剛性リンクに載った弾性リンクからなる 2重倒立振子の安定化制御*

神本和昭*¹, 川辺尚志*², 吉田和信*³

Stabilizing Control for an Inverted-Double Pendulum System Consisting of an Elastic Link Mounted on a Rigid One

Kazuaki KAMIMOTO, Hisashi KAWABE*⁴ and Kazunobu YOSHIDA

*⁴ Hiroshima Institute of Tech., Dept. of Mechanical Engineering,
2-1-1 Miyake, Saeki-ku, Hiroshima-shi, Hiroshima, 731-5193 Japan

For an inverted-double pendulum system consisting of an elastic link mounted on a rigid one, its stabilization control techniques have been discussed by using a distributed-parameter modeling method taking the 2nd and 3rd vibration modes of the elastic beam as the residual modes, and by applying such control strategies as an LQ , a frequency-shaped LQ (simply shortened as $FSLQ$), a sliding mode control (SLM), and a frequency-shaped SLM control ($FSSLM$), from the viewpoint of the robust stability including the spillover problem. From the real system experiment taking the 1st mode of vibration as the control mode, it is found that even in the $FSLQ$ system, considerably stable control performance can be obtained, while in the LQ system, it is impossible to realize a stable system due to so-called control spillovers. Furthermore, it is demonstrated that the $FSSLM$ has not only the simultaneous suppression effect against the chattering and the spillover components, but also a better robust performance against parameter variations of the controlled system and applied disturbances than the $FSLQ$ system.

Key Words: Inverted-Double Pendulum, Elastic Link, Rigid Link, Frequency-Shaped LQ , Frequency-Shaped Sliding Mode, Robust Stability, Distributed-Parameter Modeling, Chattering, Spillover, Residual Mode

いて比較検討する。

1. 緒 言

スピルオーバー問題¹⁾やロバスト制御性能の面より、各種柔軟構造物のアクティブコントロール技術に関する研究が進んでいる²⁾。なかでも不安定機械系の代表である倒立振子系の安定化問題は、適用制御則の有用性を検証する身近な例である。倒立振子に関する研究は、直列型、並列型、剛性および弾性を含めて種々の多重構造^{3,4,5)}で検討されている。しかし直列型2重振子に関しては、剛性リンク結合構造に関する制御性能の検証が殆どで、自由度が多く、従って制御難度の大きくなる剛性リンク-弾性リンク結合の多重構造系でのモデリングやその安定化実験例はあまり見られない。

本報では、特に剛性-弾性リンク結合の直列型2重倒立振子系に、周波数成形 LQ 制御⁶⁾効果と対比する入力端周波数成形 SLM (Sliding mode control)制御則^{7,8)}を適用し、シミュレーションおよび実機の両面からスピルオーバー抑制効果や外乱に対するロバスト性等につ

2. モデリングと制御則

2・1 制御対象のモデリング 図1に剛性リンクに載った弾性リンクからなる直列型2重倒立振子のモデルを示す。使用する記号は以下の通りである。

- M_e : 台車の等価質量 [kg]
- D_e : 台車の水平移動の等価減衰係数 [Ns/m]
- G_e : 台車の水平駆動の等価ゲイン定数 [N/V]
- l_k : k 番目のリンク長 [m]
- m_k : k 番目のリンク質量 [kg]
- μ_k : k 要素に関する等価減衰係数 [Nms/rad]
- ρ_k : 線密度 [kg/m]
- I : 弾性梁の断面2次モーメント [m⁴]
- E : 弾性梁のヤング率 [N/m²]
- C_m : 弾性梁の内部減衰係数 [Ns/m]
- d : 弾性梁の厚さ [m]
- i_k, j_k : 直交座標系(i_k, j_k)における単位ベクトル

各リンクの始点0から微小要素 dr_k までの位置ベクトル x_{pk} は、次式のように表現できる。

$$\begin{aligned} x_{p1} &= (r_1 + S \sin \theta_1) \cdot i_1 - S \cos \theta_1 \cdot j_1 \\ x_{p2} &= (r_2 + \alpha_1 \sin \theta_{2a} - \alpha_2 \cos \theta_{2a}) \cdot i_2 \end{aligned} \quad (1)$$

