境界で二方向に異なる面内弾性拘束を受ける
矩形曲板のカオス振動*山口 誉 夫^{*1}, 永 井 健 一^{*1}Effects of Bi-Axial Inplane Elastic-Constraint at Boundary
on Chaotic Oscillations of a Cylindrical Shell-PanelTakao YAMAGUCHI and Ken-ichi NAGAI^{*2}^{*2} Department of Mechanical System Engineering, Gunma University,
1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu-shi, Gunma, 376-8515 Japan

This paper presents numerical results on chaotic vibrations of a shallow cylindrical shell-panel under harmonic lateral excitation. The shell with a rectangular boundary is simply supported for deflection and the shell is constrained elastically in both in-plane directions. The effects of bi-axial in-plane elastic constraint on the chaotic behaviors of the shell are focused on. Using the Donnell-Mushtari-Vlasov type equation modified with an inertia force, the basic equation is reduced to nonlinear differential equation of a multiple-degree-of-freedom system by the Galerkin procedure. To estimate regions of the chaos, first, nonlinear responses of steady state vibration are calculated by the harmonic balance method. Next, time progresses of the chaotic response are obtained numerically by the Runge-Kutta-Gill method. The chaotic responses due to dynamic snap-through are examined by Fourier spectrum, Poincaré projection and Lyapunov exponent. Contribution of multiple modes of vibration to the chaos is examined carefully by the Lyapunov dimension. The main results can be summarized as follows. Loosening the in-plane constraint perpendicularly along the curved edges and tightening the in-plane constraint along the straight edges, chaotic motion is restricted with less number of modes of vibration.

Key Words: Nonlinear Vibration, Vibration of Continuous System, Chaos, Coupled Vibration, Shell, Poincaré Section, Lyapunov Dimension

1. 緒 言

薄肉構造は輸送機械などに使用されている。特に曲率を有するシェル構造は平板と比べ高い曲げ剛性を持つが、飛び移り座屈現象が生じやすい。周期荷重のもとでは、はりや板^{(1)~(13)}などと比べ複雑なカオス振動が予想される。ゆえに、シェルのカオス振動特性を解明することはシェル構造の振動低減や安定性のため重要な課題と言える。

板やシェルのカオス振動現象は主に内部共振による研究はいくつかあるが^{(14)~(17)}、動的飛び移りを伴う現象は十分に明らかにされていない^{(18)~(20)}。近年、著者らは浅い円筒で長方形境界を持つ曲板に関し、動的飛び移り形のカオス振動に及ぼす曲率や減衰の影響を理論解析により明らかにした⁽²¹⁾。しかし、実際の曲板では、周縁を他のフレームに接合して使用されることが多い。そこで、著者らは、周辺を面内方向に一樣に弾性拘束した曲板のカオス振動特性を解明した⁽²²⁾。これより、曲板の曲率方向の面内拘束と真直方向の面内拘束との相違がカオス振動に大きな影響を与えること

が予想された。

本報では、曲板の境界に異なる面内弾性拘束を与えた矩形曲板のカオス振動問題の理論解析を行い数値解を得た。解析では、曲板の真直辺および湾曲辺に沿ってそれぞれ異なる面内弾性拘束条件を与え、カオス振動挙動への影響を調べた。横方向慣性力を導入したドンネル形の基礎式にガラキン法を用いて多自由度系の非線形常微分方程式を導いた。まず、調和バランス法により、系の基本的な定常共振応答を求めた。ついで、主要なカオス振動に関し、方程式を直接積分し、時刻歴応答を求め、リアプノフ指数によりカオス振動の確定を行った。さらに振動モードの次数を増加させてカオス振動への寄与度をリアプノフ次元にて調べ、異なる面内弾性拘束がカオス振動に及ぼす影響を解明した。

2. 基礎式および境界条件

図1に示すように、矩形曲板は偏平で長方形の境界を有し、二辺の長さ a , b , ヤング率 E , 密度 ρ , 厚さ h , 曲率半径 R を持つ。曲板の真直方向に x 軸と円周方向に y 軸を定める。曲板の真直方向(x 方向)のばね定数 K_{x0} と K_{xa} を持つ線形ばねを、それぞれ湾曲した辺上 $x=0$, $x=a$ に配し弾性拘束する。また、曲板

* 原稿受付 2000年12月20日。

^{*1} 正員, 群馬大学工学部(〒376-8515 桐生市天神町1-5-1)。
E-mail: nagai@cng.gunma-u.ac.jp

Fig. 1 Dynamic model and coordinate system

の円周方向(y 方向)のばね定数 K_{y0} , K_{yb} を持つ線形ばねを、真直边上 $y=0$, $y=b$ にそれぞれ配する。たわみに関する境界条件は曲板の全周で単純支持とする。この曲板に様な横方向加速度 $a_s + a_d \cos \Omega t$ を作用させたカオス振動問題を考える。なお a_s と a_d はそれぞれ一定加速度と動的な加速度振幅である。 Ω , t は角振動数と時間である。問題を十分に偏平な曲板の低次の曲げ振動に限定すると、面内方向慣性力、回転慣性、せん断変形は無視できる。ここで、全たわみを $W(x, y, t)$ とする。ドンネル形の基礎式に横方向慣性力を考慮に入れて次の無次元の基礎方程式を得る。

$$\nabla^4 f = \beta^2 (w_{,\xi\xi}^2 - w_{,\xi\xi} w_{,\eta\eta}) - \alpha w_{,\xi\xi} \dots (1)$$

$$L(w, f) = w_{,\tau\tau} + \nabla^4 w - \alpha f_{,\xi\xi} - \beta^2 (f_{,\xi\xi} w_{,\eta\eta} - 2f_{,\xi\eta} w_{,\xi\eta} + f_{,\eta\eta} w_{,\xi\xi}) - (p_s + p_d \cos \omega\tau) = 0 \dots (2)$$

$$\nabla^2 \equiv \partial^2 / \partial \xi^2 + \beta^2 \partial^2 / \partial \eta^2 \dots (3)$$

