磁気ダンピング力に起因した回転体の不安定振動*

高山 佳久^{*1}, 末岡 淳男^{*1}
近藤 孝広^{*1}, 長井 直之^{*2}Unstable Vibration of a Rotating Machine Caused
by a Magnetic Damping ForceYoshihisa TAKAYAMA^{*3}, Atsuo SUEOKA,
Takahiro KONDOU and Naoyuki NAGAI^{*3} Department of Intelligent Machinery and Systems, Kyushu University,
6-10-1 Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka-shi, Fukuoka, 812-8581 Japan

Using the infinitesimal loop model that is moving through the nonuniform magnetic field in space, the effective expression of the magnetic damping force is derived. This method has an advantage of calculating no scalar potential and it is easy to compute the magnetic damping force by using the static magnetic field obtained by FEM, measurements and so on. By the way, a magnetic damper used in turbo-molecular pump and so on in order to reduce vibration sometimes generates unstable vibrations. In this report, it was made clear that the Jeffcot rotor with the magnetic damper generated the unstable vibration in the experiment over a critical speed, and the present method was available for investigating the cause of the unstable vibration due to asymmetric stiffness matrix. Then a good agreement between the analytical and experimental results was confirmed.

Key Words: Electromagnetic-Induced Vibration, Vibration of Rotating Body, Stability, Damping, Unstable Vibration, Electromagnetic Damper, Lorentz's Force

1. 緒 言

磁気ダンパは機械の振動を非接触で減衰させるため、真空ポンプや遠心分離機など高速回転機械に最適なダンパである。そのうえ、磁気ダンパは機械的摩擦を伴わないので、極めて耐久性に優れているという特長があり、宇宙などでの利用が期待されている。

磁気ダンパについての基礎的な研究は、背戸、長屋らによって行われてきた。背戸ら⁽¹⁾は、空間的に一様な磁場の中で、導体を調振動させたとき、1周期間に導体中で発生する渦電流のなすジュール損失が磁気減衰力のなす仕事に等しいとして、近似的に磁気ダンピング力を導出した。一方、長屋ら⁽²⁾⁽³⁾は導体内部に分布する電磁スカラー・ポテンシャルに関するポアソン方程式およびローレンツ力による外部起電力の式⁽⁴⁾

に導体周囲の境界条件を適用してスカラー・ポテンシャルについて解き、運動物体に対するオームの法則⁽⁵⁾から渦電流を定め、磁気ダンピング力を導出した。この手法は一般性の高い手法であるが、スカラー・ポテンシャルの分布を求めた上で、磁気ダンピング力を求めるので、複雑で面倒な計算を要するところが難点である。

ところで、Frederick ら⁽⁶⁾は、水平に置かれたジェフコットロータに磁気ダンパを組み合わせた実験装置を用いて、危険速度を越えたある回転数以上で不安定なふれまわり振動が発生することを報告している。Kligerman ら⁽⁷⁾は、この不安定振動の発生原因の研究を行ったが、回転座標系と静止座標系で表した物理量の間の座標変換に問題があり、安定・不安定境界の実験結果と解析結果も大きく食い違っている。

著者らも垂直に置かれた立形ジェフコットロータに磁気ダンパを組み合わせた装置で実験を行ったところ、危険速度より高いある回転数以上で不安定なふれまわり振動が発生した。磁気ダンパを動作させないときには、ふれまわり振動が発生しないので、このふれまわ

* 原稿受付 2001年6月18日。

^{*1} 正員, 九州大学大学院工学研究院(☎ 812-8581 福岡市東区箱崎6-10-1)。^{*2} 正員, 三菱重工業(株)広島研究所(☎ 733-8553 広島市西区観音新町4-6-22)。

E-mail: takayama@mech.kyushu-u.ac.jp

Fig.1 Experimental apparatus

Fig.2 Rotor and Stator (Unit:mm)

