PVDF フィルムセンサを用いた一様断面構造物の 振動変形モニタリング*

林 卓郎^{*1}, 内田 憲男^{*2}, 長安 克芳^{*3}
高橋 博^{*3}, 中村 博昭^{*3}

Monitoring of Structural Vibration by Using Distributed PVDF Film Sensors

Takuro HAYASHI^{*4}, Norio UCHIDA, Katuyoshi NAGAYASU,
Hiroshi TAKAHASHI and Hiroaki NAKAMURA

^{*4} Department of Mechanical Engineering, Fukui University of Technology,
3-6-1 Gakuen, Fukui-shi, Fukui, 910-8505 Japan

In recent years, the new vibration monitoring methods using distributed continuous sensors have been actively developed in the field of smart sensors and actuators. PVDF film sensors have been mainly used for such purposes because they are less expensive and easy to handle. A lot of techniques have been reported so far, but they are not available for the structures whose boundary conditions are unknown. The authors propose the new approach using the PVDF films with the shape of appropriate Fourier series, which is applicable to the structure of arbitrary boundary conditions. Identification of the mode shape is simulated in the case of cantilever beam, which shows the availability of the proposed method. Furthermore, the experiment was carried out with the cantilever-like plate. The good agreements were obtained when compared with the calculated results.

Key Words: Vibration, Mode Shape, Structural Vibration, Smart Sensors, Piezoelectric Materials, Fourier Series

1. 緒 言

近年, 構造材料にセンサやアクチュエータを組み込み, 外乱による構造材料の変形や振動を検出したり, 検出した情報から適応的に変形や振動の制御を行ったりする, いわゆる知的構造材料の研究が盛んになってきている。そして, 組込まれるセンサは光ファイバ系またはPVDF(polyvinylidene fluoride polymer: ポリフッ化ビニリデン)フィルムや圧電セラミックスなどの圧電材料系⁽¹⁾が多く用いられ, 構造材上にライン状または面状に分布させて用いられている。このうちPVDFフィルムは安価で, 任意の形状に切って構造材に貼り付けられるなど取扱いが容易なため, 従来から多くの研究がなされてきた^{(2)~(4)}。例えば, 田中らは構造系の振動をモード展開した式を示した上, 単純支持平板にsin関数形状にシェーピングしたPVDFフィルムセンサを貼り付け, 所定のモードの出力を取り出

すことに成功している⁽⁵⁾。しかし従来から行われてきた多くの方法では, PVDFフィルムセンサの出力を制御入力とすることを目的としていることもあり, PVDFフィルムの形状を構造系の固有モード形状に一致させることに力点がおかれてきた。PVDFフィルムセンサの出力はひずみの関数であり, 単純支持ばりや単純支持平板の場合はひずみモードと変位モードは同じ形となるから問題ないが, その他の境界条件ではひずみモードと変位モードは一致しない。そこで本研究では, PVDFフィルムセンサを構造系の境界条件に適したフーリエ級数形状にシェーピングし, 得られたフーリエ出力から振動変位分布を再合成することを検討した。ここで提案する方法は, 一様断面構造の曲げ振動を対象としているが, 固有振動モードを抽出するだけでなく原理的には任意の周波数での振動挙動や波のように振動が伝ばするようすも観測できるものである。本手法を一端固定, 他端自由の平板の固有振動に適用した結果, 固有モードの観測が良好に行えたので報告する。