コンマの後の添字はそれに関する偏微分を示す。なお、次式に示す無次元量を導入してある。

$$\begin{aligned} \xi &= x/a, \eta = y/b, \alpha = a^2/Rh, \beta = a/b \\ [u, v] &= [U, V](a/h^2), w = W/h, f = F/D \\ [n_x, n_y, n_{xy}] &= [N_x, N_y, N_{xy}](a^2/D) \\ [k_{x0}, k_{xa}, k_{y0}, k_{yb}] &= [K_{x0}, K_{xa}, K_{y0}, K_{yb}](ah^2/D) \\ [p_s, p_d] &= [a_s, a_d](\rho a^4/D), \tau = \Omega_0 t, \omega = \Omega/\Omega_0 \\ c &= 12(1-\nu^2), \Omega_0 = (1/a^2) \sqrt{D/\rho h} \dots (4) \end{aligned}$$

上式で、 $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ は曲板の曲げ剛性、 ν はポアソン比である。 α は曲率係数、 β は境界の辺比である。 n_x と n_y はそれぞれ ξ 方向と η 方向の無次元の断面力、 n_{xy} は断面内の無次元せん断力である。 p_s と p_d はそれぞれ一定荷重と動荷重振幅の無次元量を表す。 ω と τ は加振角振動数と時間の無次元量で

ある。 u, v は無次元の面内変位で、 w は無次元たわみである。応力関数 f と断面力との関係は次式で与えられる。

$$n_x = \beta^2 f_{,\eta\eta}, n_y = f_{,\xi\xi}, n_{xy} = -\beta f_{,\xi\eta} \dots (5)$$

また、 ξ, η 方向の変位成分 u, v と f および w との間に次式が成立する。

$$\begin{aligned} c[u_{,\xi} + (1/2)w_{,\xi}^2] &= \beta^2 f_{,\eta\eta} - \nu f_{,\xi\xi} \\ c[\beta v_{,\eta} - \alpha w + (\beta^2/2)w_{,\eta}^2] &= f_{,\xi\xi} - \nu \beta^2 f_{,\eta\eta} \\ c[\beta u_{,\eta} + v_{,\xi} + \beta w_{,\xi} w_{,\eta}] &= -2\beta(1+\nu)f_{,\xi\eta} \dots (6) \end{aligned}$$

曲板のたわみに関する境界条件は次式のごとく全周縁単純支持とする。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 0, 1; w = 0, w_{,\xi\xi} = 0 \\ \eta &= 0, 1; w = 0, w_{,\eta\eta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

曲板境界の面内方向の弾性拘束に関し、ばねの一端は曲板の境界に接合し、他端は境界の剛壁に接続するものとする。なお、板面内力とばねの復元力が境界の辺上で次式のような釣合い条件を満たすものと仮定する。

$$\begin{aligned} \xi &= 0: \int_0^1 [n_x - k_{x0}u] d\eta = 0, \int_0^1 n_{xy} d\eta = 0 \\ \xi &= 1: \int_0^1 [n_x + k_{xa}u] d\eta = 0, \int_0^1 n_{xy} d\eta = 0 \\ \eta &= 0: \beta \int_0^1 [n_y - k_{y0}v] d\xi = 0, \beta \int_0^1 n_{xy} d\xi = 0 \\ \eta &= 1: \beta \int_0^1 [n_y + k_{yb}v] d\xi = 0, \beta \int_0^1 n_{xy} d\xi = 0 \dots (8) \end{aligned}$$

3. 解法

3.1 有限多自由度系の運動方程式 境界条件式 (7), (8) のもとに、基礎式 (1), (2) を満足する解 f と w を定める。たわみ w を次のように仮定する。

$$w = \sum_m \sum_n \tilde{b}_{mn}(\tau) \tilde{\xi}_{mn}(\xi, \eta), (m, n = 1, 2, 3, \dots) \dots (9)$$

ただし、

$$\tilde{\xi}_{mn}(\xi, \eta) = \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \dots (10)$$