り振動の発生原因は磁気ダンピング力によるものと考えられる。そこで、本報ではこの現象を解明するために、磁気ダンピング力の発生機構のモデル化と見通しの良い算出方法を提案する。この方法は、スカラー・ポテンシャルの分布を求める必要がなく、あらかじめ静磁場分布を有限要素法や実験などで求めておけば、簡単に磁気ダンピング力が計算できる利点がある。また、この方法は、磁気ダンピングに起因した不安定なふれまわり振動の発生原因の解明に対しても有効であり、安定・不安定境界の実験結果と解析結果とが定量的によく一致したので報告する。

2. 実験装置

図1に実験装置の全体図を示す。立形ジェフコットロータは垂直な回転軸(Shaft;材質 SUS304)の両端が玉軸受(Ball bearing)で支持され、軸に銅製円板(Disk)が固定されている。円板は厚さ2mmの部分(内半径30mmから外半径67mmまで)とハブからなる一体構造物である。回転軸はカップリング(Coupling)を介してモータ(Motor)で駆動され、回転体は円板、軸およびホルダー(Holder;材質 SUS304)から構成されている。また、ステータ(Stator)下部の軸には、互いに直角になるように渦電流型変位センサが取り付けられている。回転体の質量は1.2kg、軸径は6mm、軸受間距離は322mmである。カップリングでモータと回転体を結

Fig.3 Damping ratio

Fig.4 Vibration characteristics of rotor without magnetic damper

合した状態における回転体の1次の固有振動数は44Hzであった。

図2に実験装置の主要部の詳細を示す。電磁石はフェライトコアに銅線を巻いた円筒型コイル(Coil)からなり、円板の両側に磁石のむき出した面が円板に向かって対向して設置されている。コイルの中心と円板の軸心とは一致しており、円板と磁石面のすき間は1mmである。銅線の巻き数は330turnであり、フェライトコアはプラスチック製のステータに固定されている。コイルは上下2つの電磁石が同じ向きの磁場を形成するように接続されている。ただし、電磁石に流入する直流電流が大きくなるとコイルが発熱して銅線が切れるため、最大入力電流を約3Aに制限した。

3. 実験結果

3.1 不安定振動 まず、実験装置の円板を非回転時に打撃し、電磁石に電流を流さない状態での減衰比 ζ_0 、および電流を流した状態での減衰比 ζ_1 を求めた。その結果を図3の○印で示す。非回転時には、 $\zeta_0 < \zeta_1$ で電流が高くなるにつれて減衰比も大きくなっている。

次に、磁気ダンピングが動作していない状態での円板のふれまわり振動特性を調べた。電磁石に電流を流さずにモータの回転数をゆっくりと上昇させ、水平面内直交2方向の変位を測定した。両方向の特性に大差がな

(a) Current $I = 1A$ (b) Current $I = 2A$

Fig.5 Vibration characteristics of rotor with magnetic damper

いので、一方向の測定結果のみを図4に示す。以下の測定においてもこの方向の結果のみを示す。図4をみると、回転数が回転体の1次の固有振動数の1/2（以下、2次的危険速度と呼ぶ）のとき振幅が少し大きくなり、また、回転数が1次の固有振動数（以下、主危険速度と呼ぶ）のとき不つり合いによる共振が発生している。2次的危険速度で共振する原因は軸のわずかなたわみによる。そこで、2次的危険速度と主危険速度の回転数領域は素早く通過させ（以下の測定でも同様）、これ以外の危険速度以上の回転数領域に注目して詳細に振動変位を測定した。磁気ダンパが動作していないこの場合には、回転数を100Hz以上（1次の固有振動数の2.3倍以上）にまで上げて、大きなふれまわり振動は発生しなかった。