2. PVDF フィルムセンサの特性

PVDFは圧電性高分子材料の一種であり, 一軸延伸PVDFフィルムではフィルムをある方向に延伸し, 結

* 原稿受付 2000年9月19日。

^{*1} 正員, 福井工業大学機械工学科(☎910-8505 福井市学園3-6-1)(元: 東芝)。

^{*2} 東京工科大学機械制御工学科。

^{*3} (株)東芝機械システムラボラトリー(☎212-8582 川崎市幸区小向東芝町1)。

E-mail: thayashi@ccmails.fukui-ut.ac.jp

晶中の分子鎖軸を延伸方向に配向させる。そしてフィルムを電極間にはさみ、適当な温度で高電圧を加え、室温まで冷却すると厚さ方向に永久分極を生ずる。電極はフィルムの表と裏面にアルミやニッケルの膜をメッキまたは蒸着して形成する。PVDF フィルムを構造物に貼り付けると、構造物が変形したときにフィルムが引張りまたは圧縮を受け、厚さ方向に現れるポアソン比の効果などにより電荷を生ずる。この電圧を測定することで、構造物のひずみなどの測定に用いることができる。

PVDF フィルムセンサから取り出す電圧は、延伸方向を x 軸、フィルム面内で x 軸と直交する方向を y 軸、分極方向を z 軸にとると次のように表される。

$$v(t) \propto \int_{A_s} (e_{31}\epsilon_x + e_{32}\epsilon_y) dA \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 A_s はフィルム面積、 ϵ_x は x 軸方向のひずみ、 ϵ_y は y 軸方向のひずみであり、 e_{31} 、 e_{32} は x 軸方向および y 軸方向の圧電定数⁽¹⁾である。この式からわかるように、PVDF フィルムセンサの出力はひずみに対応した量となる。PVDF フィルムセンサを平板に貼り付けた場合で板の曲げ振動を考え、板の任意の位置 (x, y) におけるたわみを $w(x, y)$ とするとひずみと曲げ変形の関係

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2)$$

から

$$v(t) = \Gamma_0 \int_{A_s} \left(e_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e_{32} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dA_s \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表せる⁽⁵⁾。ただし、 h は板厚で Γ_0 は比例定数である。ここで PVDF フィルムセンサが x 軸方向に任意の形状 $\varphi(x)$ をしているとき、フィルムの y 方向の幅が狭ければ y 方向のひずみはフィルムを貼り付けた面内でほぼ一定と近似できる。したがって y 方向の幅を $0 \sim \varphi(x)$ とし、長さを L とすると出力電圧は $dA_s = \varphi(x) dx$ より

$$\begin{aligned} v(t) &= \Gamma_0 \int_0^L \int_0^{\varphi(x)} \left(e_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e_{32} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dy dx \\ &\cong \Gamma_0 \int_0^L \varphi(x) \left\{ e_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e_{32} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} dx \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

と表される。式(4)からわかるように出力電圧は x 軸方向だけでなく、 y 軸方向のひずみの影響も受けるが、はりなどで y 軸方向のひずみが無視できる場合や、板の場合でも

$$\int_0^L \varphi(x) e_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \gg \int_0^L \varphi(x) e_{32} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる範囲では

$$v(t) \cong \Gamma_0 e_{31} \int_0^L \varphi(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \quad \dots\dots\dots (6)$$

と近似できる。一軸延伸フィルムの場合、 $e_{31} \gg e_{32}$ で約 10 倍から数十倍の違いがあるから、 x 軸方向の振動の波数に対して y 軸方向の波数が小さい範囲ではこの近似が成り立つと考えられる。したがって一方向に長い構造物で、 y 方向の波数の小さい低次の基本的な振動を測定するのであれば、式(6)のように近似してもかまわない。

3. 計測原理

上述の PVDF フィルムセンサを適当な形状関数 $\varphi(x)$ に形成し、はりや平板のような構造物の上に貼り付けて振動変形を観測することを考える。このような PVDF フィルムセンサのシェーピングに関しては構造系の固有振動モード信号を取り出してそのモードを振動制御する目的で、多くの研究報告がなされている。最も多いのが、境界条件が単純支持のはりや板を扱った場合である⁽⁶⁾。境界条件からたわみ変位とひずみがともに同じ $\sin$ 関数であらわされるので、例えば x 方向に関して取り出したいモードの $\sin$ 関数を用いれば、 x 方向にはそのモードの信号が取り出せる。一方、単純支持以外の境界条件では形状関数を決めるのが困難になるが、はりの場合は固有モード関数が既知なので、それを x 方向に 2 階微分して形状関数を求めることができる。しかし板の場合は周辺支持の場合を除き一般には固有関数を解析的に求めることができない。そこで本報では、形状関数をフーリエ級数列で構成することを考える。