* 原稿受付 2000年7月27日。

*¹ 学生員, 広島工業大学大学院。

*² 正員, 広島工業大学工学部(☎731-5193 広島市佐伯区三宅)。

*³ 正員, 島根大学総合理工学部(☎690-8504 松江市西川津町1060)。

E-mail: kawabe@cael.me.it-hiroshima.ac.jp

Fig.1 Schematic illustration for an inverted-double pendulum system consisting of a flexible link mounted on a rigid one

$$-(\alpha_1 \cos \theta_{2a} + \alpha_2 \sin \theta_{2a} + w) \cdot j_2 \quad (2)$$

$$\alpha_1 = S + l_1 \sin \theta_1, \alpha_2 = l_1 (1 - \cos \theta_1)$$

ここで、直交単位ベクトル (i_k, j_k) は角速度と共に回転することから次式の関係を得る。

$$\begin{cases} \dot{i}_1 = -\dot{\theta}_1 \cdot j_1, & \dot{j}_1 = \dot{\theta}_1 \cdot i_1, & \dot{r}_1 = 0 \\ \dot{i}_2 = -\dot{\theta}_{2a} \cdot j_2, & \dot{j}_2 = \dot{\theta}_{2a} \cdot i_2, & \dot{r}_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

次に、式(3)の関係を考慮して式(1),(2)を時間で2回微分し、さらに平衡状態近傍の微小運動を考え、非線形項を無視すると次式を得る。

$$\ddot{x}_{p1} = \ddot{S} \sin \theta_1 \cdot i_1 - (r_1 \ddot{\theta}_1 + \ddot{S} \cos \theta_1) \cdot j_1 \quad (4)$$

$$\ddot{x}_{p2} = \alpha \cdot i_2 - \beta \cdot j_2 \quad (5)$$

$$\alpha = \ddot{S} \sin \theta_{2a} + l_1 \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_{2a} - \theta_1) - w \ddot{\theta}_{2a}$$

$$\beta = r_2 \ddot{\theta}_{2a} + \ddot{S} \cos \theta_{2a} + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_{2a}) + \ddot{w}$$

上式においてリンクの i_k 方向(伸び方向)の運動はないと仮定し、 j_k 方向における各リンクの微小要素の運動の釣り合いを考える。

まず剛性リンク1に関しては

$$\rho_1 (r_1 \ddot{\theta}_1 + \ddot{S} \cos \theta_1) - \rho_1 g \sin \theta_1 = 0 \quad (6)$$

また弾性リンク2に関しては微小要素に作用するせん断力 $F(r_2, t)$ と曲げモーメント $M(r_2, t)$ の釣り合いから

$$\rho_2 \beta + EI w'''' + C_m I \dot{w}''' - \rho_2 g \sin \theta_{2a} = 0 \quad (7)$$

が得られる。ここで($\cdot$)は時間微分を、($'$)は空間変数 r_2 に関する微分を表す。これらの関係式(6),(7)を用いて、各々の力の釣り合い式を以下に述べる。

水平方向の力の釣り合いから

$$M_e \ddot{S} + D_e \dot{S} + \rho_1 \int_0^{l_1} (r_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \ddot{S}) dr_1 + \rho_2 \int_0^{l_2} \{ [r_2 \ddot{\theta}_{2a} + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_{2a}) + \ddot{w}] \cos \theta_{2a} + \ddot{S} \} dr_2 = G_e u \quad (8)$$

次に、支点1回りのモーメントの釣り合いから

$$\begin{aligned} & \rho_1 \int_0^{l_1} r_1 (r_1 \ddot{\theta}_1 + \ddot{S} \cos \theta_1) dr_1 + \rho_2 \int_0^{l_2} \{ [l_1 \cos(\theta_{2a} - \theta_1) + r_2] \\ & \cdot \{ r_2 \ddot{\theta}_{2a} + \ddot{S} \cos \theta_{2a} + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_{2a}) \} \} dr_2 \\ & + \rho_2 \int_0^{l_2} \{ l_1 \cos(\theta_{2a} - \theta_1) + r_2 \} \ddot{w} dr_2 - \rho_1 g \int_0^{l_1} r_1 \sin \theta_1 dr_1 \\ & - \rho_2 g \int_0^{l_2} \{ l_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_{2a} + w \cos \theta_{2a} \} dr_2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

