が孤立点でないとき, 運動摩擦力が一つの不連続点をもち, 直線と双曲線を合成した相対速度の関数として与えられる場合に, ばね力, 摩擦力のほかに, 正弦波状強制外力を受けながら一定速度で走行する移動面上を滑り運動する物体の運動について扱っている. 本報では付着と滑りの両運動を区別しない平均法を用いて解析し, 得られる定常振動解の諸特性について検討した. 平均法は解析法としては

本問題に適用することは困難とされている. しかし, 平均法の解を付着運動を考慮した精度の高い断片線形近似解と比較した結果, 平均法がこれらの正確解の予測と安定性の判別にかかなり有効な方法であることは, 運動摩擦力速度特性曲線が1本の直線(1)~(3)および三次関数(4)~(6)で与えられる場合についてすでに指摘されている. 本報でも先ず平均法から得られる調和振動形の第一近似解について述べる.

なお, 運動摩擦力が合成関数の場合を取上げたのは, 三次関数の場合と同様に, 普通実験により得られる摩擦力速度特性曲線が境界潤滑や完全潤滑領域で特徴的变化を示すストライベック曲線に類似した曲線として得られる場合がかなりあり(7), 本解析はより現実に近いところでの理論解析となることが理由の一つに上げられる. 理由の二つめは, 本論文において取扱っている系において強制外力を受けて運動する移動面上の物体が一定速度で走行する移動面の速度を越えない範囲で滑り運動する場合でも, 直線摩擦特性では線形振動になってしまうのに対し, 合成関数の場合には非線形振動となる場合を考慮することができるなどと考えたからである. また, 本論文では運動摩擦力速度特性曲線が上に凹形となる曲線の一例として合成関数を採り上げたが, 強制外力が働かない自由自励系において

* 原稿受付 2000年8月8日.

^{*1} 正員, 新潟工業短期大学生産システム工学科(〒950-2076 新潟市上新栄町5-13-7).^{*2} 正員, SANWA TRADING & CO(〒135-0015 東京都江東区千石1-11-12).^{*3} 正員, 北京理工大学機電一体化中心(中華人民共和国北京市海淀区白石橋路7).^{*4} 正員, 新潟工科大学機械制御システム工学科(〒945-1195 柏崎市藤橋1719).

E-mail: etakano@po.niigata-ct.ac.jp

発生する摩擦振動が、すでに示されている三次関数の場合⁽⁸⁾⁽⁹⁾とかなり異なる変位振幅移動面速度曲線を与える摩擦特性を有する系となることなどを考慮して、その違いについても述べる。

2. 運動摩擦力速度特性と運動方程式

図1は本研究に使用した運動系のモデル図で、一自由度系の質量ばね系を示す。 m は質量、 k は線形ばね定数、 h は粘性減衰定数、 v_0 は移動面速度で一定である。物体には他に正弦波状強制外力の $e \sin \omega t$ が働き、移動面との接触部で後述する図2の非線形摩擦力 $\varphi(\dot{s})$ が作用する。 φ_k は物体と移動面との相対速度 $\dot{s}$ を零に近づけたときの運動摩擦力で、本報では最大静止摩擦力 φ_s と等しいと仮定している。 V は運動摩擦力が最小値 φ_m を示す相対速度で $\varphi(V) \geq 0$ である。また、 A_1 は $\dot{s}=0$ における接線の傾き、 a は $\dot{s} \rightarrow \infty$ のときの漸近線の傾きを示す。 t 時間後の物体の位置を ξ で表すと、運動方程式と関数 $\varphi(\dot{s})$ は次のように示される。

$$m\ddot{\xi} + h\dot{\xi} + \varphi(\dot{\xi} - v_0) + k\xi = e \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\varphi(\dot{s}) = a\dot{s} + b(\dot{s}/|\dot{s}|) + d/(\dot{s} + c\dot{s}/|\dot{s}|) \quad \dots\dots\dots (2)$$

式(2)中の a, b, c, d は定数であり、これらの間には φ_k, A_1, c を用いると次式の関係がある。ただし、 c は直線と双曲線の合成曲線を定めるに当たり双曲線に与えた平行移動量である。

$$\left. \begin{aligned} a &= -A_1 c^2 / V(V+2c), \\ b &= \varphi_k - d/c, \quad d = a(V+c)^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $\tau = t\sqrt{k/m}$ 、 $\eta = \xi\sqrt{k/m}/V$ とおいて変数変換