いま、図 2 に示すような長方形の板上で $y = y_i$ の線上のひずみ分布 $\epsilon_x(x, y_i, t)$ を適当な直交関数列で表したとすると

$$\epsilon_x(x, y_i, t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{im}(t) \varphi_m(x) \quad \dots\dots\dots (7)$$

と書ける。ほぼこの線上とみなせる位置に複数の PVDF フィルムセンサ列 ($m=1, 2, \dots$) を貼り付け、

Fig. 1 Illustration of PVDF film sensor

その形状をこの直交関数列 $\varphi_m(x)$ の形にしたとすると、各センサ出力は式(2)、(6)より

$$v_{im}(t) \cong \Gamma_0' \int_0^L \varepsilon_x(x, y_i, t) \varphi_m(x) dx = a_{im}(t) \quad \dots\dots\dots (8)$$

となって、直交関数列の係数 $a_{im}(t)$ が得られる。ただし

$$\Gamma_0' = \frac{2e_{31}\Gamma_0}{h}$$

は比例定数である。 $y=y_i$ の線上の x 方向のたわみ分布 $w(x, y_i, t)$ は式(2)でひずみを2回積分した次式から求められる。

$$\begin{aligned} w(x, y_i, t) &\cong \frac{2}{h} \int \left[\int \varepsilon_x(x, y_i, t) dx \right] dx \\ &= \frac{2}{h} \left(\sum_{m=1}^{\infty} v_{im}(t) \int \left[\int \varphi_m(x) dx \right] dx + c_0 x + c_1 \right) \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここで c_0, c_1 は積分定数で、境界条件などによって決まる。平板上で場所を変えて、 $y=y_i$ の線に平行な位置に PVDF センサを貼り付け、それぞれの線上でた

Table 1 Shaping functions of PVDF film sensors for cantilever beam (SS: Simply Supported, F: Free, C: Clumped)

Boundary condition	Shaping function $\varphi_m(x)$ =strain $\varepsilon_m(x)$	Displacement $y_m(x)$
SS-SS	$\sin(\frac{\pi}{L}mx)$	$\sin(\frac{\pi}{L}mx)$
F-F	$\sin(\frac{\pi}{L}mx)$	$\sin(\frac{\pi}{L}mx) - \frac{2}{m\pi} \quad m:\text{odd}$ $\sin(\frac{\pi}{L}mx) + \frac{12}{mL\pi}(x-L/2) \quad m:\text{even}$
C-C	$\cos(\frac{2\pi}{L}mx)$	$\cos(\frac{2\pi}{L}mx) - 1$
C-F (cantilever)	$\cos\{\frac{\pi}{2L}(2m-1)x\}$	$\cos\{\frac{\pi}{2L}(2m-1)x\} - 1$

Fig. 2 Sketch of PVDF film sensor which has the shape of $\varphi_m(x)$ and is attached on the flat plate

わみ $w(x, y_i, t)$ ($i=1, 2, \dots$) を測定すれば、平板全体の振動を知ることができる。この直交関数 $\varphi_m(x)$ にフーリエ級数の $\sin k_mx$ や $\cos k_mx$ を用いると、上式の2回積分の部分は簡単に計算できて、それぞれ $-(1/k_m)^2 \sin k_mx$, $-(1/k_m)^2 \cos k_mx$ となる。