また支点2回りのモーメントの釣り合いから

$$\begin{aligned} & \rho_2 \int_0^{l_2} \{ r_2 \ddot{\theta}_{2a} + \ddot{S} \cos \theta_{2a} + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_{2a}) \} dr_2 \\ & + \rho_2 \int_0^{l_2} r_2 \ddot{w} dr_2 - \rho_2 g \int_0^{l_2} \{ r_2 \sin \theta_{2a} + w \cos \theta_{2a} \} dr_2 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

さらに梁の微小要素の運動方程式として

$$\rho_2 \{ r_2 \ddot{\theta}_{2a} + \ddot{S} \cos \theta_{2a} + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_{2a}) + \ddot{w} \} + EI w'''' + C_m I \dot{w}''' - \rho_2 g \sin \theta_{2a} = 0 \quad (11)$$

の関係が得られる。次に、式(8)~(11)の相対角度 θ_{2a} に $\theta_{2a} = \theta_1 + \theta_2$ を代入し、微小運動と考え線形化を行いさらに、リンクの粘性摩擦 μ_k を考慮に入れモード分離法によって常微分方程式の形で表現する。

たわみ $w(r_2, t)$ は、 i 次モードのモード変数 $X_i(t)$ と固有関数 $\phi_i(r_2)$ を用いて次式のように表わされる。

$$w(r_2, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(r_2) \cdot X_i(t) \quad (12)$$

ここで、固有関数 $\phi_i(r_2)$ は境界条件(回転支持と他端自由)、すなわち

$$\phi_i'(0) = \phi_i'(l_2) = \phi_i(0) = 0 \quad (13)$$

$$\phi_i''(l_2) = \phi_i''(l_2) = 0 \quad (14)$$

により $v_i \cong (i + 0.25)\pi / l_2$ とおき

$$\phi_i(r_2) = \frac{1}{\sqrt{l_2}} \left[\frac{\sinh v_i r_2}{\sinh v_i l_2} + \frac{\sin v_i r_2}{\sin v_i l_2} \right] \quad (15)$$

となる。よって、直交条件を用いて弾性3次モードまでの有限次元近似を行うと次式を得る。

$$A \ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \Phi z = \Omega u \quad (16)$$

ただし、

$$z = [S \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad X_1 \quad X_2 \quad X_3]^T \quad (17)$$

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ J_2 & J_4 & J_5 & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ J_3 & J_5 & J_6 & P_{31} & P_{32} & P_{33} \\ \beta_1 & P_{41} & \varphi_1 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_2 & P_{42} & \varphi_2 & 0 & 1 & 0 \\ \beta_3 & P_{43} & \varphi_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\Gamma = \text{Block diagonal} [D_e \quad \mu_1 \quad \mu_2 \quad 2\zeta_1 \omega_1 \quad 2\zeta_2 \omega_2 \quad 2\zeta_3 \omega_3] \quad (19)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & K_2 & -\rho_2 g \xi_1 & -\rho_2 g \xi_2 & -\rho_2 g \xi_3 \\ 0 & K_2 & K_2 & -\rho_2 g \xi_1 & -\rho_2 g \xi_2 & -\rho_2 g \xi_3 \\ 0 & -\beta_1 g & -\beta_1 g & \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 g & -\beta_2 g & 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & -\beta_3 g & -\beta_3 g & 0 & 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\Omega = [G_e \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (21)$$

$$\begin{cases} J_1 = M_e + m_1 + m_2, J_2 = \frac{1}{2} m_1 l_1 + \frac{1}{2} m_2 l_2 + m_2 l_1 \\ J_3 = \frac{1}{2} m_2 l_2, J_4 = \frac{1}{3} m_1 l_1^2 + m_2 l_1 l_2 + m_2 l_1^2 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \\ J_5 = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2, J_6 = \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \\ P_{1i} = \rho_2 \xi_i, P_{2i} = \rho_2 (l_1 \xi_i + \eta_i), P_{3i} = \rho_2 \eta_i, P_{4i} = \varphi_i + l_1 \beta_i \\ K_1 = -\frac{1}{2} m_1 g l_1 - m_2 g l_1 - \frac{1}{2} m_2 g l_2, K_2 = -\frac{1}{2} m_2 g l_2 \\ \xi_i = \int_0^{l_2} \phi_i(r_2) dr_2, \eta_i = \int_0^{l_2} r_2 \phi_i(r_2) dr_2, \gamma_i = \int_0^{l_2} \phi_i^2(r_2) dr_2 \\ 2\xi_i \omega_i = C_m I v_i^4 / \rho_2, \beta_i = \xi_i / \gamma_i, \varphi_i = \eta_i / \gamma_i \quad (i=1,2,3) \end{cases} \quad (22)$$