Fig. 1 Model of a kinetic system with one degree of freedom

Fig. 2 The kinetic friction-velocity characteristic curves

を行うと(1)、(2)両式は次式のように書ける。

$$\eta'' + 2H\eta' + F(\eta' - Y_0/Y) + \eta = E \sin \Omega\tau \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$F(s') = As' + B(s'/|s'|) + D/(s' + Cs'/|s'|) \quad \dots\dots\dots (5)$$

また式(5)中の A, B, D は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} A &= -2B_1C^2/(1+2C) \\ B &= X_d/2Y - D/C \\ D &= A(1+C)^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

したがって $X_d/2Y, B_1, C$ を与えると、速度特性を決定することができる。ここで、 $s' = \eta' - Y_0/Y$ であり、記号の後ににつづく上添字'は τ による微分を示す。なお、式中の各変数は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} X_d &= 2\varphi_k/k & X_m &= 2\varphi_m/k \\ Y &= V\sqrt{m/k} & B_1 &= A_1/2\sqrt{m/k} \\ H &= h/2\sqrt{m/k} & Y_0 &= v_0\sqrt{m/k} \\ E &= e/V\sqrt{m/k} & \Omega &= \omega\sqrt{m/k} \\ A &= a/\sqrt{m/k} & B &= b/V\sqrt{m/k} \\ C &= c/V & D &= d/V^2\sqrt{m/k} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

また、 $\varphi(V) \geq 0$ は次式のように表される。

$$F(1) = X_d/2Y - A/C \geq 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

3. 平均方程式と第1近似解

3.1 平均方程式 次に系のもつ非線形性が小さいとして運動方程式(4)の解を Kryloff-Bogoliuboff の平均法を用いて求めてみよう。 τ の未知関数 α, A, ε を用い、調和振動形の解を次式のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \alpha + A \sin(\Omega\tau + \varepsilon) \\ \zeta &= \eta' = A\Omega \cos(\Omega\tau + \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで関数 $\alpha, A, \varepsilon, \alpha', A', \varepsilon'$ は時間 τ に関してゆるやかに変化するものとし、 $R = A\Omega$ とおいて平均方程式を求めると、図3および式(14)に示すような[I]~[II-4]の五つの変域に対応して式(10)~(13)が得られる。

$$R' = -HR - R \left\{ \frac{A}{2} + \frac{D}{R^2}(1 - S_2/Q_2) \right\} - \frac{E}{2} \sin \varepsilon \quad \text{[I]}$$

$$R' = -HR - R \left[\frac{A}{2} + \frac{D+2BP_0/\pi}{R^2} - \frac{D}{\pi R^2} \times \left\{ \frac{S_1}{P_1} \log |\lambda_1| - \frac{S_2}{P_2} \log |\lambda_2| \right\} \right] - \frac{E}{2} \sin \varepsilon \quad \text{[II-1]}$$

$$R' = -HR - R \left[\frac{A}{2} + \frac{D+2BP_0/\pi}{R^2} - \frac{D}{\pi R^2} \times \left\{ \frac{S_1}{P_1} \log |\lambda_1| + \frac{S_2}{Q_2} (\pi - 2 \tan^{-1} \mu_2) \right\} \right] - \frac{E}{2} \sin \varepsilon \quad \text{[II-2] and [II-3]}$$