続いて、磁気ダンパを動作させた状態での円板のふれまわり振動特性を調べた。電磁石に一定電流 $I = 0.5A$ （起磁力： $0.5A \times 330\text{turn} = 165A$ ）を流し、回転数をゆっくりと100Hzまで上げていったが、2次的危険速度と主危険速度の振動以外には大きなふれまわり振動は発生しなかった。電磁石に流す一定電流を $I = 1A$ に増加させて、同様の実験を行うと、図5(a)に示すように主危険速度44Hzより高い約82Hzの回転数で突然大きなふれまわり振動が発生した。その後、電流を切ると、ふれまわり振動は減少して図4の磁気ダンパが動作していない状態に戻った。一定電流 $I = 2A$ を流したときには、図5(b)に示すように大きな

(a) Stable state ($I = 1.6A$) (b) Boundary between stable and unstable regions ($I = 1.72A$) (c) Unstable vibration ($I = 1.73A$)

Fig.6 Vibration characteristics near boundary between stable and unstable regions (rotating speed = 57.5Hz, 0.01V/μm)

ふれまわり振動の発生する回転数が約56Hzに低下した以外は、図5(a)と同じ傾向であった。

以上のことから、この大きなふれまわり振動は、回転体の内部減衰などが原因で発生するのではなく、磁気ダンピング力が原因であると結論づけることができる。この大きなふれまわり振動を以下では簡単のために、不安定振動(Unstable vibration)と呼ぶことにする。

Fig.7 Boundary between stable and unstable regions

3.2 安定・不安定境界の測定 前節に述べた不安定振動の測定方法では、測定に時間がかかるうえに、電磁石の特性に及ぼすコイルの発熱の影響が大きい。そこで、安定・不安定境界を以下の方法で測定した。

まず、回転体の回転数を一定に保ち電流を上げていきながら安定・不安定境界付近における電流の概略値をあらかじめ求めておく。次に、電流をその概略値よりわずかに小さい値からゆっくり上げていきながら安定・不安定境界の電流を測定する。図6に測定した振動変位の時間波形とスペクトルを示す。図6は、回転体の回転数を57.5Hzに保ち、安定・不安定境界付近で、時間波形とスペクトルを測定した例である。図6中の▼および▽はそれぞれ回転体の主危険速度(44Hz)および回転数(57.5Hz)の成分を表す。

電流が安定・不安定境界の電流値より小さいとき[図6(a)], 主危険速度成分のスペクトルピーク値(以下、ピーク値と呼ぶ)は回転数成分のピーク値より小さく、回転体は主に不つり合い応答を示す。入力電流が安定・不安定境界での電流値に近づくにつれて、図6(b)のように主危険速度のピーク値が急激に増大し、さらにわずかも電流を増加させると、ついには図6(c)のように回転数成分のピーク値を追い越す。また、図6(c)に示す正弦状の時間波形は、時間の経過とともに振幅が急激に大きくなり、その成長している成分の振動数は回転体の主危険速度に等しい。

ここでは、図6(b)のように回転数成分のピーク値と主危険速度成分のピーク値が等しくなるような電流を安定・不安定境界を与える電流値として、回転数とその電流値との間の関係を求めた。その測定結果を図7の○印で示す。図7から、この不安定振動は、回転体の回転数が主危険速度より高い領域で発生し、電流が大きければ大きいほど、すなわち、磁場が強ければ強いほど、低回転数側で発生することがわかる。

4. 磁場の測定と解析結果

4.1 磁場測定 円板の比透磁率は空気とほぼ同じ約1.0なので、円板をはずした状態でガウスメータ

Fig.8 Distribution of magnetic flux field (Experiment, $I=1A$)

によって実験装置の電磁石が発生する磁場を測定した。このとき、磁場は軸対称なので軸方向を z (上向きを正)とし半径方向を R とする。対向する磁石両面の中心 $z=0$ および $z=\pm 0.5\text{mm}$ の位置で、円板が存在する領域での磁場の分布を測定した。電流値 $I=1A$ に対する測定結果を図8に示す。図中の点線は円板の存在する領域を示す。

磁場の分布は、磁石の半径方向内側では上向きであるが、外側では磁場の向きが逆転している。このように、電磁石の作る磁場は一様磁場とはかなり異なっており、その R 方向成分は z 軸方向成分と比べて無視できるくらい小さい。また、円板が存在する範囲では、磁場の z 軸方向成分は一様であり、半径方向にのみ変化すると見なすことができる。