運動方程式(16)は、状態変数 $x = [z \ z]^T$ を用いると

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (23)$$

ただし、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A^{-1}\Phi & -A^{-1}\Gamma \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ A^{-1}\Omega \end{bmatrix} \quad (24)$$

制御系設計に際しては、弾性1次モードまでを制御対象モード x_N とし残りを残留モード x_R とするため、式(23)を(必要な変換行列を $T_{NR} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ とする)

$$x = T_{NR} \begin{bmatrix} x_N \\ x_R \end{bmatrix} \quad (25)$$

の変換をした次の低次元化状態方程式を用いた。

$$\dot{x}_N = A_N x_N + B_N u \quad (26)$$

ただし、

$$x_N = [S \ \theta_1 \ X_1 \ \theta_2 \ \dot{S} \ \dot{\theta}_1 \ \dot{X}_1 \ \dot{\theta}_2]^T \quad (27)$$

$$x_R = [X_2 \ X_3 \ \dot{X}_2 \ \dot{X}_3]^T \quad (28)$$

$$\begin{cases} A_N = A_{NR11} - A_{NR12} A_{NR22}^{-1} A_{NR21} \\ B_N = B_{NR1} - A_{NR12} A_{NR22}^{-1} B_{NR2} \\ T_{NR}^{-1} A T_{NR} = \begin{bmatrix} A_{NR11} & A_{NR12} \\ A_{NR21} & A_{NR22} \end{bmatrix}, \quad T_{NR}^{-1} B = \begin{bmatrix} B_{NR1} \\ B_{NR2} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (29)$$

次に、出力方程式は、台車位置 S 、 k リンクの振子角 θ_{Pk} 、2 リンクの根元から $r_2 = r_e$ に取り付けられた位置の歪み ε であり以下になる。

$$y_N = [S \ \theta_{p1} \ \varepsilon \ \theta_{p2}]^T = C_N x_N \quad (30)$$

ここで、

$$C_N = \begin{bmatrix} C_{N1} \\ C_{N2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} E_1 = \frac{d}{2} \phi''(r_2) \Big|_{r_2=r_e} \\ e_1 = \phi'(r_2) \Big|_{r_2=0} \end{cases} \quad (31)$$

の関係がある。

2.2 制御則 本報では、無限次元システムに対して有限次元の制御器を構成し制御するので、制御系設計の段階では考慮していない高次モードを励起する恐れがある。従って、このようなシステムに対しては、スピルオーバー現象やパラメータ変動のようなモデル化誤差に対してロバストな制御器を構成する必要がある。ここでは、特に LQ 制御効果と対比するために採用した入力端周波数成形 SLM 制御について述べる。

2.2.1 周波数成形 SLM 制御則 制御スピルオーバー現象の補償と、スライディングモード制御の劣化因となるチャタリング抑制のために、制御入力に次式で示す1次のローパス特性を持たせる。

$$G_F(s) = \frac{\omega_0}{s + \omega_0} \quad (32)$$

このフィルター特性は、 $v = G_F(s)u$ とおく

$$\dot{x}_F = A_F x_F + B_F u \quad (33)$$

$$v = C_F x_F$$

となる。ただし $A_F = -\omega_0$, $B_F = 1$, $C_F = \omega_0$ とする。この手法の特徴は、 SLM 特有の高周波切り換えゲインの若干の低下は考えられるも、折れ点周波数 ω_0 に拠り制御帯域を限定するスピルオーバー抑制の超平面を設計できる便利さがある⁸⁾。また平滑(飽和)関数によりチャタリングとの同時抑制も可能である。

