多孔質ゴムと剛体面間に形成されるスクイズフィルムに関する研究*

(第1報, 粘弾性連続体モデルを用いた解析)

金子 寛^{*1}, 田中 健 誠^{*2}
阿部 智^{*3}, 石川 卓 也^{*4}A Study on Squeeze Films between Porous Rubber Surface
and Rigid Surface

(1st Report, Analysis with Visco-Elastic Continuum Model)

Satoru KANEKO^{*5}, Takemi TANAKA,

Satoru ABE and Takuya ISHIKAWA

^{*5} Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology,

1603-1 Kamitomiokamachi, Nagaoka-shi, Niigata, 940-2188 Japan

Squeeze film effect between a porous surface and a rigid surface is investigated as a problem of visco-elastic hydrodynamic lubrication (VEHL). An axisymmetric continuum model is introduced based on a three element visco-elastic model to estimate the deformation of a cylindrical porous rubber block. The coefficients in the visco-elastic constitutive equation are experimentally determined and the deformation is calculated by FEM. To take into consideration the fluid inertia effect in the squeeze film, the approximate solutions for the film pressure are obtained from the Navier-Stokes equation and the continuity equation using the perturbation method. The squeeze-film pressures and forces are measured under the sinusoidal squeezing motion with a cylindrical porous rubber block. The difference between the VEHL solutions and the EHL (elastohydrodynamic lubrication) solutions becomes more marked for a higher frequency of squeeze oscillation due to the effect of viscoelasticity of the porous rubber. Hence, the VEHL solutions correspond better to the measured results and yield a smaller surface deformation of the porous rubber block than the EHL solutions as the frequency of squeeze oscillation increases.

Key Words: Squeeze Films, Visco-Elastic Continuum Model, Visco-Elastic Hydrodynamic Lubrication, Porous Rubber, Squeeze Film Pressure, Sinusoidal Squeezing Motion

1. はじめに

近年, スポンジなどのような比較的柔らかい多孔質材料(組織内部に外部に通じた気孔を有するもの)は人工関節, 湿式クラッチ板, スノータイヤなどのしゅう動面に用いられている。これらの材料は相手面との間に流体膜を介して滑りやスクイズ運動が存在すると動圧軸受と同様に, すきま内に液膜圧力やせん断摩擦が生じる。非多孔質材料(例えば solid ゴム)と異なる点は, 多孔質材料とすきまの間で液体の流出, 流入が存在するため, 液膜圧力が小さくなり液膜反力(負荷容量)の大きさも減少する。これは軸受としては不利な特性であるが, タイヤと路面間に用いた場合には液体がすきま内から多孔質体内部に浸透することからすきま内の水膜を容易に除去しスリップを防ぐことができる。また湿式クラッチでは接続, 解放時における急激な吸い付きがなくなるなどの利点がある。

多孔質材料を軸受面に用いた場合の潤滑特性に関する従来の研究には, 生体関節を対象とした池内らの研究⁽¹⁾⁽²⁾, 和田らの研究⁽³⁾, また多孔質体ブロックと剛体平板との間でスクイズ・滑り運動させた場合の堀川らの研究⁽⁴⁾がある。堀川らは数値計算より, 多孔質性に伴う潤滑面での流体の出入りが液膜圧力の増減を緩和し弾性変形を抑制すること, 多孔質体の透過率が大きくなると液膜内に負圧が生じなくなることなどを明らかにしている。これらの研究からはいくつかの有用な結果が得られているが, いずれも多孔質体を弾性体で近似し, その潤滑特性をおもに弾性流体潤滑理論を用いて解析している。一方, 非多孔質材料を粘弾性体で近似し, これをスクイズ面に用いたときの潤滑特性を粘弾性流体潤滑問題として扱った研究もいくつか見受けられる⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾。とりわけ堀ら⁽⁶⁾はスクイズ面の変形を実測した結果より, 計算により変形を求めるためには粘弾性体モデルを用いないとスクイズ膜の圧力の計算値が実験値より低めに見積もることになることを指摘している。

本研究では変形を伴う多孔質材料が各種しゅう動面に適用された場合の潤滑特性を明らかにするための基礎データを提供する目的から, 円柱形状の多孔質ゴムと剛体面間に形成されるすきま内の液膜が外部から正

* 原稿受付 2001年2月26日。

^{*1} 正員, 長岡技術科学大学工学部(☎940-2188 長岡市上富岡町1603-1)。^{*2} 長岡技術科学大学大学院。^{*3} 日機装(株)(☎421-0496 静岡県榛原郡榛原町静谷498-1)。^{*4} 東京エレクトロンFE(株)(☎183-8705 府中市住吉町2-30-7)。

E-mail: kaneko@mech.nagaokaut.ac.jp

弦波状のスクイズ運動を受けたときの液膜圧力、液膜反力およびスクイズ面(多孔質体表面)の変形量を理論的に解析する。その際、多孔質ゴムを三要素粘弾性連続体モデルで近似しその変形を求め、また液膜圧力(スクイズ膜圧力)および多孔質体内部の圧力をすきま内の流体の慣性力を考慮に入れて求めた。計算結果よりスクイズ運動の周波数が液膜圧力、液膜反力およびスクイズ面の変形量に及ぼす影響、ならびに粘弾性解と多孔質体の粘性を無視した弾性解との相違を明らかにする。また実験により液膜圧力および液膜反力を測定し、計算結果の妥当性を検証する。