4.2 有限要素法による静磁場解析 実験のときと全く同じ電流値および座標系を設定し、電磁石が作る磁場を軸対称磁場として、市販の有限要素法電磁場解析ソフトで静磁場解析を行った。結果の表示は省略するが、その解析結果は図8の磁場の測定結果と定量的にも非常に良く一致していた。

以上の結果から、実験装置の磁場は z 軸方向成分のみを持つ軸対称磁場で、 R のみの連続関数であると見なすことができる。この磁場を $z=0$ の位置での磁場で代表させる。また、解析を簡単にするために、磁気ダンピング力は円板の厚さ2mmの部分のみで発生すると仮定する。

5. 理論解析

5.1 座標系の定義 以下のモデル化では電場と磁場とが現れ、その中で運動する導体に作用する電磁力を導出する必要がある。そのために便利ないくつかの座標系を定義する。図9のように、空間固定座標系 $O-xyz$ をとり、 x, y および z 軸方向の単位ベクトルを、それぞれ i_x, i_y および i_z とする。また、剛体である導体円板の回転中心を原点 Q とし、 xy 平面内を速度 $v = \dot{x}i_x + \dot{y}i_y$ で並進移動する座標系 $Q-x_1y_1z_1$ および原点 Q を通り z 軸に平行な ζ 軸のまわりを一定角速度 ω

Fig.9 Definition of coordinate

で回転する直交座標系 $Q-\xi\eta\zeta$ をとる。ここで、 ξ, η および ζ 軸方向の単位ベクトルを、それぞれ i_ξ, i_η および i_ζ とする。図9に示すように時刻 t において、円板中心 Q の位置は座標系 $O-xyz$ で $(x, y, 0)$ とし、座標系 $Q-\xi\eta\zeta$ は xy 平面内を ωt だけ反時計方向に回転している。また、円板上の任意の位置に点 P をとり、点 P の座標を、座標系 $O-xyz$ で $(x_P, y_P, 0)$ 、座標系 $Q-x_1y_1z_1$ で $(x_{1P}, y_{1P}, 0)$ 、座標系 $Q-\xi\eta\zeta$ で $(\xi_P, \eta_P, 0)$ とし、位置ベクトルを $\vec{OP} = \mathbf{R}_P$ 、 $\vec{QP} = \mathbf{r}_P$ とする。

座標系 $O-xyz$ 上で観測した点 P の速度 $\mathbf{v}_P$ の ξ 軸方向成分および η 軸方向成分を、それぞれ $[v_P]_\xi$ および $[v_P]_\eta$ とする。ここで、 $[ ]_\xi$ および $[ ]_\eta$ はそれぞれベクトルの ξ 軸方向および η 軸方向の成分を表す。

空間固定座標系 $O-xyz$ 上で観測される、位置ベクトルが $\mathbf{R}_P$ である任意の点の静磁場（空間的には変化するが時間的には変化しない磁場）を $\mathbf{B}(\mathbf{R}_P)$ とする。一方、この磁場の中を運動する導体上で観測すると磁場だけでなく（見かけの）電場が現れる。そこで、導体上の任意の点 P で観測される磁場および電場を $\tilde{\mathbf{B}}_P$ および $\tilde{\mathbf{E}}_P$ とする。“ $-$ ”は移動座標系 $Q-\xi\eta\zeta$ 上で観測される物理量を表す。

座標系 $O-xyz$ 上で観測される導体上の任意の点 P の速度 $\mathbf{v}_P$ が光速に比べて十分小さいとき、磁場 $\tilde{\mathbf{B}}_P$ および電場 $\tilde{\mathbf{E}}_P$ は次式のように表される⁽⁸⁾。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}_P &= \mathbf{B}(\mathbf{R}_P) \\ \tilde{\mathbf{E}}_P &= \mathbf{v}_P \times \tilde{\mathbf{B}}_P = \mathbf{v}_P \times \mathbf{B}(\mathbf{R}_P) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