一方、台車位置決め制御には、摺動摩擦等の定値外乱による定常偏差が考えられるため1型のサーボ系を構成して補償する。目標値 S_m と台車変位 S との偏差 $e = S_m - S$ の積分値 x_m を次式のようにおく。

$$x_m = \int_0^t (S_m - S) dt \quad (34)$$

よって、式(26),(33),(34)を状態変数に含めた拡大系の状態方程式および切換え関数 σ は

$$\dot{x}^* = A^* x^* + B^* u + E^* S_m \quad (35)$$

$$\sigma = S^* x^*$$

ただし、

$$x^* = [x_m \ x_N^T \ x_F^T]^T \in \mathbb{R}^{10} \quad (36)$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & -C_{N1} & 0 \\ 0 & A_N & B_N C_F \\ 0 & 0 & A_F \end{bmatrix}, \quad B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_F \end{bmatrix}, \quad E^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

となる。式(35)の切換え超平面 S^* はシステムの零点を利用した設計法⁹⁾

$$\begin{cases} A^{*T} P + P A^* - P B^* B^{*T} P + Q^* = 0 \\ S^* = B^{*T} P \end{cases} \quad (38)$$

で決定する。制御入力 u は、最終スライディングモード制御法⁹⁾を用いて

$$u = -(S^* B^*)^{-1} (S^* A^* x^* + S^* E^* S_m) - k \frac{\sigma}{\|\sigma\| + \eta} \quad (39)$$

となる。ただし、 η は線形化幅である。このシステム構成図を図2に示す。なお最小次元観測器の設計には LTR 法¹⁰⁾を用いて、推定器ゲイン L を

$$L = P_q \bar{A}_{N12}^T R^{-1} \quad (40)$$

で決定した。ただし P_q は、 Q_0, R を重み行列とすると

$$\begin{cases} P_q \bar{A}_{N22} + \bar{A}_{N22} P_q - P_q \bar{A}_{N12}^T R^{-1} \bar{A}_{N12} P_q + Q(q) = 0 \\ Q(q) = Q_0 + q^2 \bar{B}_{N2} V \bar{B}_{N2}^T \end{cases} \quad (41)$$

より与えられる正定解である。ここに正則行列

Fig.2 Designed overall SLM control system shaped with a low-pass filter

$$T_o = \begin{bmatrix} C_N \\ 0_{4 \times 4} \quad I_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad (42)$$

を用いて

$$\bar{x}_N = T_o x_N \quad (43)$$

の状態変数の変換を行うと

$$T_o A_N T_o^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{N11} & \bar{A}_{N12} \\ \bar{A}_{N21} & \bar{A}_{N22} \end{bmatrix}, \quad T_o B_N = \begin{bmatrix} \bar{B}_{N1} \\ \bar{B}_{N2} \end{bmatrix} \quad (44)$$

また $Q_0 = \text{diag}[10 \ 10 \ 10 \ 10]$, $R = \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 1]$, $q=6$, $V=1$ を設定した。その時の重み $Q(q)$ および L は

$$Q(q) = \begin{bmatrix} 6.280e+02 & -2.427e+03 & -7.303e+01 & 3.391e+03 \\ -2.427e+03 & 9.546e+03 & 2.868e+02 & -1.332e+04 \\ -7.303e+01 & 2.868e+02 & 1.863e+01 & -4.007e+02 \\ 3.391e+03 & -1.332e+04 & -4.007e+02 & 1.862e+04 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$L = \begin{bmatrix} 6.672e+00 & -1.411e+00 & 4.885e-03 & 1.806e+01 \\ -1.411e+01 & 5.903e+01 & -1.558e-02 & -7.240e+01 \\ 1.239e-01 & -3.954e-01 & 1.149e-02 & -4.164e+00 \\ 2.024e+01 & -7.935e+01 & 3.820e-02 & 1.012e+02 \end{bmatrix} \quad (46)$$

となる。

以後この周波数成形型 SLM 制御則を $FSSLM$ と略称する。

また、周波数成形をしない場合 (状態は $x^* \in \mathbf{R}^{10} \rightarrow [x_m \ x_N]^T \in \mathbf{R}^9$) を単に SLM と略称する。

