周期入力による振子の運動制御*

梶原 秀一^{*1}, 橋本 幸男^{*2}, 土谷 武士^{*3}

Motion Control of a Pendulum via Periodic Input

Hidekazu KAJIWARA^{*4}, Yukio HASHIMOTO and Takeshi TSUCHIYA^{*4} Department of Electronic Engineering, Kushiro National College of Technology,
2-32-1 Nishi, Otanoshike, Kushiro-shi, Hokkaido, 084-0916 Japan

Periodic input sometimes controls mechanical systems dynamically. We have investigated a pendulum system from a view point of such a dynamic control. In this paper, we present the motion control that stabilizes the pendulum to a desired limit cycle by a periodic input. In our method, the periodic input is added so that the energy of the pendulum may become the energy of the desired limit cycle, and is consisted of a periodic solution of van der Pol's equation which is inputted the angle of the pendulum. Experimental results support the effectiveness of the proposed method.

Key Words: Motion Control, Vibration Control, Swing-Up Control, Entrainment, Limit Cycle

1. はじめに

メカニカルシステムに周期的な入力をタイミングよく加えることにより、制御目的を達成できる場合がある。著者らはこれまでに、このようなシステムとして、皿まわしの制御⁽¹⁾、ブランコの振れ制御⁽²⁾、鉄棒ロボットの運動制御⁽³⁾、回転型2重倒立振子の振り上げ制御⁽⁴⁾などを取り上げてきた。文献(1)では竿のたわみも考慮した数値モデルを解析することにより、皿を安定に回すことができるタイミングが存在することを示し、竿を振る周期に皿の回転周期が同期する周波数引き込み現象を利用すると、皿の状態量を観測しないオープンループの制御でも、簡単に皿まわしが実現できることを示した。文献(2)(3)では、周期入力によりシステムを大域的に制御できるタイミングを解析し、非線形振動子の引き込み現象を利用して周期入力と制御対象を一定の位相関係で同期させて制御する方法について提案した。文献(4)では、文献(2)(3)で提案した手法を回転型2重倒立振子の振り上げ制御に適用し、ロバストな振り上げ制御が実現できることを示した。文献(1)~(4)の制御では、周期入力とシステムを同期させるタイミングを一定とし、システムを「動

的狀態」にすることで制御目的を達成したが、このタイミングを積極的に変化させることで、目標とするエネルギーを持つようにシステムを動的に安定化させる制御方法も簡単に構築できるのではないかと考えられる。そこで、本論文では制御対象として、回転型倒立振子を取り上げ、安定な平衡点まわりで目標とするリミットサイクルに振子の周期運動を安定化させる制御問題を考え、システムをリアプノフの意味で安定化させる制御を提案する。

本論文ではまず、回転型倒立振子のダイナミクスを導出し、周期入力により振子を制御できるタイミングを、アームを周期的に動かした時の振子のエネルギー変化率から解析する。次に、アームと振子の運動を同期させる方法として、van der Pol 方程式に入力として振子の角度を加え、その周期解を利用して、アームの軌道を生成する方法を示す。その後、目標とするリミットサイクルに振子の周期運動を安定化させるため、振子と周期入力を同期させるタイミングを変化させて、振子のエネルギーを目標リミットサイクルのエネルギーに一致させる方法について述べる。最後に、本研究の手法の有効性を実機により確認した結果について示す。

2. 制御対象とダイナミクス

本研究では、制御対象として図1に示すような回転型倒立振子を取り上げる。図1のシステムにおいて、

* 原稿受付 2001年3月7日。

^{*1} 正員、釧路工業高等専門学校電子工学科 (〒084-0916 釧路市大楽毛西2-32-1)。^{*2} 室蘭工業大学電気電子工学科。^{*3} 正員、北海道大学大学院工学研究科。

E-mail: kajiwar@elctro.kushiro-ct.ac.jp

Fig. 1 Coordinate system of an inverted pendulum

モータ軸と振子の回転軸との交点を原点として水平面内に X 軸, Y 軸をとり, 鉛直方向下向きに Z 軸をとる. モータ軸および振子の回転角は, 反時計まわりを正とする. ここで, 以下の記号を定義する.