なお、 $\tilde{b}_{mn}(\tau)$ は未知時間関数である。 $\tilde{\xi}_{mn}$ は式 (7) の境界条件を満たすたわみ関数である。整数 m と n はそれぞれ、たわみ変形の ξ 方向の半波形の数と η 方向の半波形の数に対応する。上式を式 (1) に代入して整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \nabla^4 f &= \sum_m \sum_n \alpha \tilde{m}^2 \tilde{b}_{mn} \sin \tilde{m}\xi \sin \tilde{n}\eta + (c\beta^2/8) \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \tilde{b}_{kl} \tilde{b}_{mn} [-(\tilde{m}\tilde{l} - \tilde{k}\tilde{n})^2 \cos(\tilde{k} - \tilde{m})\xi \cos(\tilde{l} - \tilde{n})\eta \\ &\quad + (\tilde{m}\tilde{l} + \tilde{k}\tilde{n})^2 \cos(\tilde{k} - \tilde{m})\xi \cos(\tilde{l} + \tilde{n})\eta + (\tilde{m}\tilde{l} + \tilde{k}\tilde{n})^2 \cos(\tilde{k} + \tilde{m})\xi \cos(\tilde{l} - \tilde{n})\eta \\ &\quad - (\tilde{m}\tilde{l} - \tilde{k}\tilde{n})^2 \cos(\tilde{k} + \tilde{m})\xi \cos(\tilde{l} + \tilde{n})\eta], (m, n, k, l = 1, 2, 3, \dots) \dots (11) \end{aligned}$$

ただし、計算の便宜上 $\bar{m} = m\pi$ においてある。式(9)の一般解は本問題の場合、次式で与えられる。

$$f = (1/2)p_y\xi^2 + (1/2)p_x\eta^2 + p_{xy}\xi\eta + \sum_m \sum_n \bar{b}_{mn} d_{mn} \sin \bar{m}\xi \sin \bar{n}\eta \\ + \sum_m \sum_n \sum_k \sum_l \bar{b}_{mn} \bar{b}_{kl} [\theta_{klmn}^{(1)} \cos(\bar{k} - \bar{m})\xi \cos(\bar{l} - \bar{n})\eta + \theta_{klmn}^{(2)} \cos(\bar{k} - \bar{m})\xi \cos(\bar{l} + \bar{n})\eta \\ + \theta_{klmn}^{(3)} \cos(\bar{k} + \bar{m})\xi \cos(\bar{l} - \bar{n})\eta + \theta_{klmn}^{(4)} \cos(\bar{k} + \bar{m})\xi \cos(\bar{l} + \bar{n})\eta] \quad (12)$$

式(12)を式(11)に代入すると、次の係数が決定される。

$$d_{mn} = cd\bar{m}^2 / [\bar{m}^2 + \beta\bar{n}^2]^2 \\ \theta_{klmn}^{(1)} = -(c\beta^2/8)(\bar{m}\bar{l} - \bar{k}\bar{n})^2(1 - \delta_{km})(1 - \delta_{ln}) / [(\bar{k} - \bar{m})^2 + \beta^2(\bar{l} - \bar{n})^2], \\ \theta_{klmn}^{(2)} = (c\beta^2/8)(\bar{m}\bar{l} + \bar{k}\bar{n})^2 / [(\bar{k} - \bar{m})^2 + \beta^2(\bar{l} + \bar{n})^2] \\ \theta_{klmn}^{(3)} = (c\beta^2/8)(\bar{m}\bar{l} + \bar{k}\bar{n})^2 / [(\bar{k} + \bar{m})^2 + \beta^2(\bar{l} - \bar{n})^2], \\ \theta_{klmn}^{(4)} = -(c\beta^2/8)(\bar{m}\bar{l} + \bar{k}\bar{n})^2 / [(\bar{k} + \bar{m})^2 + \beta^2(\bar{l} + \bar{n})^2] \quad (13)$$

ただし、 δ_{km} はクロネッカーのデルタである。

さらに、式(12)を式(5)に代入し、面内の境界条件式(8)を用いて、 $p_x = p_y = p_{xy} = 0$ を得る。

以上により、変位 w および応力関数 f は $\bar{b}_{mn}(\tau)$ を除き、すべて定まったことになる。 $\bar{b}_{mn}(\tau)$ を求めるため、残りの基礎式(2)のガラーキン法を適用すると、 ξ_{mn} に関する次の条件式を得る。

$$\int_0^1 \int_0^1 L(w, f) \xi_{mn}(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0, \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (14)$$

上式に式(9)と式(10)に代入すると、 $\bar{b}_{mn}(\tau)$ に関する以下の非線形常微分方程式を得る。

$$\sum_m \sum_n \bar{B}_{rsmn} \bar{b}_{mn, \tau\tau} + \sum_m \sum_n \bar{C}_{rsmn} \bar{b}_{mn} + \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \bar{D}_{rsklmn} \bar{b}_{kl} \bar{b}_{mn} + \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \bar{E}_{rsijklmn} \bar{b}_{ij} \bar{b}_{kl} \bar{b}_{mn} \\ - \bar{F}_{rs} - (p_s + p_d \cos \omega\tau) \bar{G}_{rs} = 0, \quad (r, s, i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (15)$$

以下の計算の便宜上、指数 r と s の組は各振動形状に対応するので、振動形状に対して順位付けを行う ($i = 1, 2, 3, \dots$)。例えば ($r = 1, s = 1$) に対して $i = 1$ として、($r = 1, s = 2$) に対して $i = 2$ とする。これより、式(9)のたわみ形状 $\xi_{rs}(\xi, \eta)$ と式(15)の係数は次式に対応する。

$$\bar{b}_{mn} \equiv b_j, \quad \bar{a}_{mn} \equiv a_j, \quad \xi_{mn} \equiv \xi_j, \quad \bar{B}_{rsmn} \equiv B_{ij}, \quad \bar{C}_{rsmn} \equiv C_{ij}, \quad \bar{D}_{rsklmn} \equiv D_{ijk}, \\ \bar{E}_{rsijklmn} \equiv E_{ijkl}, \quad \bar{F}_{rs} \equiv F_i, \quad \bar{G}_{rs} \equiv G_i \quad (16)$$