すなわち、ある瞬間に移動座標系上の任意の点で観測される磁場は、空間固定座標系上で観測されるその点の磁場に等しい。ただし、今の場合、 $\mathbf{B}(\mathbf{R}_P)$ は空間的に変化するの、移動座標系上の一点で観測される $\tilde{\mathbf{B}}_P$ および $\tilde{\mathbf{E}}_P$ は、 $\mathbf{R}_P$ が時間の関数になるのに伴って時間の関数となる。

Fig.10 Infinitesimal loop model

5.2 磁気ダンピング力の導出

図10のように、図9における点 P の周囲に、頂点の各点をそれぞれ反時計方向に A, B, C および D とした微小導体長方形ループ（以後、単にループと呼ぶ）を $\xi\eta$ 平面に平行な面にとる。このとき、座標系 $Q-\xi\eta\zeta$ で点 A, B, C および D の座標を、それぞれ $(\xi_A, \eta_A, 0)$ 、 $(\xi_B, \eta_B, 0)$ 、 $(\xi_C, \eta_C, 0)$ および $(\xi_D, \eta_D, 0)$ とし、辺 AB を ξ 軸に平行に、辺 AD を η 軸に平行にとる。また、辺 AB の長さを $\Delta\xi_P$ 、辺 AD の長さを $\Delta\eta_P$ とし、点 P に対する点 A, B, C および D の関係を次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} \xi_A &= \xi_P - \frac{1}{2} \Delta\xi_P, \eta_A = \eta_P - \frac{1}{2} \Delta\eta_P \\ \xi_B &= \xi_P + \frac{1}{2} \Delta\xi_P, \eta_B = \eta_P - \frac{1}{2} \Delta\eta_P \\ \xi_C &= \xi_P + \frac{1}{2} \Delta\xi_P, \eta_C = \eta_P + \frac{1}{2} \Delta\eta_P \\ \xi_D &= \xi_P - \frac{1}{2} \Delta\xi_P, \eta_D = \eta_P + \frac{1}{2} \Delta\eta_P \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

非一様磁場 $\mathbf{B}$ が $\mathbf{B}(\mathbf{R}_P) = B_{Pz} \mathbf{i}_z$ のように z 軸方向成分のみを持つと仮定する。このとき、式(1)の関係から $Q-\xi\eta\zeta$ 座標系上の点 P の位置で観測される磁場および（見かけの）電場は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}_P &= \mathbf{B}(\mathbf{R}_P) = \mathbf{B}(\xi_P, \eta_P, t) \equiv B_{Pz} \mathbf{i}_z \\ \tilde{\mathbf{E}}_P &= \tilde{\mathbf{E}}(\xi_P, \eta_P, t) \equiv \tilde{E}_{P\xi} \mathbf{i}_\xi + \tilde{E}_{P\eta} \mathbf{i}_\eta \\ &= [v_P]_\eta B_{Pz} \mathbf{i}_\xi - [v_P]_\xi B_{Pz} \mathbf{i}_\eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ループが非一様な磁場内を運動すると起電力が発生し、ループに電流が流れる。ループは微小であるので、その電流密度を点 P の値で代表させる。その電流密度の ξ 軸方向成分および η 軸方向成分をそれぞれ $\tilde{j}_\xi$ および $\tilde{j}_\eta$ とおく。電気伝導率を σ とすれば、オームの法則から、電場と電流密度の関係は式(3)を用いると、次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{j}_\xi &= \sigma \tilde{E}_{P\xi} = \sigma [v_P]_\eta B_{Pz} \\ \tilde{j}_\eta &= \sigma \tilde{E}_{P\eta} = -\sigma [v_P]_\xi B_{Pz} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ある時刻 t において、辺 AB 上の平均磁場 $\bar{B}_{AB}$ を次のように 1 次近似する。

$$\bar{B}_{AB} \equiv \left(B_{Iz} - \frac{1}{2} \frac{\partial B_{Iz}}{\partial \eta_P} \Delta \eta_P \right) \mathbf{i}_z \quad \dots\dots\dots (5)$$