- θ_a : アームの回転角 [rad]
- θ_1 : 振子の回転角 [rad]
- ℓ_a : アームのモータ軸から振子支点部までの長さ [m]
- ℓ_1 : 振子の回転部から重心までの長さ [m]
- I_a : モータ軸まわりのアームの慣性モーメント [kgm^2]
- I_1 : 振子の重心まわりの慣性モーメント [kgm^2]
- m_1 : 振子の質量 [kg]
- D : 振子回転部の粘性摩擦係数 [Nsec/m]
- τ : モータの発生トルク [Nm]
- g : 重力加速度 $= 9.81 [\text{m/s}^2]$

振子の重心位置を (X_g, Y_g, Z_g) とすると, X_g, Y_g, Z_g は次式で表される.

$$X_g = \ell_a \cos \theta_a - \ell_1 \sin \theta_1 \sin \theta_a \quad (1)$$

$$Y_g = \ell_a \sin \theta_a + \ell_1 \sin \theta_1 \cos \theta_a \quad (2)$$

$$Z_g = \ell_1 \cos \theta_1 \quad (3)$$

このとき, システムの運動エネルギー T_s , ポテンシャルエネルギー U_s , 損失エネルギー D_s は次式となる.

$$T_s = \frac{1}{2} I_a \dot{\theta}_a^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{X}_g^2 + \dot{Y}_g^2 + \dot{Z}_g^2) \quad (4)$$

$$U_s = -m_1 g \ell_1 \cos \theta_1 \quad (5)$$

$$D_s = \frac{1}{2} D \dot{\theta}_1^2 \quad (6)$$

厳密な回転型倒立振子の運動エネルギーは, 振子が傾きながら原点まわりに回転するエネルギーも考慮しなければならないが, ここでは使用する振子は薄い板であるとし式 (4) ではこのエネルギーは考慮していない.

式 (4)(5)(6) をラグランジュの運動方程式に代入し,

倒立振子の運動方程式を求めると次式ようになる.

$$J \ddot{\theta}_a + m_1 \ell_a \ell_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}_a \dot{\theta}_1 \sin(2\theta_1) - m_1 \ell_a \ell_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 = \tau \quad (7)$$

$$m_1 \ell_a \ell_1 \ddot{\theta}_a \cos \theta_1 + (I_1 + m_1 \ell_1^2) \ddot{\theta}_1 + D \dot{\theta}_1 - m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}_a^2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 + m_1 g \ell_1 \sin \theta_1 = 0 \quad (8)$$

$$J = I_a + m_1 \ell_a^2 + m_1 \ell_1^2 \sin^2 \theta_1$$

3. 振子の制御タイミングの解析

ここでは, 周期的な入力により振子の運動を制御できるタイミングを, 振子のエネルギーを時間について微分したエネルギー変化率から解析する.

振子のみの運動エネルギーを T_p , ポテンシャルエネルギーを U_p とすると, 各エネルギーは次式で表される.

$$T_p = \frac{1}{2} (I_1 + m_1 \ell_1^2) \dot{\theta}_1^2 \quad (9)$$

$$U_p = -m_1 g \ell_1 \cos \theta_1 \quad (10)$$

よって, 振子の全エネルギー E_p は次式となる.

$$E_p = T_p + U_p \quad (11)$$

上式を時間について微分し式 (8) を考慮して整理すると, 振子のエネルギー変化率は次式となる.

$$\dot{E}_p = -m_1 \ell_1 \ell_a \ddot{\theta}_a \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}_a \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_1 - D \dot{\theta}_1^2 \quad (12)$$

アームの角度 θ_a を時間的に変化させた時の振子のエネルギー変化率を上式より求めるためには, 振子の運動 θ_1 を式 (8) から求める必要がある. しかし, 式 (8) は非線形な微分方程式のために厳密に解を求めることは難しい. そこでここでは, 振子の支点部の摩擦とアームの移動は小さく, 振子のエネルギーはゆるやかに変化すると仮定して解析を進めることにする.