2. 本論文に用いる主要な記号

- E : 縦弾性係数, 粘弾性体モデルの構成方程式中の係数 $=K_1K_2/(K_1+K_2)$ Pa
 F : 液膜(スクイズ膜)反力 N
 G : 横弾性係数 Pa
 G^* : 複素弾性率 Pa
 K : 体積弾性率 Pa
 K_1, K_2 : 多孔質ゴムを三要素粘弾性体単軸モデルで置き換えたときのばね係数 Pa
 L : 多孔質体の厚さ m
 Q_p : すきまから多孔質体内部への漏れ流量 m^3/s
 Q_r : すきま外周部からの半径方向漏れ流量 m^3/s
 T : 無次元時間 $=f \cdot t$
 V : すきま(スクイズ膜)体積 m^3
 a_s : 正弦波スクイズ運動(剛体平板)の振幅 m
 f : 正弦波スクイズ運動(剛体平板)の周波数 Hz
 h : すきま厚さ $=h_0+a_s\{\cos(2\pi ft)-1\}+\delta_s$ m
 h_0 : 基準すきま(スクイズ面が変形しないと仮定した場合のすきま)の初期値 m
 k : 多孔質体の透過率 m^2
 p : 液膜(スクイズ膜)圧力(ゲージ圧) Pa
 p_a : 周囲($r \geq r_a$)の液体の圧力, 大気圧 Pa
 p_m : 多孔質体内部の圧力 Pa
 q_0, q_1 : 三要素粘弾性体単軸モデルの構成方程式中の係数 $[q_0=\eta_2/(K_1+K_2), q_1=\eta_2/K_2]$ s
 q_1', q_2' : 軸対称粘弾性連続体モデルの構成方程式中の係数 s
 r : 半径方向座標
 r_a : スクイズ面および多孔質体の半径 m
 t : 時間 s
 v_h : 剛体平板のスクイズ速度 $=-2\pi fa_s \sin$

$(2\pi ft)$ m/s

v_r, v_y : すきま内の流速の半径方向成分および液膜厚さ方向成分 m/s

v_{rm} : 液膜外周部($r=r_a$)における半径方向平均流速 m/s

y : すきまの厚さ方向座標

z : 多孔質体の厚さ方向(軸方向)座標

δ_s : スクイズ面の厚さ方向の変形量(圧縮量を正とする) m

ε : ひずみ

η : 液体の粘度 $\text{Pa} \cdot \text{s}$

η_2 : 多孔質ゴムを三要素粘弾性体単軸モデルで置き換えたときの減衰係数 $\text{Pa} \cdot \text{s}$

ν : ポアソン比

ξ : 入口損失係数 $=0.5$

ρ : 液体の密度 kg/m^3

σ : 応力 Pa

τ : セン断応力 Pa

$\cdot = d/dt$: 時間による1階微分

$\sim$: Laplace 変換した変数を示す。

添字 r, θ, z : それぞれ r, θ, z 方向成分を示す。

3. 数 値 解 析

3.1 解析モデル 本研究で用いる解析モデルを図1に示す。多孔質体は軸対称円柱形モデル(半径 r_a , 厚さ L)で、内部の気孔は液体で満たされている。多孔質体の一方の面はスクイズ膜に接し、他方は静止している剛体面に取付けられている。剛体面側では多孔質体の変形は拘束されており、多孔質体内部と剛体面間での液体の出入りはない。多孔質体と相対する剛体平板は液膜を介して上下に正弦波状にスクイズ運動(振幅 a_s , 周波数 f)し、液膜や多孔質体内部に生じる圧力などによって多孔質体は変形する。液膜および多孔質体の周囲は液体(大気圧)で満たされており、スクイズ運動に伴い、液膜外周部および多孔質体側面において液体が自由に出入りできる。

Fig. 1 Analytical model

図2に座標系を示す。\$y=0, y=h\$において多孔質体および剛体平板が液膜と接する。解析を容易にするため、多孔質体表面の変形量 \$\delta_s\$ を剛体面側に移してすきま \$h\$ を考慮した。スクイズ膜特性を求めるために、本解析では以下に述べる液膜圧力を支配する式、多孔質体内部の圧力を支配する式および多孔質体の変形を支配する式を連立して解く。

3.2 液膜圧力を支配する方程式 解析に際して以下の仮定を設ける。

- ①液体は非圧縮性、一様粘度である。
 - ②すきまおよび多孔質体内部の流れは層流である。
 - ③多孔質体表面での流体のすべりは生じない。
 - ④液膜内部にはキャビテーションは発生しない。
 - ⑤液膜厚さはスクイズ面の大きさに比べて十分小さい。
- 以上の仮定と、現象が軸対称であることから、液膜の流れを支配する運動方程式ならびに連続の式は次のように与えられる。