これより式(15)は次のように書き改められる。

$$\sum_j B_{ij} b_{j, \tau\tau} + \sum_j C_{ij} b_j + \sum_j \sum_k D_{ijk} b_j b_k + \sum_j \sum_k \sum_l E_{ijkl} b_j b_k b_l - F_i - (p_s + p_d \cos \omega\tau) G_i = 0, \\ (i, j, k, l = 1, 2, 3, \dots) \quad (17)$$

まず、静的平衡位置を求めるために、式(17)で慣性力項と周期外力項を省略する。未知定数 b_j を b_j^* とおき、式(17)から b_j^* に関する連立三次方程式を得る。解 b_j^* を求め、式(9)より静たわみ w が定まる。これを w^* とする。ついで、 $\bar{b}_j(\tau)$ を平衡位置からの振幅とし、 $b_j = b_j^* + \bar{b}_j(\tau)$ とおく。これを式(17)に代入すると、 $\bar{b}_j$ に関する運動方程式を得る。さらに、非線形項と周期外力項を省略して、微小振幅における自由振動の式を得る。これより線形固有振動数 ω_i と固有ベクトル ϕ_{ip} ($p = 1, 2, 3, \dots$) が求まる。ついで、 ω_i に対応する固有振動モード $\xi_i(\xi, \eta)$ が次式のように定まる。

$$\xi_i(\xi, \eta) = \frac{1}{n_i} \sum_p \Psi_{pi} \xi_p(\xi, \eta), \quad \Psi_{pi} = \phi_{ip} \left[\sum_k \sum_l \phi_{pk} B_{kl} \phi_{pl} \right]^{-1/2}, \quad (p, k, l = 1, 2, 3, \dots) \quad (18)$$

ただし、 n_i は振動モードの振幅を単位長さとする任意定数である。線形固有振動モード ξ_i に基づく基準座標を $\bar{b}_i$ とすると、実際のたわみは次式で示される。

$$w = \sum_i \bar{b}_i \xi_i(\xi, \eta), \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (19)$$

基準座標 $\bar{b}_i$ を用いて $\bar{b}_j$ に関する運動方程式を変換すると、次の規準形の連立常微分方程式を得る。

$$M(\bar{b}_i) \equiv \bar{b}_{i, \tau\tau} + 2\varepsilon_i \omega_i \bar{b}_{i, \tau} + \omega_i^2 \bar{b}_i + \sum_j \sum_k \bar{D}_{ijk} \bar{b}_j \bar{b}_k + \sum_j \sum_k \sum_l \bar{E}_{ijkl} \bar{b}_j \bar{b}_k \bar{b}_l - p_d \bar{G}_i \cos \omega\tau = 0 \\ (i, j, k, l = 1, 2, 3, \dots) \quad (20)$$

ただし、

$$\bar{D}_{ijk} = \frac{n_i}{n_j n_k} \sum_p \sum_q \sum_r \bar{D}_{pqr} \Psi_{pi} \Psi_{qj} \Psi_{rk}, \quad \bar{D}_{pqr} = \sum_s (E_{pqrs} + E_{prsq} + E_{psqr}) b_s^*$$

$$\tilde{E}_{ijkl} = \frac{n_i}{n_j n_k n_l} \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s E_{pqrs} \Psi_{pi} \Psi_{qj} \Psi_{rk} \Psi_{sl}, \quad \tilde{G}_i = n_i \sum_p \Psi_{pi} G_p, \quad (p, q, r, s=1, 2, 3, \dots) \quad (21)$$

式(20)で、線形減衰項を新たに導入してある。 ε_i は第*i*次モードの減衰比である。

3.2 曲面板の周期応答 一般に、カオス応答は周期応答から分岐を経て発生する。そこで、まず定常周期応答を調べる。解を次のように仮定する。

$$\tilde{b}_i = C_{i1\mu 0} + \sum_p [C_{i1\mu p} \cos \mu p \omega \tau + C_{i2\mu p} \sin \mu p \omega \tau], \quad (i=1, 2, 3, \dots, p=1, 2, 3, \dots, \mu=1, 1/2, 1/3, \dots) \quad (22)$$

なお、 $C_{ij\mu 0}$, $C_{ij\mu p}$ ($j=1, 2$), ($i=1, 2, 3, \dots$)は未定係数である。主共振や高調波共振の応答を求めるには $\mu=1$ とおき、分数次調波共振応答では $\mu=1/n$ (n : 整数)を用いる。式(20)に式(22)を代入し、調和バランス法を適用すると、次の条件式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\mu S \omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\mu S \omega} M(\tilde{b}_i) \cos \mu s \omega \tau d\tau &= 0, \quad (s=0, 1, 2, \dots) \\ \frac{\mu S \omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\mu S \omega} M(\tilde{b}_i) \sin \mu s \omega \tau d\tau &= 0, \quad (s=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (23)$$

上式より得られる $C_{ij\mu 0}$, $C_{ij\mu p}$ ($j=1, 2$), ($i=1, 2, 3, \dots$)に関する連立三次方程式をニュートン・ラプソン法で解くと、共振応答の周期解を得る。応答振幅の実効値 w_{rms} は次式により定まる。

$$w_{rms} = \left\{ \frac{1}{2} \sum_p \left[(1 + \delta_{p0}) \left(\sum_i C_{i1\mu p} \tilde{\xi}_i \right)^2 + \left(\sum_i C_{i2\mu p} \tilde{\xi}_i \right)^2 \right] \right\}^{1/2}, \quad (p=0, 1, 2, \dots; i=1, 2, \dots) \quad (24)$$