また、辺 DC、BC および AD 上の平均磁場をそれぞれ、 $\bar{B}_{IK}$ 、 $\bar{B}_{BK}$ および $\bar{B}_{AD}$ とし、式(5)と同様に 1 次近似する。

ループの辺 AB と辺 DC 間でのローレンツ力の増加量 $\Delta \tilde{f}_\eta$ 、および辺 AD 上と辺 BC 間でのローレンツ力の増加量 $\Delta \tilde{f}_\xi$ は、平均磁場 $\bar{B}_{AB}$ 、 $\bar{B}_{IK}$ 、 $\bar{B}_{BK}$ 、 $\bar{B}_{AD}$ および式(4)からそれぞれ次式で与えられる⁽⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \tilde{f}_\xi \mathbf{i}_\xi &\equiv \frac{\partial \tilde{f}_\xi}{\partial \xi_P} \Delta \xi_P \mathbf{i}_\xi \\ &= \tilde{j}_\eta \mathbf{i}_\eta \times \{ [\bar{B}_{BK}]_z - [\bar{B}_{AD}]_z \} \mathbf{i}_z \\ &\equiv -\sigma [\mathbf{v}_P]_\xi B_{Iz} \frac{\partial B_{Iz}}{\partial \xi_P} \Delta \xi_P \mathbf{i}_\xi \\ \Delta \tilde{f}_\eta \mathbf{i}_\eta &\equiv \frac{\partial \tilde{f}_\eta}{\partial \eta_P} \Delta \eta_P \mathbf{i}_\eta \\ &= \tilde{j}_\xi \mathbf{i}_\xi \times \{ [\bar{B}_{IK}]_z - [\bar{B}_{AB}]_z \} \mathbf{i}_z \\ &\equiv -\sigma [\mathbf{v}_P]_\eta B_{Iz} \frac{\partial B_{Iz}}{\partial \eta_P} \Delta \eta_P \mathbf{i}_\eta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

よって、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}_\xi}{\partial \xi_P} &\equiv -\sigma [\mathbf{v}_P]_\xi B_{Iz} \frac{\partial B_{Iz}}{\partial \xi_P} \\ \frac{\partial \tilde{f}_\eta}{\partial \eta_P} &\equiv -\sigma [\mathbf{v}_P]_\eta B_{Iz} \frac{\partial B_{Iz}}{\partial \eta_P} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

さらに、式(7)を積分することにより、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}_\xi &= -\frac{1}{2} \sigma [\mathbf{v}_P]_\xi B_{Iz}^2 + C_\xi(\eta_P) \\ \tilde{f}_\eta &= -\frac{1}{2} \sigma [\mathbf{v}_P]_\eta B_{Iz}^2 + C_\eta(\xi_P) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $C_\xi(\eta_P)$ 、 $C_\eta(\xi_P)$ は積分定数である。

式(8)から、導体円板上の任意の点 P に作用する単位体積あたりの磁気ダンピング力が求められる。式(8)は導体内の任意の点で成立するので、 $\dot{x}_P = v_x$ 、 $\dot{y}_P = v_y$ 、 $B_{Iz} = B_z$ と置き換え、座標系 O-xyz の成分表示に変換すると、

$$\left. \begin{aligned} f_x &= -\frac{1}{2} \sigma v_x B_z^2 + C_x(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \\ f_y &= -\frac{1}{2} \sigma v_y B_z^2 + C_y(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。ここに、 $C_x(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ 、 $C_y(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ は上記の積分定数を座標変換したものである。この取扱いについては後述する。

いま、微小導体の体積を dV 、導体の全体積を V とすれば、導体に作用する磁気ダンピング力の総和は、式(9)を全体積にわたって積分することにより、次式のように求められる。