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_y \frac{\partial v_r}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \eta \frac{\partial^2 v_r}{\partial y^2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここですきま(液膜)厚さが

$$h = h_0 + a_s \{ \cos(2\pi ft) - 1 \} + \delta_s \quad \dots\dots\dots (4)$$

で表されることを考慮して、境界条件は

$$y=0: v_r=0, v_y = - \frac{k}{\eta} \frac{\partial p_m}{\partial z} \Big|_{z=L} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$y=h: v_r=0, v_y = \dot{h} = -2\pi f \sin(2\pi ft) + \dot{\delta}_s \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$r=0: \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$r=r_a: p = p_a - \zeta \cdot \rho(1 + \xi) v_{rm}^2 / 2 \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。ここで \$p_a\$ は大気圧(\$=0\$), \$p_m\$ は多孔質体内部の圧力, \$\xi\$ は入口損失係数で経験的に \$0.5\$ と仮定する。また \$v_{rm}\$ は、すきま外周部(\$r=r_a\$)におけるすきまの厚さ方向に平均した \$v_r\$ であり、以下のようにし

て求められる。すきま外周部からの漏れ流量 \$Q_r\$, すきまから多孔質体内部に流出する流量 \$Q_p\$, すきま体積の時間的变化 \$\dot{V}\$ の間には次の関係がある。

$$Q_r = -\dot{V} - Q_p \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、

$$\dot{V} = 2\pi \int_0^{r_a} \dot{h} r dr \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$Q_p = 2\pi \int_0^{r_a} \frac{k}{\eta} \left(\frac{\partial p_m}{\partial z} \Big|_{z=L} \right) r dr \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$Q_r = 2\pi r_a (h|_{r=r_a}) \cdot v_{rm} \quad \dots\dots\dots (12)$$

であり、これらを式(9)に代入して、

$$v_{rm} = - \frac{1}{r_a (h|_{r=r_a})} \int_0^{r_a} \left(\dot{h} + \frac{k}{\eta} \frac{\partial p_m}{\partial z} \Big|_{z=L} \right) r dr \quad \dots\dots\dots (13)$$

が得られる。すきま外周部から液体が流出する場合 (\$v_{rm} \ge 0\$) は \$\zeta=0\$, 外周部から液体が流入する場合 (\$v_{rm} < 0\$) は \$\zeta=1\$ とする。これは流体の慣性に基づくもので、\$v_{rm} < 0\$ の場合は静止している液体が加速されながらすきま内に流入し、その動圧に相当する圧力降下を生じるためである⁽⁸⁾⁽⁹⁾。

式(1)~(3)を厳密に解くことは困難であるため、Tichey ら⁽¹⁰⁾ が提案した近似解法を用いる。各変数をすきまの流体の粘性力に基づく成分と慣性力に基づく成分の和として表す。すなわち、

$$p = p^{(0)} + p^{(1)}, p_m = p_m^{(0)} + p_m^{(1)}, v_r = v_r^{(0)} + v_r^{(1)}, \\ v_y = v_y^{(0)} + v_y^{(1)} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで上添字(0), (1)はそれぞれ粘性力に基づく成分と慣性力に基づく成分を表す。さらに、

$$|p^{(1)}| \ll |p^{(0)}|, |p_m^{(1)}| \ll |p_m^{(0)}|, |v_r^{(1)}| \ll |v_r^{(0)}|, |v_y^{(1)}| \ll |v_y^{(0)}| \quad \dots\dots\dots (15)$$

と仮定し、それぞれの成分を以下の手順で求める。

慣性項を無視すると式(1), (3)より粘性力に基づく成分に関する0次の方程式は

$$\frac{\partial^2 v_r^{(0)}}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial r} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r^{(0)}) + \frac{\partial v_y^{(0)}}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

となる。上式を境界条件

$$y=0: v_r^{(0)}=0, v_y^{(0)} = - \frac{k}{\eta} \frac{\partial p_m^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=L} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$y=h: v_r^{(0)}=0, v_y^{(0)} = \dot{h} = -2\pi f \sin(2\pi ft) + \dot{\delta}_s \quad \dots\dots\dots (19)$$

を用いて \$y\$ 方向に積分すると \$p^{(0)}\$ に関するレイノルズ方程式が得られる。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(rh^3 \frac{\partial p^{(0)}}{\partial r} \right) = 12\eta r \left(\dot{h} + \frac{k}{\eta} \frac{\partial p_m^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=L} \right) \quad \dots\dots\dots (20)$$

また0次の速度成分は

Fig. 2 Coordinate system

$$v_r^{(0)} = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial r} (h-y)y \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$v_y^{(0)} = \frac{1}{12\eta r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ (3h-2y)y^2 r \frac{\partial p^{(0)}}{\partial r} \right\} - \frac{k}{\eta} \frac{\partial p_m^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=L} \quad \dots\dots\dots (22)$$

となる。さらに、式(14)を式(1)、(3)に代入し、式(15)～(17)を用いると、慣性力の成分に関する1次の方程式が次のように与えられる。

$$\frac{\partial^2 v_r^{(1)}}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial r} + \frac{\rho}{\eta} \left(\frac{\partial v_r^{(0)}}{\partial t} + v_r^{(0)} \frac{\partial v_r^{(0)}}{\partial r} + v_y^{(0)} \frac{\partial v_r^{(0)}}{\partial y} \right) \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r^{(1)}) + \frac{\partial v_y^{(1)}}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