いま, 振子を制御するために振子の振れに同期させて次式に従ってアームを移動させたとする.

$$\theta_a = \sigma \cos(\omega t + \phi) \quad (0 < \sigma \ll 1) \quad (13)$$

ただし, ϕ は時間的にゆるやかに変化する変数であるとする.

このとき, 振子の支点部の摩擦は小さく ($0 \leq D \ll 1$), アームの移動幅 σ も十分小さいとしているので, 式 (13) で振子の支点を動かしても, 振子の周期と振幅は急激には変化しないと考えられる. そこで, (8) 式より, 摩擦 D と $\dot{\theta}_a, \ddot{\theta}_a$ に関する項は微小であるとして

省略し、振子の運動は以下の単振子の運動方程式の解で近似できるとする。

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{m_1 g \ell_1}{I_1 + m_1 \ell_1^2} \sin \theta_1 \quad (14)$$

このとき、振子の運動は周期が

$$T = 4 \sqrt{\frac{I_1 + m_1 \ell_1^2}{m_1 g \ell_1}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\rho}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \rho}} \quad (15)$$

$$k = \sin \frac{\theta_{1m}}{2}$$

ただし、 $\dot{\theta}_1 = 0$ のとき $\theta_1 = \theta_{1m}$ となる周期関数となるから⁽⁵⁾、振子の運動は

$$\theta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) \quad (16)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

とフーリエ級数展開できる。また、式(14)の両辺に $\dot{\theta}_1$ をかけて積分すると、次式となる。

$$\dot{\theta}_1^2 = \frac{m_1 g \ell_1}{I_1 + m_1 \ell_1^2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_{1m}) \quad (17)$$

さらに、式(14)(17)を $\sin \theta_1, \cos \theta_1$ について整理すると次式となる。

$$\sin \theta_1 = -\frac{I_1 + m_1 \ell_1^2}{m_1 g \ell_1} \ddot{\theta}_1 \quad (18)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{I_1 + m_1 \ell_1^2}{m_1 g \ell_1} \dot{\theta}_1^2 + \cos \theta_{1m} \quad (19)$$

ここで、解析を簡単にするために、振子の周期解式(16)の高調波成分は微小であるとして、振子の周期運動の基本周期

$$\theta_1 = a_1 \cos(\omega t) \quad (20)$$

のみを考えて、さらに解析を進める。

このとき、振子の全エネルギーは次式のように表現できる。

$$E_p = \frac{a_1^2 \omega^2 (I_1 + m_1 \ell_1^2)}{2} - m_1 g \ell_1 \quad (21)$$

ただし、 $\theta_1 = 0$ のとき

$$E_p = -m_1 g \ell_1 \cos a_1 \quad (22)$$

ただし、 $\dot{\theta}_1 = 0$ のとき。

式(21)(22)より次式の関係を得る。

$$\frac{I_1 + m_1 \ell_1^2}{m_1 g \ell_1} = \frac{2(1 - \cos a_1)}{a_1^2 \omega^2} \quad (23)$$

式(23)を式(18)(19)に代入して整理すると

$$\sin \theta_1 = -\frac{2(1 - \cos a_1)}{a_1^2 \omega^2} \ddot{\theta}_1 \quad (24)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{2(1 - \cos a_1)}{a_1^2 \omega^2} \dot{\theta}_1^2 + \cos a_1 \quad (25)$$

となる。

式(24)(25)、および式(13)(20)を時間について微分したものを式(12)に代入し、1周期 $2\pi/\omega$ にわたって時間平均をとると次式となる(時間平均を*で表す)。

$$\dot{E}_p^* = A \sin \phi - \frac{D a_1^2 \omega^2}{2} \quad (26)$$

$$A = \frac{m_1 \ell_1 \ell_a \sigma a_1 \omega^3}{8} (3 + \cos a_1)$$

ただし、 σ^2 に関する項は微小であるとして省略した。

上式より、振子とアームを同期させるタイミング(位相 ϕ)により、振子のエネルギー変化率を制御できることがわかる。

4. 引き込みを利用した振子の制御タイミングの実現

前節では、アームと振子の運動を同期させるタイミングにより、振子のエネルギーを制御できることを示した。本章では、任意の位相 ϕ でアームと振子を同期させる方法について述べる。