$$R' = -HR - R \left[\frac{A}{2} + \frac{D+2BP_0/\pi}{R^2} - \frac{D}{\pi R^2} \right] \times \left\{ \frac{S_1}{Q_1} 2 \tan^{-1} \mu_1 + \frac{S_2}{Q_2} (\pi - 2 \tan^{-1} \mu_2) \right\} - \frac{E}{2} \sin \varepsilon \quad [\text{II-4}] \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$R\varepsilon' = R \frac{1-\Omega^2}{2\Omega} - \frac{E}{2} \cos \varepsilon \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\alpha' = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= A \left(\frac{Y_0}{Y} \right) + B + \frac{D}{Q_2} \quad [\text{I}] \\ \alpha &= A \left(\frac{Y_0}{Y} \right) + B \left[1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{Y_0/Y}{R} \right) + \frac{D}{\pi} \left(\frac{1}{P_1} \log |\lambda_1| - \frac{1}{P_2} \log |\lambda_2| \right) \right] \quad [\text{II-1}] \\ \alpha &= A \left(\frac{Y_0}{Y} \right) + B \left[1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{Y_0/Y}{R} \right) + \frac{D}{\pi} \left\{ \frac{1}{P_1} \log |\lambda_1| + \frac{1}{Q_2} (\pi - 2 \tan^{-1} \mu_2) \right\} \right] \quad [\text{II-2}] \text{ and } [\text{II-3}] \\ \alpha &= A \left(\frac{Y_0}{Y} \right) + B \left[1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{Y_0/Y}{R} \right) + \frac{D}{\pi} \left\{ \frac{1}{Q_1} 2 \tan^{-1} \mu_1 + \frac{1}{Q_2} (\pi - 2 \tan^{-1} \mu_2) \right\} \right] \quad [\text{II-4}] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} [\text{I}] \quad & 0 \leq R \leq Y_0/Y \\ [\text{II-1}] \quad & 0 < Y_0/Y \text{ and } Y_0/Y + C < R \\ [\text{II-2}] \quad & C/2 < Y_0/Y \text{ and } Y_0/Y < R < Y_0/Y + C \\ [\text{II-3}] \quad & 0 < Y_0/Y < C/2 \text{ and } -Y_0/Y + C < R < Y_0/Y + C \\ [\text{II-4}] \quad & 0 < Y_0/Y < C/2 \text{ and } Y_0/Y < R < -Y_0/Y + C \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし、式(10)～(13)中には計算の都合上定義した次式(15)の変数が用いられている。

Fig. 3 Domain of R - Y_0/Y plane applied for each averaging equation

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= Y_0/Y - C, S_2 = Y_0/Y + C, \\ P_0 &= \sqrt{R^2 - (Y_0/Y)^2}, \\ P_1 &= \sqrt{R^2 - S_1^2}, P_2 = \sqrt{R^2 - S_2^2}, \\ Q_1 &= \sqrt{S_1^2 - R^2}, Q_2 = \sqrt{S_2^2 - R^2}, \\ W &= \sqrt{(R - Y_0/Y)/(R + Y_0/Y)}, \\ \mu_i &= Q_i W / (S_i - R), \\ \lambda_i &= (P_i W - R + S_i) / (P_i W + R - S_i) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

3・2 関数 $z(x)$ の定義とその性質並びに第1近似

解 式(10), (11)の左辺を同時に零とすると定常解が定まる。この場合の R, ε の値は $R - \varepsilon$ 位相面上の特異点 (R_0, ε_0) を与える。 R_0 を式(13), (15)に代入して得られる α の値を α_0 とし、 $A_0 = R_0/\Omega$ とおくと式(4)の第1近似解は次式(16)で与えられる。

$$\eta = \alpha_0 + A_0 \sin(\Omega \tau + \varepsilon_0) \quad \dots\dots\dots (16)$$

次に $x = R_0^2$, $y_0 = (Y_0/Y)^2$, $p = \{(1 - \Omega^2)/2\Omega\}^2$, $e_0 = (E/2)^2$ とおいて第1近似解の振幅 A_0 , したがって $x = R_0^2$ を定める式を $H=0$ の場合について求めてみよう。 R', ε' を零とする式から

$$\left. \begin{aligned} e_0 &= x \left[p + \left\{ \frac{A}{2} + D \frac{1 - S_2/Q_2}{x} \right\}^2 \right] \quad [\text{I}] \\ e_0 &= x \left[p + \left\{ \frac{A}{2} + \frac{D+2BP_0/\pi}{x} - \frac{D}{\pi x} \times \left(\frac{S_1}{P_1} \log |\lambda_1| - \frac{S_2}{P_2} \log |\lambda_2| \right) \right\}^2 \right] \quad [\text{II-1}] \\ e_0 &= x \left[p + \left\{ \frac{A}{2} + \frac{D+2BP_0/\pi}{x} - \frac{D}{\pi x} \times \left(\frac{S_1}{P_1} \log |\lambda_1| + \frac{S_2}{Q_2} (\pi - 2 \tan^{-1} \mu_2) \right) \right\}^2 \right] \quad [\text{II-2}] \text{ and } [\text{II-3}] \\ e_0 &= x \left[p + \left\{ \frac{A}{2} + \frac{D+2BP_0/\pi}{x} - \frac{D}{\pi x} \times \left(\frac{S_1}{Q_1} 2 \tan^{-1} \mu_1 + \frac{S_2}{Q_2} (\pi - 2 \tan^{-1} \mu_2) \right) \right\}^2 \right] \quad [\text{II-4}] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