3.3 カオス振動の非周期応答 カオス振動では、非周期応答が発生する。そのため、解を数値積分で求める必要がある。式(20)で $\tilde{b}_i = b_i^{(1)}$ とおき、その速度 $\dot{\tilde{b}}_{i,\tau}$ を $b_i^{(2)}$ とする。最大の近似モード数を Ic として、次の1階連立常微分方程式に変換する。

$$\begin{aligned} b_{i,\tau}^{(1)} &= b_i^{(2)}, \quad b_{i,\tau}^{(2)} = -2\varepsilon_i \omega_i b_i^{(2)} - \omega_i^2 b_i^{(1)} - \sum_j \sum_k \tilde{D}_{ijk} b_j^{(1)} b_k^{(1)} - \sum_j \sum_k \sum_l \tilde{E}_{ijkl} b_j^{(1)} b_k^{(1)} b_l^{(1)} + p_d \tilde{G}_i \cos \omega \tau, \\ (i, j, k, l &= 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (25)$$

上式をルンゲ・クッタ・ギル法で数値積分し、応答の時刻歴を求める。この解を分析し、曲板のカオス特性を吟味する。

3.4 リアプノフ指数とリアプノフ次元 カオス応答は正のリアプノフ指数により確定できる⁽²³⁾。振動系の応答に対し、変分方程式の応答を求め、相互の距離の変化率を求め、リアプノフ指数とリアプノフ次元を得る。これより、カオス振動に寄与する自由度の数が推定できる⁽⁴⁾⁽²⁴⁾。具体的な計算法を次に示す。

式(25)は $b^{(p)}$ ($p=1, 2$; $i=1, 2, \dots, Ic$)に関する $2Ic$ 個の自由度を持つ相空間内での運動方程式に対応する。この式を数値積分してカオス応答の時刻歴が定まる。この解を $2Ic$ 個のベクトル $\mathbf{b}$ とし、基準軌道と定義する。基準軌道からの変分を $\delta \mathbf{b}$ とし $\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}$ を近接軌道とする。式(25)の変分方程式として次式を得る。

$$\frac{d}{d\tau} \delta b_r = \sum_s \bar{\Psi}_{rs} \delta b_s, \quad (r, s=1, 2, \dots, 2Ic) \quad (26)$$

上式で $\bar{\Psi}_{rs}$ は式(25)のヤコビ行列に対応する。任意の成分 δb_r に関し、微小時間 $\Delta \tau$ 後の基準軌道と近接軌道との距離は次のようになる。

$$e^{\lambda_r \Delta \tau} = |\delta b_r| / |\delta b_{r0}| \quad (27)$$

$|\delta b_{r0}|$ は初期値であり、単位長さとして仮定する。一方、式(26)の $\bar{\Psi}_{rs}$ は連成項を有し、時間とともに変化する。

つまり基準軌道 b_r の変化により、 δb_r の他の成分 δb_s ($r \neq s$; $s=1, 2, \dots, 2Ic$) も値を持つ。それゆえ、全成分の距離の変化率を考慮したユークリッドノルムを用い、次式のリアプノフ指数が定義される⁽²³⁾。

$$\lambda_r = \frac{1}{\tau} \log_e \|\delta \mathbf{b}\| \quad (28)$$

上式の計算で、 τ は十分に長い時間を考慮する。これより、任意時間間隔 τ ごとに λ_r の平均を行い正確な値を得る。なお、系は $2Ic$ 自由度を持つため、各成分 δb_r ($r=1, 2, \dots, 2Ic$) に対応したリアプノフ指数が得られる。カオス振動応答では基準軌道と近接軌道の距離が発散する場合がある。そのため一定時間ごとに、近接軌道の初期値を単位長さに変換して、距離の伸び率を計算した。その際、各成分間の直交性を保つようにグラムシュミットの直交化を適用した。上記方法の計算プログラムを作成し、リアプノフ指数を求めた。

リアプノフ指数 λ_r から Kaplan-Yorke⁽²⁴⁾ の方法によりリアプノフ次元 d_L が次式のように求められる。

$$d_L = s + \left[\frac{\sum_r^s \lambda_r}{\lambda_{s+1}} \right] \quad (29)$$

上式は次の条件を満たす s を用いるものとする。

$$\sum_r^s \lambda_r > 0, \quad \sum_r^{s+1} \lambda_r < 0 \quad (30)$$

なお λ_r ($r=1, 2, \dots, 2Ic$) は大きさの順に再配列してある。式(25)での近似モード数 Ic を逐次増加させ、

次元 d_L を求める。 d_L の値が収束する I_c をもってカオス応答において支配的なモード数が推定できる⁽⁴⁾。

4. 計算結果

4.1 計算条件 曲板の境界上の面内方向の弾性拘束力がカオス振動に及ぼす影響を調べる。曲板の湾曲部対向二辺の弾性拘束 k_{x0} と k_{xa} とを同一とし k_x とおく。同様に、真直な二辺で同一ばね定数 $k_y = k_{y0} = k_{yb}$ とした。ただし、 k_x と k_y は異なる値を与える。曲板は十分に偏平であり、正方形の境界を有するものとする。対応する諸量は次のようになる。

$$\alpha=20, \beta=1$$

動的荷重振幅 p_d は $p_d=1300$ とした。減衰比 ε_i は各振動モードで共通の値 $\varepsilon_i=0.018$ とした。

なお、静的たわみ変形や振動モードを表示するため、支配的な形状を示す ξ 軸方向(真直面)の半波長の数 m と η 軸方向(湾曲面)の半波長の数 n で代表させ、記号 (m, n) を用いる。