2.2.2 周波数成形 LQ 制御則 拡大プラント式 (35) に対して、 LQ ゲイン K^* は、状態 $x^* \in \mathbf{R}^{10}$ および制御入力 u にかかる重み係数行列を Q_K^* とするとき

$$K^* = -B^{*T} P^* \in \mathbf{R}^{1 \times 10} \quad (47)$$

として与える。ただし $P^* \in \mathbf{R}^{10 \times 10}$ は

$$A^{*T} P^* + P^* A^* - P^* B^{*T} P^* + Q_K^* = 0 \quad (48)$$

の正定解である。以後この周波数成形型 LQ 制御則を $FSLQ$ と略称する。

なお周波数成形をしない LQ 制御系の最適ゲイン K は、式 (35) において状態を $x^* \rightarrow x_K = [x_m \ x_N]^T \in \mathbf{R}^9$ に、 $A^* \rightarrow A_K \in \mathbf{R}^{9 \times 9}$, $B^* \rightarrow B_K \in \mathbf{R}^9$ とそれぞれ置き換えて得る。この場合の評価関数の重みをそれぞれ Q_K とし、以後この制御則を LQ と略称する。

3. 実験方法および装置

3.1 パラメータの設定 使用パラメータは、 $M_e = 4.4$ [kg], $D_e = 19.2$ [Ns/m], $G_e = 18.4$ [N/V], $l_1 = 0.375$ [m], $l_2 = 0.455$ [m], $m_1 = 0.160$ [kg], $m_2 = 0.027$ [kg], $\rho_1 = 0.427$ [kg/m], $\rho_2 = 0.059$ [kg/m], $\mu_1 = 3.388 \times 10^{-3}$ [Nms/rad], $\mu_2 = 1.979 \times 10^{-3}$ [Nms/rad], $I = 1.563 \times 10^{-13}$ [m⁴], $E = 206$ G [N/m²], $d = 0.0005$ [m], $C_m = 1.515 \times 10^8$ [Ns/m²] と設定する。ひずみゲージは、1

Fig.3 Frequency dependence of gain(ε/u)

次モードの腹となる $r_e \approx 0.15$ [m] に貼った。なお弾性梁の固有振動数は図3のゲイン特性 (ε/u) に示すように、1次モードは $f_1 \approx 8.7$ [Hz], 2次モードは $f_2 \approx 28.8$ [Hz] である。実験の特性は低次元化 (1次モード) 系の特性を示す。なお弾性梁の幅は 0.015 [m] である。

3.2 実験装置の構成 図4に実験装置構成図を示す。倒立振子駆動部はジャパン EM 製を、信号変換部はコンテック製を用いた。主プログラムは Turbo C で書き、サンプリング周期は、 LQ 制御系では 0.422 [ms], SLM 制御系では 0.476 [ms] である。

Fig.4 Overall experimental apparatus

4. 実験結果および考察

4.1 LQ 制御結果 図5は、重みを

$$Q_K = \text{diag} \begin{bmatrix} x_m & S & \theta_1 & X_1 & \theta_2 & \dot{S} & \dot{\theta}_1 & \dot{X}_1 & \dot{\theta}_2 \\ 5 & 10 & 1 & 1 & 1 & 30 & 1 & 500 & 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

に設定した場合の最適ゲイン

$$K = [-2.236e+0, 7.652e+0, 5.959e+1, -6.496e+2, 1.156e+2, 9.815e+0, 2.251e+1, -4.130e-1, 1.691e+1] \quad (50)$$

で制御した場合の実機実験結果を示す。重み行列 Q_K の

Fig.5 Real system control results via LQ

上行に、説明の便宜上重み係数に対応する各状態変数を示す。特に $S, \dot{S}, \dot{X}_1$ に対する重み係数は、台車の動き ($S, \dot{S}$ に関係) とひずみ振動の制動効果 ($\dot{X}_1$ に関係) との兼ね合いに注目して最適な状態を試行して決定した。同図 (a) は第2リンク (弾性梁) のひずみ ε 振動応答を、(b) は第1リンク、第2リンクの角度 θ_{p1}, θ_{p2} を、(c) は台車の水平移動 S を、(d) は制御入力 u をそれぞれ示す。最初は安定化の状態が保たれているが、2~3[s] 後から不安定になっていることがわかる。式 (49) に示す各状態にかかる重みをいろいろ調節したが、シミュレーションでは安定化されても LQ 制御だけでは実機系の安定化は難しかった。この主因は後述するが、制御対象外モードである2次以降のひずみ振動に関係する制御スプilloーバに起因すると考えられる。