が得られる。ここで、 x の関数である式(17)の右辺を $z(x)$ とおく。このとき $z(x) = e_0$ となる根 x が振幅

Fig. 4 $z(x)$ curves

R_0 を与える。図4は $z(x)$ 曲線の様子を图示したもので、左から順に y_0 が大きくなる場合の例である。図4と次式(18)の $dz(x)/dx=0$ となる境界曲線(図5)の分布状況を考慮すれば、物体が移動面速度を越えない範囲($0 < x \leq y_0$)で $z(x)$ 曲線が極大値1と極小値2を有する図4(c)、(d)の場合や移動面速度を越える範囲($x > y_0$)で極大値5と極小値6を有する図4(a)の場合などがあることがわかる。 $x=y_0$ における $z(x)$ 曲線の接点3は極小点6よりかなり小さいところで生ずる。

$$\frac{dZ(x)}{dx} = p + U_1 \left\{ U_1 + \frac{D}{x} \left(\frac{2S_2}{Q_2} - \frac{S_2}{Q_2^2} x - 2 \right) \right\} \quad [\text{I}]$$

$$\begin{aligned} \frac{dZ(x)}{dx} = p + U_2 & \left[U_2 + \frac{2}{x} \left(L \right. \right. \\ & + \frac{D}{\pi} \left\{ \frac{S_1}{P_1} \log |\lambda_1| \left(1 + \frac{x}{2P_1^2} \right) - \frac{S_2}{P_2} \log |\lambda_2| \right. \\ & \left. \left. \times \left(1 + \frac{x}{2P_2^2} \right) - x \left(\frac{S_1 F_1}{P_1 \lambda_1} - \frac{S_2 F_2}{P_2 \lambda_2} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad [\text{II-1}]$$

$$\begin{aligned} \frac{dZ(x)}{dx} = p + U_3 & \left[U_3 + \frac{2}{x} \left(L \right. \right. \\ & + \frac{D}{\pi} \left\{ \frac{S_1}{P_1} \log |\lambda_1| \left(1 + \frac{x}{2P_1^2} \right) \right. \\ & - \frac{S_2}{Q_2} (\pi - 2 \tan^{-1} \mu_2) \left(1 - \frac{x}{2Q_2^2} \right) \\ & \left. \left. - x \left(\frac{S_1 F_1}{P_1 \lambda_1} - \frac{S_2}{Q_2} \frac{2G_2}{1 + \mu_2^2} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad [\text{II-2}] \text{ and } [\text{II-3}]$$

$$\begin{aligned} \frac{dZ(x)}{dx} = p + U_4 & \left[U_4 + \frac{2}{x} \left(L \right. \right. \\ & + \frac{D}{\pi} \left\{ \frac{S_1}{Q_1} 2 \tan^{-1} \mu_1 \left(1 - \frac{x}{2Q_1^2} \right) \right. \\ & - \frac{S_2}{Q_2} (\pi - 2 \tan^{-1} \mu_2) \left(1 - \frac{x}{2Q_2^2} \right) \\ & \left. \left. - x \left(\frac{S_1}{Q_1} \frac{2G_1}{1 + \mu_1^2} - \frac{S_2}{Q_2} \frac{2G_2}{1 + \mu_2^2} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad [\text{II-4}]$$

.....(18)