Fig.11 Definition of coordinate of conductor disk

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \int f_x dV \\ &= -\frac{1}{2} \sigma \int v_x B_z^2 dV + \int C_x(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dV \\ F_y &= \int f_y dV \\ &= -\frac{1}{2} \sigma \int v_y B_z^2 dV + \int C_y(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dV \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ところで、導体内部の磁場 B_z が空間的に一様な磁場成分 B_{z0} (定数) と空間的に変動する磁場成分 ΔB_z からなっており、 $B_z = B_{z0} + \Delta B_z$ と表されたとする。 B_{z0} は次式により求められる。

$$B_{z0} = \frac{1}{V} \int B_z dV \quad \dots\dots\dots (11)$$

この一様磁場成分 B_{z0} のみが作用する場合には、ループに起電力が発生しないので、磁気ダンピング力は明らかに零である。この条件から、式(10)の右辺第 2 項が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \int C_x(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dV &= \frac{1}{2} \sigma \int v_x B_{z0}^2 dV \\ \int C_y(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dV &= \frac{1}{2} \sigma \int v_y B_{z0}^2 dV \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

5.3 磁気ダンピング力の回転円板への適用

図 9 で定義した空間固定座標系 O-xyz の z 軸を図 11 のように軸対称電磁石の中心軸にとり、 $z = 0$ の位置を軸対称磁石の中心 O として円筒座標系 O-Rφz を設定する。また、xy 平面内の円板の回転中心を Q とし、点 Q から z 軸に平行に z_1 軸をとって、並進座標系 Q-x1y1z1 および円筒座標系 Q-rφz1 を設定する。図 11 において、点 Q は座標系 O-xyz 上で $(x, y, 0)$ の位置にあり、点 P は円板上の任意の点を表し、 $(x_P, y_P, 0)$ とする。また、点 P は座標系 O-Rφz 上で $(R, \phi, 0)$ 、座標系 Q-rφz1 上で $(r, \phi, 0)$ とする。 ϕ_0 は時刻 $t = 0$ での点 P の初期角変位、 ω は円板の回転速度、 a_1 は円板の内半径、 a_2 は円板の外半径を表す。円板は xy 平面内を運動するので、図 11 から次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} x_P &= R \cos \Phi = x + r \cos \phi \\ y_P &= R \sin \Phi = y + r \sin \phi \\ R &= \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

x および y 方向の単位ベクトルをそれぞれ i_x および i_y とすると、点 P の速度 v は次式で表される。

$$\begin{aligned} v &= v_x i_x + v_y i_y \\ &= (\dot{x} - r\omega \sin \phi) i_x + (\dot{y} + r\omega \cos \phi) i_y \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

円板の回転中心 Q の変位 (x, y) は非常に小さく、 $r \gg x, y$ と仮定する。 x および y について、1 次の微小量まで考慮すると、式(13)から次式が成立する。

$$R \cong r + x \cos \phi + y \sin \phi \dots\dots\dots(15)$$

磁場が軸対称のとき、磁気ダンピング力はパラメータ Φ には無関係である。そこで、 $|x|, |y| \ll 1$ のときの B_z を $\bar{B}_z(R)$ と置くと、式(15)から次式が成立する。

$$\begin{aligned} \bar{B}_z(R) &\cong \bar{B}_z(r + x \cos \phi + y \sin \phi) \\ &= \bar{B}_z(r) + \left. \frac{d\bar{B}_z(R)}{dR} \right|_{R=r} (x \cos \phi + y \sin \phi) \\ &\cong B_{dz}(r) + B'_{dz}(r)(x \cos \phi + y \sin \phi) \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

ただし、 $B_{dz}(r)$ および $B'_{dz}(r)$ は次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} B_{dz}(r) &= \bar{B}_z(r) \\ B'_{dz}(r) &= \left. \frac{d\bar{B}_z(R)}{dR} \right|_{R=r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