前章の解析では、振子が式(16)で運動しているときその運動に合わせて式(13)でアームを動かしたときのエネルギー変化率を解析した。式(13)式を加法定理を使って展開すると次式となる。

$$\theta_a = \sigma (\cos \phi \cos \omega t - \sin \phi \sin \omega t) \quad (27)$$

式(16)の高調波成分は微小であるとして上式は次式のように変形できる。

$$\theta_a = \sigma (\cos \phi A G_1 \theta_1 - \sin \phi A G_2 \dot{\theta}_1) \quad (28)$$

ただし、 $A G_1, A G_2$ は $\theta_1, \dot{\theta}_1$ の振幅を1にする変数よって、振子の角度と角速度をフィードバックして上式にしたがってアームを制御すると、振子とアームを任意の位相で同期でき、振子を制御できることがわかる。しかし、振子の初期状態が $\theta_1 = \dot{\theta}_1 = 0$ のときは、 $\theta_a = 0$ となってアームが動かず、静止した状態からは振子を制御できない。そこで、本研究では非線形振動子の引き込み現象を利用してこの問題を解決することを考える。

4.1 非線形振動子の引き込み現象 引き込み現象(同期または同調現象と呼ばれる)とは、二つの周期的現象が影響しあう結果、元来は異なった周期を持っているのに完全にそれが一致する現象である⁽⁶⁾。引

き込み現象には固有周期の異なる複数の自律振動子が相互に影響することにより、すべて同じ周期で振動するようになる相互引き込みと、周期的な外力が振動子の自由振動を引き込む強制引き込み現象がある。本節では、非線形振動子に外力として振子の運動を加え、強制引き込みを利用して振子と振動子の周期解を同期させる方法について述べる⁽²⁾。

非線形振動子として、振子の角度を入力とする van der Pol 方程式を考える。

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - \dot{x}^2)\dot{x} + \Omega^2 x = K\theta_1 \quad (29)$$

ただし、 ε, Ω, K は正の定数

振子が式 (16) で運動しているとき、自由振動と強制振動が共存すると仮定し式 (29) の解が

$$x = \alpha \cos(\Omega t + \Psi) + \beta \cos(\omega t + \psi) \quad (30)$$

で与えられるとする。

ここで、強制振動の解として基本周期のみを考えているが、これは式 (26) より、振子のエネルギー変化率に関係している周波数成分として基本周期だけを考えているからである。

式 (30) を式 (29) に代入して、 Ω, ω の項だけを式 (29) からひろい、 $\sin, \cos$ の項から

$$\begin{aligned} B_1 \cos \Psi &= 0 \\ B_1 \sin \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \frac{K a_1 B_3}{B_2^2 + B_3^2} \\ \sin \psi &= \frac{K a_1 B_2}{B_2^2 + B_3^2} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \alpha \left(1 - \frac{3}{4} \alpha^2 \Omega^2 - \frac{3}{2} \beta^2 \omega^2 \right) \\ B_2 &= \beta \varepsilon \omega \left(1 - \frac{3}{2} \alpha^2 \Omega^2 - \frac{3}{4} \beta^2 \omega^2 \right) \\ B_3 &= \beta (\Omega^2 - \omega^2) \end{aligned} \quad (33)$$

を得る。よって、式 (31)(32) より次式の関係を得る。

$$\alpha \left(1 - \frac{3\alpha^2 \Omega^2 + 6\beta^2 \omega^2}{4} \right) = 0 \quad (34)$$

$$\beta^2 (C_1^2 + \varepsilon^2 C_2^2) = K^2 a_1^2 \quad (35)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \Omega^2 - \omega^2 \\ C_2 &= \omega^2 \left(1 - \frac{6\alpha^2 \Omega^2 + 3\beta^2 \omega^2}{4} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