Fig. 5 Boundary curves giving extremes

ここで、 $U_i (i=1 \sim 4)$, L , $F_i (i=1, 2)$, $G_i (i=1, 2)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{A}{2} + D \frac{1 - S_2/Q_2}{x} \\ U_2 &= \frac{A}{2} + \frac{D + 2BP_0/\pi}{x} - \frac{D}{\pi x} \left\{ \frac{S_1}{P_1} \log |\lambda_1| \right. \\ & \quad \left. - \frac{S_2}{P_2} \log |\lambda_2| \right\} \\ U_3 &= \frac{A}{2} + \frac{D + 2BP_0/\pi}{x} - \frac{D}{\pi x} \left\{ \frac{S_1}{P_1} \log |\lambda_1| \right. \\ & \quad \left. + \frac{S_2}{Q_2} (\pi - 2 \tan^{-1} \mu_2) \right\} \\ U_4 &= \frac{A}{2} + \frac{D + 2BP_0/\pi}{x} - \frac{D}{\pi x} \left\{ \frac{S_1}{Q_1} 2 \tan^{-1} \mu_1 \right. \\ & \quad \left. + \frac{S_2}{Q_2} (\pi - 2 \tan^{-1} \mu_2) \right\} \\ L &= \frac{2B}{\pi} \left(\frac{x}{2P_0} - P_0 \right) - D \\ F_1 &= \frac{1}{W(P_1 W + \sqrt{x} - S_1)^2} \\ & \quad \times \left[(\sqrt{x} - S_1) \left\{ \frac{W^2}{P_1} + \frac{P_1(Y_0/Y)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + Y_0/Y)^2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{P_1 W^2}{\sqrt{x}} \right\} \right] \\ G_1 &= \frac{1}{S_1 - \sqrt{x}} \left[\left\{ \frac{Q_1(Y_0/Y)}{2W\sqrt{x}(\sqrt{x} + Y_0/Y)^2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{W}{2Q_1} \right\} + \frac{Q_1 W}{2\sqrt{x}} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(19)$$

このことは加振力振幅 e_0 が与えられると式(17)を満足する根 x が一般にただ一つ得られるか3根得られ、図4(c)の場合のときごくまれに5根得られることを示す。

3・3 p - x 曲線 次に $H=0$ の場合、 p , $X_d/2Y$, B_1 , C , y_0 , e_0 が与えられたとき、式(17)を満足する根 $x=R_0^2$ がどのような値をとるかを考えてみよう。図6~11は B_1 および y_0 を一定とし、 e_0 を副変数にとって p に対する根 x の変化曲線を求めたものである。縦軸には $x^{1/2}=R_0$ がとられているが、図4, 5の線図から e_0 , p の大きさにより x が1実根, 3実根および5実根となる場合を考慮して、 y_0 の値として順に $y_0=0.04, 0.5, 1.2, 1.48, 1.6$, の五つの数値を代表に選び、 p - x 曲線を示した。横軸に平行な細い実線は $R=Y_0/Y$ となる直線を示す。図11は図8の $R=Y_0/Y$ 直線の付近を縦軸方向を拡大して示したものである。図6~11中にはそれぞれ第1近似解の安定性についても付記している。ここで、右下がりの斜線を付し、二点鎖線で示した曲線または直線はこれら p - x 曲線に引いた接線が縦軸に平行となる点の軌跡〔後述の

Fig. 6 p - x curves (1)

Fig. 9 p - x curves (4)

Fig. 7 p - x curves (2)

Fig. 10 p - x curves (5)

Fig. 8 p - x curves (3)

Fig. 11 p - x curves (6)

$D(R_0, \Omega)=0$ 曲線と一致] を示し、斜線を付した側は後述するように物体の運動の第1近似解が不安定になる側である。また、図8～10の破線で示した横軸に平行な右上がりの斜線を付した直線も後述するように不安定な解を与える境界線[後述の $I(R_0)=0$ 曲線]であるが、これは先程の不安定とは違う性質を有する不安定な振動解(斜線側)の生ずる境界となる。

4. 第1近似解の安定性

4.1 安定判別条件式 次に前章までに得られた第1近似解 $\eta = \alpha_0 + A_0 \sin(\Omega\tau + \varepsilon_0)$ の安定性について考察しておこう。 R - ε 位相面上の特異点 (R_0, ε_0) に極めて近い任意の解を $\eta = \alpha + R \sin(\Omega\tau + \varepsilon)$ とし、 $R = R_0 + \delta R, \varepsilon = \varepsilon_0 + \delta \varepsilon$ に関する変分方程式を求めると次式が得られる。はじめに簡単のため $H=0$ とおき、 Ω