数値積分においては、時間刻み Δt は加振周期

($T_e=2\pi/\omega$) の $1/480$ とした。数値積分に伴う過渡応答成分が十分に減衰する時間 $1000T_e$ からさらに約 $3700T_e$ 以後の時間波形を結果として用いた。

本報では、特徴的な動的飛び移り現象を伴う、 $1/3$ 分数次調波共振近傍でのカオス振動について分析する。

4.2 曲板の復元力特性 曲板に静荷重 p_s を加え、荷重の増加に伴うたわみの関係、すなわち復元力特性を求めた。面内二方向のばね定数 k_x, k_y をそれぞれ変化させた結果を図2に示す。縦軸は静的分布荷重 p_s 、横軸は曲板の静たわみ w である。図中の破線は不安定な解である。なお、観測点は $\xi=0.6$, $\eta=0.6$ とした。この計算では式(10)のたわみ関数で $m=1$ から $m=5$, $n=1$ から $n=5$ を考慮している。 $\xi=0.6$, $\eta=0.6$ はこの範囲でたわみ関数が節とならない位置である。

図2(a)は湾曲辺上にある真直方向の弾性拘束を面内自由の条件となる $k_x=10^{-14}$ に設定し、真直辺上にある湾曲方向の面内ばねのばね定数 k_y を拘束自由から完全拘束までの $10^{-14} \leq k_y \leq 10^{13}$ と変化させた復元力である。図2(b)は逆に曲板の湾曲方向の拘束を面内自由の $k_y=10^{-14}$ とし、真直方向のばね定数 k_x を $10^{-14} \leq k_x \leq 10^{13}$ と変化させた結果である。さらに図2(c)は湾曲方向のばね定数 k_y と真直方向のばね定

Fig. 2 Static deflection of shells
($\alpha=20$, $\nu=0.3$, $\xi=0.6$, $\eta=0.6$)

Fig. 3 Frequency responses of steady state vibration
($p_d=1300$, $\varepsilon_i=0.018$, $I_c=8$)

数 k_x と同じ値 $k_x = k_y$ を与えながら変化させた結果である。これより曲板はすべての k_x, k_y に対し、漸軟-漸硬形の復元力特性となる。静的荷重によりサドルノード分岐が復元力に現れている。図2(a)ではすべての k_y において、負のこう配を含む復元力特性を示す。図2(b)および図2(c)では $k_x < 10$ と弾性拘束が弱い場合に特性に負のこう配を含む。この条件では飛び移り形の座屈現象が発生しうる。図2(a)において、負のこう配は湾曲方向の面内拘束 k_y が大きくなるに従い急峻となる。さらに、 k_y が50近傍から高次の変形モードを伴う、不安定な釣合い状態が現れる。このとき、主に最低次変形モード $(m, n) = (1, 1)$ と $(1, 3)$, $(3, 1)$ モードとが互いに連成した変形状態となっている。一方、図2(b)から真直方向の面内拘束 k_x が増すと逆に負のこう配は鈍化する。これは k_x が大となると漸硬的な性質が復元力特性で強調されることに起因する。真直方向および湾曲方向の面内ばね定数に同じ値 $k_x = k_y$ を与えて増加させた場合には、主に真直方向の弾性拘束の影響が支配的となり負のこう配は鈍化することが図2(c)より言える。

以上から、真直方向の面内弾性拘束が小さく、湾曲方向の面内弾性拘束が逆に大きいほど高次変形が混在した急激な飛び移り形の座屈現象となる。なお、復元力特性に負のこう配を含む条件のもとでは周期横荷重が作用した場合に動的飛び移りを伴うカオス振動が発生することが予想される。この結果から後述のカオス振動の数値シミュレーションを行うばね剛性の範囲を

Fig. 4 Time history of chaotic vibration ($\omega=66.0$, $k_x=5.0$, $k_y=10^{-14}$, $I_c=8$)

Fig. 5 Fourier spectrum of chaotic response ($\omega=66.0$, $k_x=5.0$, $k_y=10^{-14}$, $I_c=8$)

決定した。

4.3 共振応答線図 曲板におけるカオス振動の発生領域を予測するために主要な共振応答を求めた。一例を図3に示す。縦軸は観測点 $\xi=0.6$, $\eta=0.6$ における振幅の実効値 w_{rms} , 横軸は無次元加振振動数 ω である。図中、記号 (m, n) : j で共振応答を分類してある。 (m, n) は誘起される振動モード (m, n) を示し、 j は共振応答の種類で $j=1$ は主共振, $j=1/2$, $j=1/3$ はそれぞれ $1/2$ 次, $1/3$ 次の分数次調波共振応答である。一点鎖線は背骨曲線である。図3の上段(a)は4.2節の図2で復元力の負の傾きが最も大きい条件 $k_x=10^{-14}$, $k_y=10^{13}$ に対する応答曲線である。下段の図3(b)は逆に負の傾きが最も小さい場合 $k_x=5$, $k_y=10^{-14}$ の応答である。どちらの曲板とも漸軟-漸硬ばね特性に起因した最低次振動形を伴う主共振や $1/2$ 次や $1/3$ 次の分数次調波共振応答が生ずる。ただし、図3(a)のほうが図3(b)よりも漸軟-漸硬ばね特性が顕著な応答となっている。