式(21)、(22)を式(23)に代入し、境界条件

$$y=0: v_r^{(1)}=0, v_y^{(1)} = -\frac{k}{\eta} \frac{\partial p_m^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=L} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$y=h: v_r^{(1)}=0, v_y^{(1)}=0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

を用いて y 方向に積分すると $p^{(1)}$ に関する修正レイノルズ方程式が得られる。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r h^3 \frac{\partial p^{(1)}}{\partial r} \right) = \frac{\rho}{\eta} A + 12\eta r \frac{k}{\eta} \frac{\partial p_m^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=L} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ただし、

$$A = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{10} r h^5 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p^{(0)}}{\partial r} \right) + \frac{1}{4} r h^4 h \frac{\partial p^{(0)}}{\partial r} - \frac{3}{80\eta} r h^6 \frac{\partial h}{\partial r} \left(\frac{\partial p^{(0)}}{\partial r} \right)^2 \right\} - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{3}{560\eta} h^7 \left(\frac{\partial p^{(0)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{9}{560} r h^7 \frac{\partial p^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^2 p^{(0)}}{\partial r^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

なお、 $p^{(0)}$ 、 $p^{(1)}$ に関する境界条件は次のように与えられる、

$$r=0: \frac{\partial p^{(0)}}{\partial r} = \frac{\partial p^{(1)}}{\partial r} = 0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$r=r_a: p^{(0)}=p_a - \zeta \cdot \rho(1+\xi) v_{rm}^2/2 \\ \zeta=0 \text{ if } v_{rm} \geq 0, \zeta=1 \text{ if } v_{rm} < 0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$: p^{(1)}=0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

3.3 多孔質内部の圧力を支配する方程式

液膜圧力、多孔質内部の圧力等による多孔質体の変形量は微小であるので、それが多孔質体の透過率や空孔率に及ぼす影響は無視できるものと仮定する。Darcy の法則により得られる多孔質内部の速度成分を連続の式に代入すると、多孔質体内部の圧力 p_m は次式によって支配される。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_m}{\partial r} \right) + r \frac{\partial^2 p_m}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

境界条件は、

$$z=0: \frac{\partial p_m}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$z=L: p_m = p \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$r=0: \frac{\partial p_m}{\partial r} = 0 \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$r=r_a: p_m = p_a = 0 \quad \dots\dots\dots (36)$$

で与えられる。式(33)は多孔質体底面では流体の出入りが存在しないこと、式(34)はスクイズ膜と多孔質体表面との境界面で圧力が連続であること、式(35)は圧力が軸対称であること、式(36)は多孔質側面で大気圧になることをそれぞれ示している。すきま内の流体の慣性力の影響を考慮するため、式(14)に示したように $p_m = p_m^{(0)} + p_m^{(1)}$ とおき、式(32)に代入すると、 $p_m^{(0)}$ 、 $p_m^{(1)}$ に関する方程式が得られる。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_m^{(i)}}{\partial r} \right) + r \frac{\partial^2 p_m^{(i)}}{\partial z^2} = 0 \quad (i=0, 1) \quad \dots\dots\dots (37)$$

境界条件も同様に、

$$z=0: \frac{\partial p_m^{(i)}}{\partial z} = 0$$

$$z=L: p_m^{(i)} = p$$

$$r=0: \frac{\partial p_m^{(i)}}{\partial r} = 0$$

$$r=r_a: p_m^{(i)} = p_a = 0 \quad (i=0, 1) \quad \dots\dots\dots (38)$$

となる。

3.4 多孔質ゴムの変形に対するモデル化

3.4.1 構成方程式

本解析では、堀らの解析⁽⁶⁾と同様な手法で、多孔質ゴムを三要素粘弾性連続体モデルで近似した。粘弾性体を単軸モデルの三要素系で置き換えると次の構成方程式で支配される(図3参照)。

$$\sigma + q_0 \dot{\sigma} = E(\varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon}) \quad \dots\dots\dots (39)$$

ここで、 σ は応力、 ε はひずみ、 E 、 q_0 、 q_1 は定数である。

次に本解析で対象とする三要素粘弾性連続体モデルの構成方程式を導出する。直交座標系におけるテンソルを用いて、粘弾性体の微小体積の形状変化が3要素の系で近似できると仮定すると、偏差応力 σ'_{ij} と偏差ひずみ ε'_{ij} が次のように関係づけられる。

$$\{1 + q'_0(d/dt)\} \sigma'_{ij} = 2G\{1 + q'_1(d/dt)\} \varepsilon'_{ij} \quad \dots\dots\dots (40)$$

また体積変化が弾性的であると仮定すると、

Fig. 3 Three element visco-elastic model

$$\sigma_{kk} = 3K\varepsilon_{kk} \quad (k \text{ についての総和をとる}) \quad (41)$$

とおける。ここで、 G, K はそれぞれ横弾性係数および体積弾性係数である。また、

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\delta_{ij}\sigma_{kk} \quad (42)$$

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - (1/3)\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \quad (43)$$