$\neq 1$ の場合について示すと,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\delta R)}{d(\delta \varepsilon)} &= \frac{a_0 \delta \varepsilon + a_1 \delta R}{b_1 \delta \varepsilon + b_0 \delta R} & [I] \\ \frac{d(\delta R)}{d(\delta \varepsilon)} &= \frac{a_0 \delta \varepsilon + a_2 \delta R}{b_2 \delta \varepsilon + b_0 \delta R} & [II] \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

となる. 式中の変数は表1に示した. したがって R - ε 位相面上の特異点 (R_0, ε_0) の安定判別は式(20)の右辺の分子, 分母の $\delta R, \delta \varepsilon$ の係数, つまり表1で示される a_0, b_0 などを用いて行うことができる. ここで係数行列式 $D(R_0, \Omega)$, 対角要素の和 $I(R_0)$ などを次式(21)~(23)のようにおく.

$$\left. \begin{aligned} I(R_0) &= a_1 + b_1 & [I] \\ I(R_0) &= a_2 + b_2 & [II] \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

$$\left. \begin{aligned} D(R_0, \Omega) &= a_0 b_0 - a_1 b_1 & [I] \\ D(R_0, \Omega) &= a_0 b_0 - a_2 b_2 & [II] \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

$$S(R_0, \Omega) = \{I(R_0)\}^2 + 4D(R_0, \Omega) \dots (23)$$

すると定常振動解 $\eta = \alpha_0 + (R_0/\Omega) \sin(\Omega \tau + \varepsilon_0)$ の振幅 R_0 の安定判別については

$$\left. \begin{aligned} I(R_0) \leq 0 \text{ and } D(R_0, \Omega) < 0 \\ \text{or } I(R_0) < 0 \text{ and } D(R_0, \Omega) = 0 \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

の場合安定, それ以外で不安定となる. さらに式(23)によって特異点の分類ができる. また式(24)の安定判別は図12を用いればいっそう安定, 不安定の範囲を明確に捉えることができる. ここで, S.F.P. は安定な焦点(Stable focal point), U.F.P. は不安定な焦点(Unstable focal point), S.N.P. は安定な結節点(Stable nodal point), U.N.P. は不安定な結節点(Unstable nodal point), V.P. はうず心点(Vortex point)を示す. すなわち, $X_d/2Y, B_1, C, y_0, p, x$ の値が与えられたとき式(6), (15)から表1に示された各式右辺の変数が定まり, $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$ などを求めることができるので, 第1近似解の安定判別を行うことができる. すなわち, 図12から座標原点を除き, 縦軸, 横軸を含む第3象限内に式(21), (22)の関数 $I(R_0), D(R_0, \Omega)$ の値があれば第1近似解 $x = R_0^2$ は安定となる.

$\Omega=1$ の場合には表1の中の a_0, b_0 がともに零となるので, 次の式(25)を満たす場合に第1近似解は安定となり, 特異点は結節点となる.

$$\left. \begin{aligned} a_1 \leq 0, b_1 \leq 0 & [I] \\ a_2 \leq 0, b_2 \leq 0 & [II] \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

4.2 第1近似解の安定, 不安定範囲 図6~11は第1近似解が安定となるか, 不安定となるかの領域が示されているが, 図13, 14はそれぞれ図6, 9の場合において各特異点の発生境界を示す $I(R_0)=0, D(R_0, \Omega)=0, S(R_0, \Omega)=0$ 曲線を付記した図を載せておいた.

5. 各種振幅曲線

5.1 共振曲線 次に強制外力のもつ円振動数(比) Ω を横軸に取り, 第1近似解が示す変位両振幅 $2A_0$ を縦軸にとって共振曲線のようにすを眺めてみよう. 図15は計算に使用した運動摩擦係数特性曲線を図示したもので, 図16~18はそれぞれ強制外力の振幅 E , 特性曲線のパラメータを示す $X_d/2Y, C$ を副変数に選んで示した共振曲線である. 図中 $2A_0 = 2(Y_0/Y)/\Omega$ なる曲線は $x=y_0$ 曲線に対応し, この曲線より下側が物体の速度振幅が移動面速度を越えない範囲で第1近似解が得られる側である. これによれば $\Omega=1$ 付近では同じ Ω の値に対し A_0 が3根得られる