4. はりの場合のシミュレーション

前述したように PVDF フィルムをフーリエ級数形状にして貼り付けるとしても、貼り付ける個数はなるべく少なくしなければならない。多くのフィルムを重ねて層状にして貼り付けられればよいが、ずれが起きると測定精度が劣化してしまう。そこでいくつかのフィルムを並列に貼り付けることになるが、スペースの関係で貼れる数は限られてくる。したがって境界条件を考慮し、形状関数 $\varphi_m(x)$ に適切なフーリエ級数を選ばなければならない。そのためには、形状関数を固有モードに近い形にするのが合理的である。ここでは解析解のわかっているはりについて形状関数を決定し、前記の計測原理の妥当性を検証する。まずはりのひずみについて考えると、境界条件が単純支持または自由のときはその位置でひずみ(モーメント)が零になるが、固定の場合は零にならない。また単純支持の場合は変位が零で固定の場合は変位と傾きが零になる。さらに両端自由のはりの振動では重心移動が起こらない。これらのことを考慮して境界条件に対するはりの固有振動モードのひずみ分布 $\varepsilon_m(x)$ すなわち形状関数 $\varphi_m(x)$ と、変位分布 $y(x)$ を決めると表1のようになる。

表1で、はりの両端の境界条件が単純支持-単純支持のときは、 $\varphi_m(x)$ は固有関数に一致する。その他の場合は近似値である。 $\varphi_m(x)$ にこのような直交関数列を選べば、PVDF フィルムセンサは単純な形状で、出力は互いに独立とすることができる。そして $\varphi_m(x)$ を2回積分したとき変位関数 $y_m(x)$ を用いることにすれば、個々の $y_m(x)$ は境界条件を満足しているの

Fig. 3 Simulation model for vibration mode sensing of cantilever where Fourier shaped PVDF film sensors are attached

で c_0, c_1 を改めて求める必要はない。例として片持ばりの場合について述べる。

いま、図3のような片持ばりに PVDF フィルムを貼り付け、その出力を取り出すものとする。各フィルムの形状関数 $\varphi_m(x)$ は表1でC-Fの境界条件の $\cos\{(\pi/2L)(2m-1)x\}$ ($m=1, 2, \dots$) で、図3では一次と二次の形状のみ示しているが、さらに高次のものまで貼り付けられているとする。各 PVDF フィルムセンサの出力 $v_m(t)$ はひずみを $\varepsilon(x, t)$ とすると

$$v_m(t) = \Gamma_0^L \int_0^L \varphi_m(x) \varepsilon(x, t) dx$$

$$\propto \int_0^L \cos\left\{\frac{\pi}{2L}(2m-1)x\right\} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} dx \quad \dots (10)$$

である。式(7)、(8)で述べたように、この $v_m(t)$ は

(a) Strain: theoretical (b) Strain: Fourier synthesized

(c) Displacement: theoretical (d) Displacement: Fourier synthesized

Fig. 4 Comparison of the first mode between theoretical and Fourier synthesized distribution with respect to strain and displacement

(a) Strain: theoretical (b) Strain: Fourier synthesized

(c) Displacement: theoretical (d) Displacement: Fourier synthesized

Fig. 5 Comparison of the second mode between theoretical and Fourier synthesized distribution with respect to strain and displacement

ひずみ $\varepsilon(x, t)$ を $\varphi_m(x)$ で展開したときの係数に相当するから

$$\varepsilon(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} v_{im}(t) \cos\left\{\frac{\pi}{2L}(2m-1)x\right\} \quad \dots (11)$$

となる。比例係数を C とすると式(2)、(11)から

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = C \sum_{m=1}^{\infty} v_m(t) \cos\left\{\frac{\pi}{2L}(2m-1)x\right\} \quad \dots (12)$$

これよりはりの変位 $y(x, t)$ は式(9)と同様次のように書ける。

$$y(x, t) = C \sum_{m=1}^{\infty} v_m(t) \left(\frac{2L}{\pi(2m-1)}\right)^2 \times \cos\left\{\frac{\pi}{2L}(2m-1)x\right\} + c_0 x + c_1 \quad \dots (13)$$