式 (34) より、方程式の一つの解として $\alpha = 0$ を得る。これは自由振動が抑制されることを意味する。もう一つの解 $3\alpha^2 \Omega^2 + 6\beta^2 \omega^2 = 4$ は、自由振動

$$\alpha^2 = \frac{4 - 6\beta^2 \omega^2}{3\Omega^2} \quad (37)$$

を与えることがわかる。よって強制振動の振幅が以下の条件を満たすとき

$$\beta^2 \geq \frac{2}{3\omega^2} \quad (38)$$

自由振動が抑えられ ($\alpha = 0$)、振子の運動と van der Pol 方程式の解が同期する引き込み現象が起こることになる。

いま、 $0 < \varepsilon \ll K$ とすると式 (35) より強制振動の振幅を得る。

$$\beta^2 = \frac{K^2 a_1^2}{(\Omega^2 - \omega^2)^2} \quad (39)$$

よって、 $\Omega \approx \omega$ 、または K が十分大きいとき上式は式 (38) の条件を満たし、引き込み現象が起こることがわかる。また、式 (39) を式 (32) に代入して整理すると、

$$\psi = \tan^{-1} \left\{ \frac{-3\varepsilon K^2 a_1^2 \omega^3}{4(\Omega^2 - \omega^2)^3} \right\} \quad (40)$$

の関係を得る。よって、上述の引き込み条件を満たして振子の運動と非線形振動子の周期解が同期しているとき、式 (40) より周期解の位相は $\psi = -\pi/2$ となり、van der Pol 方程式の解は

$$x = \beta \sin(\omega t) \quad (41)$$

となることわかる。

4.2 非線形振動子の周期解を利用したアームの軌道生成 前節の解析により、van der Pol 方程式に外力として振子の角度を加えると、その周期解は振子の運動と一定の位相差で同期することを示した。そこで、方程式の周期解を利用してアームの軌道を次のように構成することを考える。

$$\theta_a = \sigma(\cos \phi A G_3 \dot{x} - \sin \phi A G_4 x) \quad (42)$$

ただし、 $A G_3, A G_4$ は $\dot{x}, x$ の振幅を 1 にする変数。

van der Pol 方程式の周期解と振子の運動が同期しているとき、周期解式 (41) と式 (41) を時間について微分したものを式 (42) に代入すると式 (13) が得られることから、方程式の周期解を利用してアームの軌道を構成しても、任意の位相でアームと振子を同期させることができる。また、van der Pol 方程式は外力がない場合 ($\theta_1 = 0$) でも、自励発振し周期解を生じることから、上式は振子が静止した状態でもアームが周期的に動き、振子に微小振動を生じさせることができる。この微小振動が式 (16) で与えられる時、 $\Omega \approx \omega$ 、または K を大きく選んでおくと、自励発振は抑制され周期解 x と振子の運動 θ_1 が同期する引き込み現象

が起き、結果的にアームと振子を任意の位相で同期できる。

以上のことから、van der Pol 方程式の周期解を利用してアームの軌道を構成することにより、任意の位相でアームと振子を同期させることができ、さらに方程式の自励発振を利用して振子が静止した状態からでも振子を制御できることがわかる。

5. 周期入力による振子の運動制御

3章では、周期入力により振子を制御できるタイミングを振子のエネルギー変化率より解析し、振子と周期入力とを同期させるタイミングにより振子を制御できることを示した。さらに、4章では振子と周期入力とを任意の位相差で同期させて、振子を制御する方法について述べた。この制御において、振子と周期入力とを同期させるタイミングを一定とすると、振子のエネルギーを増加または減少させて、振子の振り上げまたは振れ止め制御を簡単に実現することができる⁽⁴⁾。以上の結果をふまえ、本論文では、振子と周期入力とを同期させるタイミングを積極的に変化させて、目標とするエネルギーを持つように振子の周期運動を制御することも簡単に実現できるのではないかと考えた。そこで本章では、アームを周期的に動かして振子を目標とするエネルギーを持つリミットサイクルに安定化させる問題を考える。