Table 1 Variables in Eq. (20) determining stable conditions

$a_0 = R_0^2 \frac{\Omega^2 - 1}{2\Omega}$	$a_1 = -R_0 \left[\frac{A}{2} - D \left(\frac{S_2}{Q_2^2} + \frac{1 - S_2/Q_2}{R_0^2} \right) \right]$	
$a_2 = -R_0 \left[\frac{A}{2} + Z - \frac{D}{\pi R_0} \left(\frac{S_1 H_1}{P_1 \lambda_1} - \frac{S_2 H_2}{P_2 \lambda_2} - R_0 \left(\frac{S_1}{P_1} \log \lambda_1 - \frac{S_2}{P_2} \log \lambda_2 \right) - \frac{1}{R_0} \left(\frac{S_1}{P_1} \log \lambda_1 - \frac{S_2}{P_2} \log \lambda_2 \right) \right) \right]$		[II-1]
$a_2 = -R_0 \left[\frac{A}{2} + Z - \frac{D}{\pi R_0} \left(\frac{S_1 H_1}{P_1 \lambda_1} - \frac{2 S_2 J_2}{Q_2 (1 + \mu_2^2)} - R_0 \left(\frac{S_1}{P_1} \log \lambda_1 - \frac{S_2}{Q_2^2} (\pi - 2 \tan^{-1} \mu_2) \right) - \frac{1}{R_0} \left(\frac{S_1}{P_1} \log \lambda_1 + \frac{S_2}{Q_2} (\pi - 2 \tan^{-1} \mu_2) \right) \right) \right]$		[II-2] [II-3]
$a_2 = -R_0 \left[\frac{A}{2} + Z - \frac{D}{\pi R_0} \left(\frac{2 S_1 J_1}{Q_2 (1 + \mu_2^2)} - \frac{2 S_2 J_2}{Q_2 (1 + \mu_2^2)} + R_0 \left(\frac{S_1}{P_1} 2 \tan^{-1} \mu_1 + \frac{S_2}{Q_2^2} (\pi - 2 \tan^{-1} \mu_2) \right) - \frac{1}{R_0} \left(\frac{S_1}{P_1} 2 \tan^{-1} \mu_1 + \frac{S_2}{Q_2} (\pi - 2 \tan^{-1} \mu_2) \right) \right) \right]$		[II-4]
$b_0 = \frac{1 - \Omega^2}{2\Omega}$	$b_1 = -R_0 \left[\frac{A}{2} + \frac{D}{R_0^2} (1 - \frac{S_2}{Q_2}) \right]$	
$b_2 = -R_0 \left[\frac{A}{2} + \frac{D + 2 B P_0 / \pi}{R_0^2} + \frac{D}{\pi R_0^2} \left(\frac{S_1}{P_1} \log \lambda_1 - \frac{S_2}{P_2} \log \lambda_2 \right) \right]$		[II-1]
$b_2 = -R_0 \left[\frac{A}{2} + \frac{D + 2 B P_0 / \pi}{R_0^2} + \frac{D}{\pi R_0^2} \left(\frac{S_1}{P_1} \log \lambda_1 + \frac{S_2}{Q_2} (\pi - 2 \tan^{-1} \mu_2) \right) \right]$		[II-2] [II-3]
$b_2 = -R_0 \left[\frac{A}{2} + \frac{D + 2 B P_0 / \pi}{R_0^2} + \frac{D}{\pi R_0^2} \left(\frac{S_1}{Q_2} 2 \tan^{-1} \mu_1 + \frac{S_2}{Q_2^2} (\pi - 2 \tan^{-1} \mu_2) \right) \right]$		[II-4]

where $Z, H_i (i=1,2)$ and $J_i (i=1,2)$ are as follows:

$$Z = -\frac{D}{R_0^2} + \frac{2B}{\pi} \left(\frac{1}{P_0} - \frac{P_0}{R_0^2} \right)$$

$$H_1 = \left(\frac{2 R_0 W}{P_1} + \frac{P_1 (1 - W^2)}{W (R_0 + Y_0/Y)} \right) (R_0 - S_1) - 2 P_1 W / (P_1 W + R_0 - S_1)^2$$

$$J_1 = \left(\frac{R_0 W}{Q_1} + \frac{Q_1 (1 - W^2)}{2 W (R_0 + Y_0/Y)} \right) (S_1 - R_0) + Q_1 W / (S_1 - R_0)^2$$

Fig. 12 Graph determining stability

Fig. 13 Stable and unstable areas of p - x curves (1)