ここで境界条件から決定された表1の変位関数列 $y_m(x)$ を用いると $y(x, t)$ は次のように表せる。

$$y(x, t) = C \sum_{m=1}^{\infty} v_m(t) \left(\frac{2L}{\pi(2m-1)}\right)^2 \times \left[\cos\left\{\frac{\pi}{2L}(2m-1)x\right\} - 1\right] \quad \dots (14)$$

次に片持ばりの固有関数 $p(x)$ は解析的に

$$p(x) = (\cos \lambda_l + \cos h \lambda_l)(\cos \lambda_x - \cosh \lambda_x) + (\sin \lambda_l - \sinh \lambda_l)(\sin \lambda_x - \sinh \lambda_x) \quad \dots (15)$$

と表される⁽⁶⁾。ここで λ_l は固有振動数の一次、二次、... に対応して $\lambda_l = 1.875, 4.694, 7.855, \dots$ の値をとる。いま、片持ばりには PVDF フィルムセンサが形状関数 $\varphi_m(x)$ の一次～四次まで貼り付けられているとする。片持ばりが一次～三次の固有振動をしているとき、センサ出力を式(11)、(13)により合成して求めた固有モードのひずみと変位を図4～6の(b)、(d)に示す。また図4～6の(a)、(c)には、比較のため式

(a) Strain: theoretical (b) Strain: Fourier synthesized

(c) Displacement: theoretical (d) Displacement: Fourier synthesized

Fig. 6 Comparison of the third mode between theoretical and Fourier synthesized distribution with respect to strain and displacement

(15)から求めたひずみと変位の理論解も示している。なお、これらの図では振幅の最大値が1となるように正規化してある。これらの図を見ると、ひずみ分布は少し誤差があるが、変位分布は理論解とよく一致していることがわかる。

5. 平板における実験

5.1 実験方法と実験結果 次に、一端固定、他端自由の平板に PVDF フィルムセンサを取付けて平板の固有モードを測定する場合を考える。平板の場合、 x 方向、 y 方向のひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ は曲げ剛性を D 、ポアソン比を ν として

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{h}{2D(1-\nu^2)} (M_x - \nu M_y) \\ \varepsilon_y = \frac{h}{2D(1-\nu^2)} (M_y - \nu M_x) \end{cases} \dots\dots\dots (16)$$

となり、 x 方向の自由端でモーメント M_x が零であっても、 M_y が零でなければひずみ ε_x は零にならない。このため、片持ばりのときに用いた形状関数は厳密には境界条件を満たさないが、自由端でのひずみ ε_x は固定端など他の場所に比べて小さいと考えられるので、片持ばりのときの形状関数を用いる。実験に用いた平板は図7に示すようにアクリル製で0.002 m厚、0.5 m×0.35 mの大きさがあり、片持ばりのように短辺を固定されている。PVDF フィルムは前述の片持ばりの場合と同様の形状関数で $\varphi_m(x)$ の四次のものまで貼っている。図7には二次のものまで示しているが、板の裏側に三次と四次のフィルムを貼っており、全部で16枚貼っている。1枚の PVDF フィルムの幅は0.02 mで、厚さは40 μ である。この平板にインパルスハンマで図7に示す点に衝撃加振力を加え、16個

の出力を同時に測定した。これは実験モード解析法と同様の原理で、固定した一点を加振し複数のセンサ出力の振幅と位相から固有振動モードを求めるためである。実験に使用した PVDF フィルムの圧電定数は、 $e_{31}=75 \text{ mC/m}^2$ 、 $e_{32}=6 \text{ mC/m}^2$ で、 $e_{31} \gg e_{32}$ となっている。図8に PVDF フィルムセンサの出力をFFTアナライザで周波数分析した結果の一例(振幅と位相)を示す。周波数が高くなるとダンピングが大きくなり、共振ピークが明りようでなくなるので、図8(a)に示すように下から四つの固有振動数を選んだ。そして各固有振動数で一つのセンサ出力を基準にし、他のセンサ出力に対する振幅比と位相差を求めた。一つのライン上では、はりのシミュレーションの場合と同様に四次の形状関数まで使ったことになる。これらの結果から式(14)を用いると、4本のラインで時間的に変化する変位分布が求まる。ただし式(14)の $v_m(t)$ は調和振動をしているとし、 $v_m(t)$ の振幅と位相は実験で求めた値を与えた。そしてそれぞれのラインを格子状に結び節点の振幅と位相を与えることで平板の振動モードを