いま、振子のエネルギー E_p^* が目標リミットサイクルのエネルギー E_d となるように位相 ϕ を以下のように構成する。

$$\phi = \sin^{-1}(F) \quad (43)$$

$$F = \begin{cases} 1 & (s > 1) \\ s & (|s| \leq 1) \\ -1 & (s < -1) \end{cases} \quad (44)$$

$$s = f_p e + f_i \int_0^t e dt' \quad (45)$$

$$e = E_d - E_p^* \quad (46)$$

式(43)を式(26)に代入して整理すると、 $s < -1$ のときは $\dot{E}_p^* < 0$ となり、振子のエネルギーは単調に減少することがわかる。また、 $s > 1$ のときは $\dot{E}_p^* > 0$ となる条件

$$A > \frac{Da_1^2 \omega^2}{2} \quad (47)$$

より、以下の条件

$$\sigma > \frac{4Da_1 \omega}{m_1 \ell_a \ell_1 (3 + \cos a_1)} \quad (48)$$

を満たすようにアームの振幅 σ を選んでおくと、振子のエネルギーは単調に増加することがわかる。

Table 1 Physical Parameters

$\ell_a=0.16$	$\ell_1=0.09$	$I_1=8.4 \times 10^{-5}$
$m_1=0.03$	$D = 1.0 \times 10^{-5}$	$I_a=2.0 \times 10^{-3}$

いま、振子のエネルギーが単調に減少または増加して $|s| \leq 1$ となった場合は、式(43)を式(26)に代入し

$$\dot{e} = -\dot{E}_p^* \quad (49)$$

$$\ddot{e} = -\ddot{E}_p^* \quad (50)$$

の関係を考慮して式(26)を整理すると

$$\ddot{e} + Af_p \dot{e} + Af_i e = 0 \quad (51)$$

となることから、上式が漸近安定となるように f_p, f_i を選ぶことにより時間 $t \rightarrow 0$ のとき $e \rightarrow 0$ となって、 $E_p^* = E_d$ が実現でき、振子の周期運動を目標リミットサイクルに安定化できることがわかる。

6. 実験

本章では、これまで述べた制御方法の有効性を確認するために、実機により検証を行った結果について述べる。

6.1 実験方法 表1に実験に使用した回転型倒立振子の各パラメータを示す。制御器には NEC 製 PC9821As を使用し、制御プロセスは C 言語で記述、制御周期は 1[msec] で行った。制御器の出力は 8 ビットの D/A 変換器を通して増幅器に送られモータを駆動する。モータと振子の回転角度は各軸部に取り付けたロータリエンコーダ (400[P/R]) により観測し、角速度はこの値の制御周期ごとの後退差分値を用いた。アームの軌道を構成する van der Pol 方程式の解は制御周期ごとに 4 次の Runge-Kutta-Gill 法により計算し、方程式の各パラメータは $(\epsilon, \Omega, K) = (1.5, 80, 120)$ とした。また、方程式に与えた初期値は $(x, \dot{x}) = (0.1, 0)$ である。

振子の平均エネルギー E_p^* は、振子のエネルギー E_p をカットオフ周波数 0.5[Hz] のローパスフィルタに入力した時の出力値を採用し、式(45)のフィードバック係数は $(f_p, f_i) = (100, 20)$ 、アームの振幅は $\sigma = 0.08$ と設定した。また、van der Pol 方程式の周期解の振幅を 1 に調節する AG_3, AG_4 は付録 A に示す方法により計算した。

6.2 実験結果 図 2,3 に、以下のように目標エネルギー E_d を設定し、振子を制御した時の振子のエネルギー E_p^* と振子の運動の時間変化を示す。

$$0 \leq t < 30[\text{sec}] \quad E_d = -0.01$$

$$30 \leq t \quad E_d = 0.01$$

Fig. 2 Time variation of the Energy E_p^*

Fig. 3 Time variation of θ_1

Fig. 4 Time variation of the Energy E_p^*

Fig. 5 Time variation of θ_1

これらの実験結果より、提案した制御手法により振子の周期運動を目標エネルギー E_d を持つリミットサイクルに安定化できることが確認できる。

図 4,5 は振子の目標エネルギーを $E_d = 0$ となるように制御している時、 $t = 25[\text{sec}]$ 付近で、アームと振子の同期をくずすために外乱を加えたが、アームと振子はすぐに再同期し、振子のエネルギーは $E_p^* = 0$ となるがわかる。