Fig. 14 Stable and unstable areas of p - x curves (2)

Fig. 15 $F(s')$ curves

場合があること、移動面速度を越えない範囲では $X_d/2Y$ により影響を受けることがなく、 C の値による影響も少ないことがわかる。

また、移動面速度を越えない範囲で同じ Ω に対し A_0 が1根のみしか得られない不安定な第1近似解の場合には、第2報で述べるように、第1近似解のもつ振幅は無次元時間 τ の関数となり、発生する振動は Ω 以外の振動数成分を含む複雑な非調和振動となることが予想される(概周期振動などの非調和振動については第2報⁽¹⁰⁾で詳述する)。なお、図8において前述し

Fig. 16 Resonance curves (1)

Fig. 17 Resonance curves (2)

Fig. 18 Resonance curves (3)

たように $x > y_0$ となる側、すなわち $2A_0 > 2(Y_0/Y)/\Omega$ なる側には、ほとんど $2A_0 = 2(Y_0/Y)/\Omega$ 曲線と重なって区別できないほど狭い不安定な解を与える範囲(図11参照)が存在するが、図16~18では省略してある。

5.2 移動面速度による振幅変化 強制外力が存在する場合に、物体が移動面速度 Y_0/Y の変化とともにどのような振幅変化を示すかを知ることは大いに興味がある。図19, 20は $X_d/2Y$, B_1 , Ω , E を与えて両振幅 $2A_0$ が変化するように示したものである。図19は $\Omega = 1.50$ の場合で E を副変数にとっており、破線で示した部分は第1近似解が不安定となることを示す。図19によれば E の値によって様相は異なる

Fig. 19 Surface motion vs. amplitude curves (1)

Fig. 20 Surface motion vs. amplitude curves (2)

が、例えば $E=1.05$ ではおよそ $0 \leq Y_0/Y \leq 0.065$ の範囲で3実根を有することがわかる。また、 E の値が1.50を越えてかなり大きな値をもつ場合には、第1近似解は不安定な領域を通ることなく、 Y_0/Y の図示の全範囲で第1近似解が安定な解を示すようになる。

図20は、 $E=0.1$ として Ω を副変数に選んで示し

た同様の曲線である。しかし、 Ω の値により不安定な領域がそれぞれ異なるため図中には示さなかったが、やはり Ω と Y_0/Y の値によって第1近似解が3実根得られるようすがわかる。これら両図においても、第1近似解がただ1根のみ得られ、かつそれが不安定な場合には共振曲線の場合と同様に非調和振動となることが予想される。

6. 結 言

ストライバック曲線に類似した相対速度の三次曲線とは異なるもう一つの曲線の例として、運動摩擦力速度特性曲線が直線と双曲線を合成した非線形曲線から成り、最大静止摩擦力が孤立点とはならない場合に、正弦波状強制外力を受けながら滑り運動する移動面上の物体の摩擦による振動について検討した。平均法をもちい、調和振動形の第1近似解を求め、それらが有する振動の諸特性ならびに安定性について論じた。これらの第1近似解と精度の高い正確解との比較並びに平均法による解の評価については第2報⁽¹⁰⁾において詳述する。

文 献

- (1) 高野英資・大海 毅・張 祥永, トライボロジスト, **34**-9(1989), 683.
- (2) 高野英資・大海 毅・張 祥永・目黒 清, トライボロジスト, **34**-9(1989), 690.
- (3) 高野英資・大海 毅・井田 剛・張 祥永・目黒 清, トライボロジスト, **36**-8(1991), 632.
- (4) 高野英資・張 祥永, トライボロジスト, **35**-1(1990), 39.
- (5) 張 祥永・高野英資・大海 毅, トライボロジスト, **35**-1(1990), 47.
- (6) 張 祥永・高野英資・大海 毅, トライボロジスト, **35**-8(1990), 562.
- (7) 田中久一郎, 摩擦のおはなし, (1985), 243, 日本規格協会.
- (8) 高野英資・原 利昭・張 祥永, 機論, **53**-496, C(1987), 2484.
- (9) 高野英資・原 利昭・張 祥永, 機論, **54**-497, C(1988), 296.
- (10) 高野英資・川口英伸・張 祥永・佐伯暢人, 機論, **67**-658, C(2001), 1705-1711.