(a) Amplitude

(b) Phase

Fig. 8 Frequency spectrum of the plate vibration measured by PVDF film sensor

Fig. 7 Experimental setup for sensing the vibration mode of cantilever-like flat plate by using PVDF film sensors

Fig. 9 Synthesized second order mode shape of the flat plate without interpolation

(a) Experiment (3Hz)

(b) Calculated (3.2 Hz)

Fig. 10 Comparison of the mode shape between experiment and calculation; first mode

(a) Experiment (18.5 Hz)

(b) Calculated (20 Hz)

Fig. 12 Comparison of the mode shape between experiment and calculation; third mode

(a) Experiment (9.5 Hz)

(b) Calculated (9.8 Hz)

Fig. 11 Comparison of the mode shape between experiment and calculation; second mode

表した。この計算には MATLAB を用いている。図 9 は求めた結果の一例で、二次の固有振動数のモードを示したものである。ここで x 方向の線が PVDF フィルムセンサを貼り付けた 4 本のラインを示している。また、 x 方向の分布は 25 分割し、全体を格子状にして図示している。

5.2 NASTRAN による計算結果との比較 次に図 10~13 は一次~四次のモードのそれぞれについて、測定値の y 方向を見やすさのためスプライン補間して図示したモード (a) と、実験に使用した平板を NASTRAN で固有値解析した固有モード (b) とを比較して示している。測定値、計算値とも比較のため静止状態の板と振動モードを重ね書きしている。また NASTRAN の計算では平板を 500×350 の要素に分

(a) Experiment (32 Hz)

(b) Calculated (33.8 Hz)

Fig. 13 Comparison of the mode shape between experiment and calculation; forth mode

割している。これらの図をみると実験結果が NASTRAN の計算結果とよく一致しており、振動モードのセンシングが良好に行われていることがわかる。なお NASTRAN の計算結果からもわかるように、四次までの固有振動モードで y 方向の変形は並進または傾きが支配的であり、 x 方向に比べて波数は低いので式 (6) で述べた計測原理に当てはまることがわかる。

6. 結 言

分布系のセンサである PVDF フィルムセンサをフーリエ級数形状にして構造物に貼り付け、それらの出力を合成して構造物の振動変位分布を計測する方法を提案した。そしてシミュレーションと実験により、はりや平板の振動分布を良好に測定できることを示した。本報では固有振動モードの測定結果を示したが、本手法は時間領域に適用できるので、過渡的な振動現

象の観測にも用いることができ、応用範囲が広いと思われる。なお、この研究は NEDO(新エネルギー・産業技術総合開発機構)および RIMCOF(次世代金属・複合材料研究開発協会)の「知的材料・構造開発プロジェクト」の一環として行ったものである。

文 献

- (1) 和田正信編電子材料ハンドブック, (1970), 432-438, 朝倉書店.
- (2) Tzou, H., Integrated distributed sensing and active vibration suppression of flexible manipulators using distributed piezoelectronics, *J Robotic Systems*, **6**-6 (1989), 745-767.
- (3) Lee, C. K., Theory of Laminated piezoelectric plates for the design of distributed sensors/actuators Part 1, *J Acoust. Soc. Am.*, **87**-3 (1990), 1144-1158.
- (4) Bruke, S. and Hubbard, J., Spatial filtering concepts in distributed parameter control, *J Dynamic Systems, Measurement and Control*, **112**(1990), 565-573.
- (5) 田中信雄, 菊島義弘, 黒田雅治, 機論, **61**-590, C(1995), 119-126.
- (6) 谷口修, 改訂振動工学, (1968), 160, コロナ社.