過去に著者らが行ったアーチや座屈後りの加振振

(a)

(b)

(c)

Fig. 6 Lyapunov Dimension of the shells ($\alpha=20$, $\varepsilon_i=0.018$, $p_d=1300$, $p_s=0$)

動実験結果^{(6)~(13)}あるいは先の曲板の解析結果⁽²¹⁾⁽²²⁾から、負の復元力を持つ振動系では、主要なカオス応答は漸軟-漸硬ばね特性を有する1/2次ないし1/3次の分数次調波共振応答近傍に生ずる。その中で1/3次の分数次調波共振応答近傍で発生するカオス振動に着

目する。なお、1/2次分数次調波共振応答近傍で発生するカオスも、面内弾性拘束の影響は、本報で取りあげた1/3次分数次調波共振応答近傍で発生するカオスと同様な傾向を示すことは確認してある。図3中の斜線を引いた領域は、着目する種類のカオス応答が発生する振動数である。対応する周波数を後の数値シミュレーションの加振振動数 ω として選んだ。

4.4 曲板の時刻歴応答 図4に $k_x=5$, $k_y=10^{-14}$ の条件での曲板の時刻歴応答の一部を示す。振動応答は非周期、曲板の正方向に大振幅波形となった。この時間応答に対する最大リアプノフ指数 $\lambda_{\max}$ は正值4.4であり、カオス振動であることが確定できる。

フーリエスペクトラムを図5に示す。加振振動数 ω のみならず多くの周波数成分がスペクトラムに現れており典型的なカオスの特徴を示している。図中、 $1/3\omega$ に対応するスペクトラムのピークがいちばん大きい。これより、カオス応答が1/3分数次調波共振応答から分岐した。

4.5 リアプノフ次元およびリアプノフ指数 最大リアプノフ指数 $\lambda_{\max}$ が正值となるカオス応答において、リアプノフ次元 d_L を求め、面内弾性拘束によるカオス振動における振動モード寄与の影響を調べた。式(11)の近似モード数 I_c を逐次増加して次元 d_L を計算し、 d_L がほぼ一定値に収束したときの I_c をカオス振動を記述するのに必要な自由度と推定した⁽⁴⁾。また、 d_L が0より大きい場合に応答がカオス振動であることを示す。結果を図6に記す。

図6(a)は真直方向を面内拘束自由となる $k_x=10^{-14}$ に固定し、湾曲方向のばね定数 k_y を $10^{-14} \leq k_y \leq 10^{13}$ と変化させた場合のリアプノフ次元 d_L である。また、図6(b)は逆に湾曲方向を面内拘束自由の条件 $k_y=10^{-14}$ とし、真直方向のばね定数 k_x を $10^{-14} \leq k_x \leq 5$ と変化させた結果である。さらに図6(c)は真直方向と湾曲方向の面内ばね定数に同じ値 $k_x=k_y$ を与えて変化させた結果である。図6(a)から湾曲方向の面内拘束が弱い $k_y \leq 1$ なる場合のカオス振動は最低次から五次までの振動形が支配的であるが、面内拘束を $k_y=5 \sim k_y=100$ まで強くすると一次~七次まで、さらに拘束が強い場合は一次~八次以上と k_y が大きいほど自由度は多くなり、収束する次元 d_L も高くなる。一方、図6(b)から真直方向の面内拘束 k_x が強いほど、逆に自由度は減少し、収束する次元 d_L も低くなる。また、図6(c)から真直方向と湾曲方向の面内ばね定数に同じ値 $k_x=k_y$ を与えて増加させた場合のカオス振動は主に真直方向の弾性拘束の影響が支配的となる。その結果、面内ばね定数($k_x=$

Fig. 7 Poincaré maps of the chaotic responses
($\omega=66.0$, $p_n=1300$, $\varepsilon_r=0.018$, $I_c=8$)