である。上式中の δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。一方、弾性体の場合、形状変化は次式で関係づけられる。

$$\sigma'_{ij} = 2G\varepsilon'_{ij} \quad (44)$$

式(40)を Laplace 変換する。その際、Laplace 変換した変数には「」を付けて表し、Laplace 演算子を s とすると、

$$(1 + q_0 s) \sigma'_{ij} = 2G(1 + q_1 s) \varepsilon'_{ij} \quad (45)$$

となる。ここで、式(44)と(45)を比較すると弾性体と粘弾性体の係数間に次の対応原理が得られる。

$$2G \leftrightarrow 2G(1 + q_1 s)/(1 + q_0 s) \quad (46)$$

すなわち弾性体の構成方程式中の G を上式で置き換えると粘弾性体の構成方程式の Laplace 変換した形が得られる。弾性体の構成方程式中の縦弾性係数 E およびポアソン比 ν も次のように置き換えられる。

$$E \leftrightarrow 9GK(1 + q_0 s)/\{3K(1 + q_0 s) + G(1 + q_1 s)\} \quad (47)$$

$$\nu \leftrightarrow \{3K(1 + q_0 s) - 2G(1 + q_1 s)\}/\{6K(1 + q_0 s) + 2G(1 + q_1 s)\} \quad (48)$$

そこで軸対称円柱形弾性体の構成方程式、

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{Bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 \\ & & sym. & 1-\nu \\ & & & (1-2\nu)/2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (\gamma_{rz} = 2\varepsilon_{rz}) \quad (49)$$

を Laplace 変換し、 E, ν を式(47), (48)を用いて置き換える。続いて、時刻 $t=0$ において各成分がステップ状のひずみが増えられたものとして逆 Laplace 変換すると、本解析の対象とする軸対称粘弾性連続体モデルの構成方程式が得られる。すなわち、

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) & Y_2(t) & 0 \\ & Y_1(t) & Y_2(t) & 0 \\ & & sym. & Y_1(t) \\ & & & Y_0(t) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (50)$$

ここで、

$$Y_0(t) = G\{1 + (q_1 - q_0) \cdot \exp(-t/q_0)/q_0\} \quad (51)$$

$$Y_1(t) = K + (4/3)Y_0(t) \quad (52)$$

$$Y_2(t) = K - (2/3)Y_0(t) \quad (53)$$

である。次に式(50)を用いて履歴積分を行い、時刻 t および $t + \Delta t$ における応力 $\{\sigma\}_t, \{\sigma\}_{t+\Delta t}$ を求め、さらに時間 $(t \sim t + \Delta t)$ におけるひずみ速度が一定であると仮定すると次式を得る。

$$\{\sigma\}_{t+\Delta t} = [D_0]\{\varepsilon\}_{t+\Delta t} - [D_1]\{\varepsilon\}_t + [D_2]\{\sigma\}_t \quad (54)$$

ただし、

$$\{\sigma\} = [\sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \tau_{rz}]^T \quad (55)$$

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_r \quad \varepsilon_\theta \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{rz}]^T \quad (56)$$

$$[D_0] = \begin{bmatrix} K + (4/3)d_0 & K - (2/3)d_0 & K - (2/3)d_0 & 0 \\ & K + (4/3)d_0 & K - (2/3)d_0 & 0 \\ & & sym. & K + (4/3)d_0 \\ & & & d_0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$[D_1] = \begin{bmatrix} K' + (4/3)d_1 & K' - (2/3)d_1 & K' - (2/3)d_1 & 0 \\ & K' + (4/3)d_1 & K' - (2/3)d_1 & 0 \\ & & sym. & K' + (4/3)d_1 \\ & & & d_1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$[D_2] = \begin{bmatrix} d_2 & 0 & 0 & 0 \\ & d_2 & 0 & 0 \\ & & sym. & d_2 \\ & & & d_2 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$d_2 = \exp(-\Delta t/q_1) \quad (60)$$

$$K' = d_2 \cdot K \quad (61)$$

$$d_0 = G\{1 - (q_0 - q_1)(1 - d_2)/\Delta t\} \quad (62)$$

$$d_1 = G\{d_2 - (q_0 - q_1)(1 - d_2)/\Delta t\} \quad (63)$$

なお、 $q'_0 = q'_1 = 0$ とすると $d_2 = K' = d_1 = 0$, $d_0 = G$ となり、式(54)は弾性体の構成方程式(式(49))と一致する。

3・4・2 有限要素法を用いた変形の計算 軸対称粘弾性連続体モデルを三角形リング要素に分割して、それぞれの要素に式(54)を用いて仮想変位の原理を適用し、さらに全要素についてまとめると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \left(\sum_e \int_V [B]^T [D_0] [B] dV \right) \{\delta\}_{t+\Delta t} \\ & - \left(\sum_e \int_V [B]^T [D_1] [B] dV \right) \{\delta\}_t \\ & + \sum_e \int_V [B]^T [D_2] \{\sigma\}_t dV \\ & = \sum_e \int_V [N]^T \{f_{pm}\}_{t+\Delta t} dV + \sum_e \int_A [N]^T \{f_b\}_{t+\Delta t} dA \end{aligned} \quad (64)$$