7. お わ り に

本論文では、メカニカルシステムとして回転型倒立振子を取り上げ、周期入力により振子を制御できるタイミングを解析し、そのタイミングを実現する方法として非線形振動子の引き込み現象を利用する方法について述べた。さらにそのタイミングを積極的に変化させて振子を平衡点まわりの周期運動に安定化させる制御方法を提案した。今後は、本研究のアプローチのように安定な周期運動を実現することで制御目的を達成できるシステムとして、ブラキエーションロボット⁽⁷⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾やホッピングロボット⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾、歩行ロボット⁽¹²⁾などを取り上げ、これらの制御に本研究の手法を適用していきたいと考えている。

文 献

- (1) 梶原秀一, 橋本幸男, 松田敏彦, 土谷武士, 皿まわしの数理解とロボットによる実現, 日本ロボット学会誌, 16-4(1998), 59-66
- (2) 梶原秀一, 橋本幸男, 松田敏彦, 土谷武士, 引き込みを利用したブランコの振れ制御, 日本ロボット学会誌, 17-4(1999), 64-69
- (3) 梶原秀一, 橋本幸男, 松田敏彦, 土谷武士, 鉄棒ロボットの数理解析と運動制御, 日本ロボット学会誌, 18-4(2000), 53-58
- (4) 梶原秀一, 橋本幸男, 土谷武士, 引き込みを利用した回転型 2 重倒立振子の振り上げ制御, 計測自動制御学会論文集, 37-2(2001), 139-145
- (5) 原島鮮, 力学, 裳華房 (1958), 93-103
- (6) 数理科学, 特集: 結合振子系のダイナミクス, サイエンス社, 408(1997)
- (7) 山藤和男・前川桂一郎・藤本浩志, 励振作用を利用した空中ロボットの研究 (第 2 報), 機論, 57-535, C(1991), 860-865
- (8) 西村秀和・高崎賢司・舟木厚司・戸谷隆美, 誤差学習による終端状態制御を用いたブラキエーションロボットの運動制御, 機論, 63-605, C(1997), 182-189
- (9) 中西淳・福田敏男・Koditschek, D.E., 2 リンクブラキエーションロボットの制御, 日本ロボット学会誌, 17-1(1999), 110-117
- (10) 大久保宏樹・中野栄二・木村浩, ばねとアクチュエータによる跳躍機械の構成法, 日本ロボット学会誌, 10-7(1992), 104-110

- (11) 大久保宏樹・半田実・中野栄二, 自己振動を利用した跳躍機械に関する研究-小出力アクチュエータを用いた跳躍の実現-, 日本ロボット学会誌, 16-5(1998), 57-63
- (12) 高橋隆太郎・嶋田徹・小野京右, 自励駆動による2足歩行機構の実験的研究, 日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会'00講演論文集, 2P2-84-122(2000)

A. AG_3, AG_4 の導出

van der Pol 方程式の周期解 $x, \dot{x}$ において, ある時点の半周期前の区間の $x, \dot{x}$ の絶対値の最大値 $|x|_{max}, |\dot{x}|_{max}$ をコンピュータ上の変数に記憶しておくと, AG_3, AG_4 は次式で計算できる.

$$AG_3 = \frac{1}{|\dot{x}|_{max}} \quad (52)$$

$$AG_4 = \frac{1}{|x|_{max}} \quad (53)$$

いま,

$$x = \beta \sin(\omega t) \quad (\beta > 0) \quad (54)$$

で運動しているとする, $x, \dot{x}$ の絶対値の最大値はそれぞれ $\beta, \beta\omega$ となることがわかる. よって,

$$AG_3 \dot{x} = \frac{1}{\beta\omega} \beta\omega \cos(\omega t) = \cos(\omega t) \quad (55)$$

$$AG_4 x = \frac{1}{\beta} \beta \sin(\omega t) = \sin(\omega t) \quad (56)$$

となり, AG_3, AG_4 により $x, \dot{x}$ の振幅を 1 にできることがわかる.