そこで式 (32) で述べたローパスフィルタ $\omega_0 = 2\pi f_0$ ($f_0 = 27$ [Hz]) で周波数成形した $FSLQ$ で制御したシミュレーション結果を図6に示す。この場合の重みは

$$Q_{K^*}^{\#} = \text{diag} \begin{bmatrix} x_m & S & \theta_1 & X_1 & \theta_2 & \dot{S} & \dot{\theta}_1 & \dot{X}_1 & \dot{\theta}_2 & x_F \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$= \text{diag} \begin{bmatrix} 5 & 10 & 1 & 1 & 1 & 30 & 1 & 500 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

に設定し、最適ゲインは

$$K^{\#} = [-2.236e+0, 7.664e+0, 5.930e+1, -4.607e+2, \\ 1.195e+2, 9.516e+0, 2.286e+1, -3.226e+0, \\ 1.739e+1, 5.528e+1] \quad (52)$$

である。同図 (a) は全ひずみ (3次モードまで) 特性を示す。(e) は2次ひずみ成分だけをクローズアップしたものである。式 (49), (51) の比較より、基本的には同じ設計条件であるが、フィルターを前置することにより安定した制御応答が得られることがわかる。このことを図7の LQ 制御と $FSLQ$ 制御の場合の制御器伝達関数の周波数特性面から考えてみる。 u/ε 特性に注目する

Fig.6 Simulation control based on $FSLQ$

Fig.7 Frequency dependence of controllers

と1次モードに関しては両者とも良く補償対応しているが、それより高域では $FSLQ$ 制御器がゲイン低下するに対して、 LQ では当然フラットであり、高次モードを励起し易い形であることがわかる。

図8, 9に、図6の設計条件下での $FSLQ$ による実機制御結果を示す。図8は、約1.7[s] 経過後、第2リン

Fig.8 Real system control based on $FSLQ$ under some impulsive disturbances

Fig.9 Real system control based on $FSLQ$ under some stepwise disturbances

Fig.10 Stabilized view of the inverted-double pendulum

ク(弾性梁)に指力によるインパルス状外乱を与えた。ものであるが安定化状態は維持されている。また図9は、倒立状態から台車を0.4[m]移動させたステップ応答結果である。外部入力を加えたにも関わらず安定化が保たれておりかなり良い制御設計といえる。しかしFSSLMでは更に良好なロバスト制御性が得られることを述べる。なお図10は倒立状態の写真である。

図11は、式(38)において

$$Q^{\#} = \text{diag}[5 \ 10 \ 1 \ 1 \ 1 \ 10 \ 1 \ 100 \ 1 \ 1] \quad (53)$$

と設定して得られた切り換え関数行列

Fig.11 Simulation control via FSSLM

$$S^{\#} = [-2.236e+0 \ 6.851e+0 \ 4.217e+1 \ 8.902e+1 \ 9.517e+1 \ 6.540e+0 \ 1.727e+1 \ 7.325e+0 \ 1.369e+1 \ 4.069e+1] \quad (54)$$

によるFSSLMのシミュレーション制御結果を示す。良好な制振制御性が得られている。プラントの入力端に低域フィルター(式(32))の無いSLM制御だけではLQ制御だけの場合と同様に安定性は保たれなかった。ここで平滑関数の設計値は $k=0.9, \eta=0.0$ とした。なお、周波数成形LQ制御系と周波数成形SLM制御系とは最適な重み係数の設定に若干の差があるが、同一座標系での相対的比較として意義づけらる。