ただし、

$$[B] = \{\epsilon\}(\{\delta\})^{-1}$$

$[N]$: 形状関数

$\{\delta\}$: 全節点変位

$\{f_{pm}\}$: 多孔質体の単位体積当たりに作用する物体力
(液膜圧力 p および多孔質体内部の圧力 p_m
から算出される⁽⁴⁾)

$\{f_b\}$: 多孔質体表面(スクイズ)に作用する単位面積
当たりの分布荷重(多孔質体表面に作用する
流体せん断応力から算出される)

である。変位に関する境界条件は次のように与えられる。多孔質体底面($z=0$)では剛体板に固定されているので、

$$\delta_r|_{z=0} = \delta_z|_{z=0} = 0 \quad \dots\dots\dots (65)$$

軸中心では対称性から

$$\delta_r|_{r=0} = 0 \quad \dots\dots\dots (66)$$

ここで、 δ_r, δ_z は節点変位の r および z 方向成分である。全節点変位を計算することによって多孔質体表面の厚さ方向の変形量 $\delta_s (= -\delta_z|_{z=L})$ が得られ、これよりすきま厚さ(液膜厚さ) h が式(4)より求められる。

3.5 計算方法 液膜圧力 p , 多孔質体内部の圧力 p_m , 多孔質体節点変位 $\{\delta\}$ およびすきま h は、式(20), (27), (37), (64), (4)を連立して解くことにより求められる。 p および p_m に関する式(20), (27), (37)は差分法を用いて離散値化し、 r 方向に20等分、 z 方向に10等分することにより差分格子を形成した。また、多孔質体の変位の計算においては z 軸回りに1回転した三角形リング要素を用いて、400要素(231節点)に分割(r 方向:20分割, z 方向:10分割)した。さらに時間ステップの間隔 Δt はスクイズ運動の1周期を50分割した。離散値化した基礎方程式を、 $p^{(0)}$, $p^{(1)}$ は Newton-Raphson 法を用いて、 $p_m^{(0)}$, $p_m^{(1)}$ は逐次加速緩和法を用いてそれぞれ繰返し計算により求めた。なお、外周部で圧力降下を生じる場合は $p^{(0)}|_{r=r_a}$ を逐次減速緩和法を用いて求めた。

圧力および変形量の収束判定条件はそれぞれ以下の式で与えた。

$$\sum_{i,j} |p_{ij}^{(n+1)} - p_{ij}^{(n)}| / \sum_{i,j} |p_{ij}^{(n)}| < 10^{-5} \quad \dots\dots\dots (67)$$

$$\sum_i |\delta_{si}^{(n+1)} - \delta_{si}^{(n)}| / \sum_i |\delta_{si}^{(n)}| < 10^{-3} \quad \dots\dots\dots (68)$$

ここで、 n は各時間ステップにおける繰返し計算の回数、 i, j は r および z 方向の格子点番号を表す。なお、 δ_s が収束しない場合は繰返し数 $(n-1)$ 回めの $\delta_s^{(n-1)}$ と n 回めの $\delta_s^{(n)}$ を用いて線形補間し、これを $(n+1)$ 回めの δ_s の値 ($\delta_s^{(n+1)}$) として繰返し計算を行った。

4. 実験

4.1 実験装置および実験方法

図4に実験装置の概略図を示す。スクイズ膜は①の多孔質ゴムと②の剛体テーブル(解析モデルの剛体平板に相当)の間に形成される。多孔質ゴムは⑧の試料支持軸の下面に接着されている。試料支持軸はハウジングに取り付けられており、鉛直方向の位置をハウジング上部の膜厚調整ねじにより任意に設定される。また⑦の気体軸受を用いて試料支持軸の半径方向変位が抑えられている。剛体テーブルは、③のリングを介して電磁加振機⑥により上下に正弦波状のスクイズ運動を行う。スクイズ面の基準すきま $[\text{多孔質体表面が変形しない場合のすきま} = h_0 + a_s \{ \cos(2\pi ft) - 1 \}]$ は試料支持軸の外周部に取付けた2個の渦電流型微小変位計⑤により測定する。スクイズ面の液膜圧力は剛体テーブルに取付けた半導体型圧力センサ④を用いて、半径方向に对称な位置(計9箇所)で測定する。また液膜反力は試料支持軸上部に取付けたロードセルにより測定する。なお、圧力センサの動的校正は、測定した半径方向液膜圧力分布をスクイズ面の面積で積分し、その値とロードセルで測定した液膜反力とを比較することによって行った。その結果、両者の差が5%以内であることから十分な精度で液膜圧力を測定していることが確認された。スクイズ面および多孔質体の内外部は作動流体(シリコン油: $\eta = 0.116 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $\rho = 973 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$)で満たされている。作動流体の温度はスクイズ面外周部付近に取付けた銅-コンスタンタン熱電対により測定する。

• 多孔質ゴムは、自動車用ゴムタイヤを粒径約0.5 mmのチップ状に細断し、ウレタンゴム等を結合剤として円柱形状に圧縮成型したものである。多孔質ゴムの気孔は互いに連結するとともに外部に通じており、