k_y が大なる場合は、面内ばね定数 ($k_x=k_y$) が小なる場合に比べ、自由度は小さく次元 d_L は低くなる。

4・6 ポアンカレ写像図 図7にカオス振動のポアンカレ写像図を示す。左の列の写像図は、ばね定数 $k_x=10^{-14}$, $k_y=10^{13}$ に対応し、4・5節の図6で最もリアプノフ次元 d_L が高くなった条件である。一方、右列は $k_x=5$, $k_y=10^{-14}$ の像であり、図6で次元 d_L が最も低くなった条件である。図の上段は観測点 $\xi=0.6$, $\eta=0.6$ における実際のたわみの相平面 $\bar{w}-\bar{w}_{\omega\tau}$ の像である。2段め以降は各振動形の相平面 $\bar{b}_i-\bar{b}_{i,\omega\tau}$ の像である。ここで横軸 $\bar{b}_i$ は各振動形の最大振幅を示す位置での変位である。縦軸は速度振幅である。ポアンカレ断面の位相角 θ は加振力の最大振幅より 60° とし、写像点数は4000である。上段のたわみの図から、像の中にカオス振動で特徴的な折り畳み引き伸ばしのフラクタル構造が現れている。ただし、高い次元 d_L を持つ条件 $k_x=10^{-14}$, $k_y=10^{13}$ の像よりも、低い次元 d_L となる条件 $k_x=5$, $k_y=10^{-14}$ の像のほうが鮮明なフラクタル構造となっている。また、両条件ともに(1,1)モードの像が、最上段のたわみの像に似ている。これより(1,1)モードがカオス振動に支配的と言える。次に振動形(1,1)の最大振幅を基準にとり高次振動形の大きさを比較する。高い次元 d_L を持つ条件 $k_x=10^{-14}$, $k_y=10^{13}$ では、(1,2)モード28%, (2,1)モード33%, (2,2)モード18%, (1,3)モード24%, (3,1)モード21%, (2,3)モード8.8%, (3,2)モード9.8%となっている。一方、低い次元 d_L となる条件 $k_x=5$, $k_y=10^{-14}$ では、(1,2)モード2.6%, (2,1)モード0.74%, (2,2)モード0.12%, (1,3)モード12%, (3,1)モード15%, (2,3)モード0.32%, (3,2)モード1.2%となっており、高次振動形の振幅が小さい。

以上の結果は次のように説明できる。湾曲方向の面内拘束 k_y が大なるほど、あるいは真直方向の面内拘束 k_x が逆に小さいほど復元力の負のこう配が急峻となりカオス振動で飛び移り振動を起こした際の衝撃が大きくなる。したがって高次振動モードが励起されやすくなり、カオス振動の自由度が大きく次元 d_L は高くなると考えられる。その結果、ポアンカレ写像図のフラクタル構造がより複雑になる。したがって真直方向の弾性拘束 k_x を大きく、湾曲方向の弾性拘束 k_y を小さくすることでカオス振動の自由度を減らすことができる。

5. 結 言

周縁で二方向に異なる面内弾性拘束を受ける曲板に周期横荷重を与えた際の飛び移りを伴うカオス振動現象を明らかにした。結果を要約すると次のごとくなる。

(1) 真直方向の面内弾性拘束を大きくし、湾曲方向の面内弾性拘束を逆に小さくすることにより、カオス振動に寄与する振動モードの数を少なくすることができる。

(2) 真直方向の面内弾性と湾曲方向の面内弾性が同一となる場合、主に真直方向の弾性拘束の影響が支配的となる。したがって、この条件を保ち面内弾性拘束を大きくするとカオス振動に寄与する振動モードの数が減る。

文 献

- (1) Holmes, P. J., *Philos. Trans. R. Soc. London, A*, **292** (1979), 419-448.
- (2) Moon, F. C., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **47**(1980), 638-644.
- (3) Moon, F. C. and Holmes, P. J., *J. Sound Vib.*, **65-2** (1979), 275-296.
- (4) Pezeshki, C. and Dowell, E. H., *Int. J. Non-Linear Mech.*, **24-2** (1989), 79-97.
- (5) 八巻昇・永井健一, 機論, **39**-327, C(1971), 3334-3341.
- (6) 永井健一, 機論, **51**-471, C(1985), 2820-2827.
- (7) 永井健一, 機論, **52**-484, C(1986), 3047-3054.
- (8) 永井健一, 機論, **56**-525, C(1990), 1171-1177.
- (9) 永井健一・山口誉夫, 機論, **60**-579, C(1994), 3733-3740.
- (10) 山口誉夫・永井健一, 機論, **60**-579, C(1994), 3741-3748.
- (11) 永井健一・大山貞夫・山口誉夫, 機論, **64**-624, C(1998), 2816-2823.
- (12) 永井健一・山口誉夫, 機論, **61**-586, C(1995), 2202-2209.
- (13) Nagai, K., Kasuga, K., Kamada, M., Yamaguchi, T. and Tanifuji, K., *JSME Int. J., Ser. C*, **41-3** (1998), 563-569.
- (14) Dowell, E. H., *J. Sound Vib.*, **85-3** (1982), 333-344.
- (15) Nayfeh, A. H. and Raouf, R. A., *J. Appl. Mech.*, **54** (1987), 571-577.
- (16) Yang, H. L. and Sethna, P. R., *J. Sound Vib.*, **155-3** (1992), 413-441.
- (17) Chang, S. I., Bajaj, A. K. and Krousgrill, C. M., *Non-linear Dynamics*, **4-5** (1993), 433-460.
- (18) Maestrello, L., Frendi, A. and Brown, D. E., *AIAA J.* **30** (1992), 2632-2638.
- (19) Murphy, K. D., Virgin, L. N. and Rizzi, S. A., *J. Sound Vib.*, **196**(1996), 635-658.
- (20) Sansour, C., Wriggers, P. and Sansour, J., *Nonlinear Dynamics*, **13**(1997), 279-305.
- (21) Nagai, K. and Yamaguchi, T., *High Pressure Technology, ASME-PVP*, 297(1995), 107-115.
- (22) Yamaguchi, T. and Nagai, K., *Nonlinear Dynamics*, **13** (1997), 259-277.
- (23) Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. and Vastano, J. A., *Physica 16D*, (1985), 285-317.
- (24) Kaplan, J. and Yorke, J., *J. Diff. Eqs.*, **49**(1983), 185-207.
- (25) Rössler, O. E., *Phys. Lett., A*, **71**(1983), 155-157.