次に同じ条件で実機制御した結果を図12、13、14に示す。図12は、約1[s]後に図8のFSLQ制御の場合と同様に指力によるインパルス状外乱を与えた場合の制御応答を示す。図8と比較して、図12(a)で発生したひずみ ε 振動は大きいがスピルオーバー成分による励起も無く振動減衰も良い。また同図(b)で示す各リンク角 θ_{p1} 、 θ_{p2} の変動特性は逆に小さく、台車の変動 S (c)

$$Q^{\#} = \text{diag}[5 \ 10 \ 1 \ 1 \ 1 \ 10 \ 1 \ 100 \ 1 \ 1]$$

Fig.12 Real system control via FSSLM

Fig.13 Real system control via FSSLM

や制御入力 $u(d)$ も相対的に小さめである。なお、図 13 は、倒立状態から台車を $0.4[m]$ 移動させたステップ応答結果を示す。図 9 系と比較して、図 13(c) の台車の目標到達時間が速いのに対して同図(a),(b) のひずみや各振子角の変動は小さく抑制できている。すなわち $FSLQ$ 制御に比べて、 $FSSLM$ 制御系の方が変動外乱に対する収束性が良いと考えられる。なお重力設定条件が両者で若干異なるのは、プラントの非線形要素を含む不確定パラメータに対する制御則設定条件差に関係するものと考えられる。

図 14 は第 2 リンク (弾性梁) 先端に $10[g]$ の定値外乱を与えた上に、さらに図 12 の場合と同様、指力によるインパルス状外乱を与えた制御結果を示す。 $FSLQ$ 制御では安定化できなかったが、本例からもわかるように $FSSLM$ 制御系でのロバスト性能の卓越性が言える。

低域フィルターのカット周波数を低くしすぎると高次モードの励起抑制には利くが、一方において SLM 制御特有の高周波域でのロバスト性が低下する原因ともなることに注意すべきである。従って、フィルターの遮断周波数と励起振動として作用し易いスピルオーバー範囲とをよく考慮して設計適用する必要がある。

5. 結 言

剛性・弾性直列型 2 重倒立振子のモデリングとそれに基づく周波数成形 LQ およびスライディングモード制御 (SLM) 系を設計し、ミュレーションおよび実機の両面からスピルオーバー問題を含むロバスト安定性について検証した。

- (1) 1 次ひずみ振動モードだけを制御モードとした周波数成形 LQ でも実機制御においてかなりの安定性を示す。
- (2) 周波数成形 SLM では、飽和関数と低域フィルターとの併用により、チャタリングとスピルオーバーの同時抑制効果を考慮した超平面の設計が可能であり、パラメータの変動やインパルスの印可外乱に対しても (周波数成形 LQ に比べて) より良好なロバスト安定性を示す。
- (3) 低域フィルターの遮断周波数は、スピルオーバー帯域成分と (ロバスト性に関する) SLM 切り換えゲイン維持との兼ね合いで設定する必要がある。
- (4) ゲイン設定の容易さや真状態量の利用面から、ここでは最小次元観測器を用いたが、広域側の開ループゲイン減衰がより良好な全次元観測器併合によるロバスト性の検討については今後の課題とする。

$$Q^* = \text{diag}[5 \ 10 \ 1 \ 1 \ 1 \ 10 \ 1 \ 10 \ 1 \ 1]$$

Fig.14 Real system control via $FSSLM$

なお本研究は、第 2 ハイテクセンターから一部助成を受けたことを付記する。

文 献

- (1) Balas, M. J., IEEE Trans., AC-23(1978), 673-679.
- (2) 例えば吉田, 機誌, 32-4(1993), 276-283.
- (3) 西村, 大貫, 野波, 戸谷, 計測自動制御学会論文集, 32-7(1996), 1035-1042.
- (4) 杉江, 岡田, システム/制御/情報, 6-12(1993), 543-551.
- (5) 川谷, 山口, 計測自動制御学会論文集, 29-5 (1993), 572/580.
- (6) 木田, 池田, 山口, 計測自動制御学会論文集, 25-4 (1989), 448-454.
- (7) Iordanou, H. N., et al. IEEE Trans. Contr. Syst. Tech., 5-2(1997), 254-260.
- (8) 伊藤, 野波, 機論(C), 63-611(1997), 120-127.
- (9) 野波, 田, スライディングモード制御, コロナ, (1994), 64.
- (10) 木村, 藤井, 森, ロバスト制御, コロナ, (1994), 134.