Fig. 4 Experimental apparatus

外部との流体の出入りが可能となっている。多孔質ゴムのおもな諸元は、直径($=2r_a$) 98.0 mm, 厚さ(L) 29.2 mm, 透過率(k) $2.63 \times 10^{-10} \text{ m}^2$, 空孔率 50.7% である。なお、多孔質ゴムの表面(スクイズ面)の平面度は変形しない状態で 0.005 mm 以内である。

実験で設定するパラメータは、正弦波スクイズ運動の周波数 f , 振幅 a_s , 初期すきま h_0 である。実験は、 $f=10 \sim 40 \text{ Hz}$, $a_s=0.1 \sim 0.5 \text{ mm}$, $h_0=1.2 \sim 1.6 \text{ mm}$ の範囲で行った。

4.2 構成方程式中の係数の実験的決定 軸対称粘弾性連続体モデルの構成方程式中の係数 q_0, q_1, G の値を決定するため、実験に使用する多孔質ゴムを用いて振動圧縮ひずみ試験を行った。まず多孔質ゴムの厚さ方向に初期圧縮ひずみ $\varepsilon_0=(7.0 \sim 9.0) \times 10^{-3}$ を与え、続いて正弦波状の振動ひずみ(振幅 $\varepsilon_a=(1.2 \sim 3.3) \times 10^{-3}$, 周波数 $f=1 \sim 40 \text{ Hz}$)を与え、そのときの応力応答を測定した。振動圧縮ひずみ実験では多孔質ゴムを三要素粘弾性単軸モデルとして扱い、構成方程式には式(39)を用いる。このとき応力とひずみは次式で表される。

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_a \cdot \exp(j2\pi ft)$$

Table 1 Values of coefficients in constitutive equation for three element visco-elastic model and equivalent stiffness and damping coefficients obtained based on measured data

$E(\text{MPa}) : 6.08, q_0(\text{s}) : 2.48 \times 10^{-3}, q_1(\text{s}) : 4.57 \times 10^{-3}$
$G(\text{MPa}) : 2.03, q_0'(\text{s}) : 2.47 \times 10^{-3}, q_1'(\text{s}) : 4.57 \times 10^{-3}$
$K(\text{MPa}) : 202.7$
$K_1(\text{MPa}) : 11.2, K_2(\text{MPa}) : 13.3, \eta_2(\text{Pa} \cdot \text{s}) : 6.08 \times 10^4$

Fig. 5 Magnitude of complex compliance of porous rubber block versus frequency of sinusoidal motion with compressive strain

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_a \cdot \exp(j2\pi ft + \phi) \quad (j^2 = -1) \dots (69)$$

ここで ϕ は位相角である。式(69)を式(39)に代入した式と、複素弾性率 G^* の定義式、

$$\sigma_a \cdot \exp\{j(2\pi ft + \phi)\} = G^* \varepsilon_a \cdot \exp(j2\pi ft) \dots (70)$$

を用いて、 G^* の大きさは次式で与えられる。

$$|G^*| = E \sqrt{\{1 + (2\pi f q_1)^2\} / \{1 + (2\pi f q_0)^2\}} \dots (71)$$

図5に $|G^*|$ と f の関係を示す。実験値と式(71)が一致するように式(39)中の係数 q_0, q_1, E を最小二乗法を用いて決定した。

次に式(39)を Laplace 変換すると次式が得られる。

$$\sigma/\varepsilon = E(1 + q_1 s)/(1 + q_0 s) \dots (72)$$

式(72)に対応原理を適用して得られる関係、

$$E \leftrightarrow E(1 + q_1 s)/(1 + q_0 s) \dots (73)$$

と式(47)が等価であると置く。すなわち、

$$\begin{aligned} 9GK(1 + q_1' s) / \{3K(1 + q_0' s) + G(1 + q_1' s)\} \\ = E(1 + q_1 s)/(1 + q_0 s) \dots (74) \end{aligned}$$

これより、単軸モデルの係数と軸対称連続体モデルの係数の関係が次のように表される。

$$q_0' = (9Kq_0 - Eq_1)/(9K - E) \dots (75)$$

$$q_1' = q_1 \dots (76)$$

$$G = 3KE/(9K - E) \dots (77)$$

式(75)～(77)を用いて、 q_0', q_1', G は振動圧縮試験で得られた係数 q_0, q_1, E を用いて決定される。なお、体積弾性係数 K は $\nu=0.495$ と仮定し、 $K=E/\{3(1-2\nu)\}$ なる関係式よりその値を決定した。表1に実験により得られた構成方程式中の係数の値およびこれと等価なばね-減衰系の要素の値を記す。

5. 結果と考察

本報では、スクイズ運動の周波数 f が液膜圧力、液膜反力などに及ぼす影響について調べる。なお、多孔質体の透過率およびすきま内の流体の慣性力がスクイズ膜特性(液膜圧力、スクイズ面の変形量、漏れ流量など)に及ぼす影響、ならびに剛体平板が多孔質体表面に向かって流体膜内を自由落下した場合の結果については次報で述べることにする。

計算では、多孔質体の寸法と透過率、作動流体の粘度と密度、粘弾性体の構成方程式中の係数などはすべて実験から得られた値を用いている。

図6(a)～(c)はそれぞれスクイズ面の中心部における液膜圧力 p 、液膜反力 F 、スクイズ面の中心部における変形量 δ_s (圧縮量を正とする)を示す。横軸の $T(=f \cdot t)$ は無次元時間(サイクル数)を表す。いずれも定常状態に達した後の時間的变化(運動開始後の2

(a) Squeeze-film pressure at center of porous rubber block

(b) Squeeze-film force

(c) Surface deformation at center of porous rubber block

Fig. 6 Squeeze-film characteristics varied with time during the second two periods; $a_s=0.3$ mm, $h_0=1.4$ mm

周期めと3周期めの2周期分の変化)を示している。なお、 F の計算値は次式から得られる。

$$F = 2\pi \int_0^{r_a} p r dr \quad \dots\dots\dots (78)$$

計算、実験ともにスクイズ周波数 f が高くなるにつれて液膜圧力および液膜反力のピークが大きくなり、それに伴い、多孔質体表面の変形量の大きさも増加している。一方、粘弾性解(VEHL solutions)と $\eta_2=0$

(図3参照)とおいた弾性解(EHL solutions)との差異は f が高くなるにつれて大きくなっている。図6(a), (b)より f が小さい場合 ($f=10$ Hz) は粘弾性解、弾性解とも実験値とよく一致しているが、 f が高くなると粘弾性解のほうが弾性解よりも実験値に近い ($f=40$ Hz)。また、図6(c)より δ_s の大きさは f が高くなると粘弾性解のほうが弾性解より小さくなる。これは図4に示すように、多孔質体の粘性の影響で複素弾性率 G^* の大きさが f とともに増加し、みかけ上、スクイズ面が固くなったためである。しかし、 δ_s の大きさの差異(最大で約0.05 mm)が基準すきまの大きさ(平均値1.1 mm)に比較して小さいために、図6(a), (b)に示した液膜圧力および液膜反力において粘弾性解と弾性解との定量的な差異が δ_s ほど大きくない結果になったと考えられる。

6. ま と め

円柱形状の多孔質ゴムと剛体面間に形成される流体膜が、外部から正弦波状のスクイズ運動を受けたときのスクイズ膜特性を数値計算した。その際、多孔質ゴムを三要素粘弾性連続体モデルで近似し、その変形を求めた。また液膜(スクイズ膜)圧力および多孔質体内部の圧力をすきま内の流体慣性力を考慮に入れて算出した。さらに実験により液膜圧力および液膜反力を測定した。以下に得られた結果を要約する。

(1) スクイズ周波数 f が高くなるにつれて液膜圧力および液膜反力のピークが大きくなり、それに伴い、多孔質体表面(スクイズ面)の変形量 δ_s の大きさも増加する。

(2) f が高くなるにつれて、液膜圧力と液膜反力は粘弾性解のほうが弾性解より実験値に近くなり、粘弾性体モデルを用いた解析の有用性が示された。

(3) f が高くなるにつれて、 δ_s の大きさは粘弾性解のほうが弾性解より小さくなる。

最後に、本研究に対し、貴重な助言をいただいた工業技術院機械技術研究所加藤孝久先生ならびに実験に際して多孔質ゴムの試料を提供していただいた東海ゴム工業(株)今枝稔明氏、棚橋英明氏に謝意を表する。

文 献

- (1) 池内 健・岡 正典・森 美郎, 股関節におけるスクイズ膜効果のシミュレーション, 機論, 55-510, C (1989), 508-515.
- (2) 池内 健・岡 正典・魏 国雄, 生体関節における変形とスクイズ膜効果に関する実験的研究, 機論, 55-516, C(1989), 2123-2130.

- (3) 和田稲苗・西田俊一, 非ニュートン流体を用いた多孔質スクイズ軸受の弾性流体潤滑, 機論, **51** 469, C(1985), 2183-2290.
- (4) 堀川純一・京極啓史・中原綱光, 多孔質弾性体の潤滑・数値計算, 日本潤滑学会トライボロジー会議予稿集, (1990-5), 377-380.
- (5) Rohde, S. M., Whicker, D. and Booker, J. F., Elastohydrodynamic Squeeze Films: Effects of Viscoelasticity, and Fluctuating Load, *ASME J. Lubrication Tech.*, **101** 1 (1979), 74-80.
- (6) 堀 幸夫・加藤孝久, 粘弾性スクイズフィルムの研究, 潤滑, **24** 3, (1979), 174-181.
- (7) Yoo, H. S., Some Effects of Viscoelastic Matrix on the Squeeze Films, *ASLE Trans.*, **30** 3 (1987), 403-408.
- (8) 黒田成昭・堀 幸夫, スクイズフィルムの研究 流体慣性力の影響の考察, 潤滑, **21** 11, (1976), 740-747.
- (9) 春山義夫・ほか5名, スクイズ膜特性に及ぼす流体慣性力の影響 (正弦波スクイズ運動の振幅が大きい場合の近似解法の精度の検討), 機論, **54** 500, C (1988), 919-926.
- (10) Tichy, J. A. and Winer, W. B., Inertial Considerations in Parallel Circular Squeeze Film Bearings, *ASME J. Lubrication Tech.*, **92** 4, (1970), 588-592.