一方、ある時刻 t において、 x 軸と OP のなす角を空間座標 ψ とし、 x_1 軸と QP のなす角を空間座標 θ とすると、 B_{z0} は式(11)および(16)から次式のように求められる。

$$\begin{aligned} B_{z0} &= \frac{1}{V} \int_V \bar{B}_z(R) R dR d\psi dz \\ &\cong \frac{1}{V} \int_V B_{dz}(r) r dr d\theta dz \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

よって、板厚を $2w$ 、半径方向積分範囲を $a_1 \leq r \leq a_2$ とすると、式(10)、(12)、(14)、(16)および(18)から、円板に作用する磁気ダンピング力 F_x, F_y は次式となる。

$$F_x = k_1 \omega y - c_1 \dot{x}, F_y = -k_1 \omega x - c_1 \dot{y} \dots\dots\dots(19)$$

ここに、 c_1 および k_1 は次式のように定義している。

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= 2\sigma\pi w \int_{a_1}^{a_2} (B_{dz}^2 - B_{z0}^2) r dr \\ k_1 &= 2\sigma\pi w \int_{a_1}^{a_2} B_{dz} B'_{dz} r^2 dr \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

5.4 運動方程式 円板の質量を m 、角速度を ω 、偏重心を ε とし、機械構造から決定される減衰係数を c_0 、剛性係数を k_0 と置く。式(19)を、回転円板の運動方程式に代入し、行列表示すれば、次式となる。

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_0 + c_1 & 0 \\ 0 & c_0 + c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} k_0 & -k_1\omega \\ k_1\omega & k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\varepsilon\omega^2 \cos \omega t \\ m\varepsilon\omega^2 \sin \omega t \end{bmatrix} \dots\dots\dots(21)$$

式(21)から、磁気ダンピング力は、減衰行列の対角成分と、回転数 ω に比例した剛性行列の非対角成分に分けられる。これらの成分のうち、 c_1 は粘性減衰効果をもち、系の安定度を増加させる。一方、 $k_1\omega$ は線形ばね効果を有し剛性行列の非対角成分を異符号にさせるので、系を不安定化させる可能性がある。

6. 計算結果と考察

6.1 非回転時の減衰比 式(21)で $\omega = 0$ とすれば、非回転時の減衰比 $\zeta_1 = (c_0 + c_1) / 2\sqrt{mk_0}$ が求められる。ここに、 c_0 は電磁石に電流を流さないときの打撃試験から求めた減衰比 $\zeta_0 = c_0 / 2\sqrt{mk_0}$ から計算し、 c_1 は式(20)の B_{dz} に有限要素法による静磁場解析の結果を用いて数値積分することによって求める。本実験装置では、銅の導電率 $\sigma = 5.81 \times 10^7 \text{ S/m}$ 、円板の厚さ $2w = 2 \text{ mm}$ 、内半径 $a_1 = 30 \text{ mm}$ 、外半径 $a_2 = 67 \text{ mm}$ 、 $\zeta_0 = 0.00317$ であるので、例えば電磁石に入力する一定電流が $I = 1 \text{ A}$ のとき、 $c_1 = 1.770 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 、 $k_1 = -1.773 \text{ N}\cdot\text{s}/(\text{m}\cdot\text{rad})$ となる。減衰比の計算結果を図3の▲で示す。非回転時の減衰係数が十分な精度で計算されていることがわかる。

6.2 安定・不安定境界 $z = x + jy$ 、 $j = \sqrt{-1}$ 、 $\omega_n^2 = k_0/m$ 、 $\omega_1^2 = k_1\omega/m$ および $z = Ae^{\lambda t}$ として、式(21)の右辺を0とおいた式を複素表示し、特性方程式の特性根 λ を計算すると、次式となる。

$$\begin{aligned} \lambda &= -\zeta_1 \omega_n \pm \sqrt{(\zeta_1^2 - 1)\omega_n^2 - j\omega_1^2} \\ &\cong -\zeta_1 \omega_n + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\pm \sqrt{-\omega_n^2 + \sqrt{\omega_n^4 + \omega_1^4}} \right. \\ &\quad \left. \pm j\sqrt{\omega_n^2 + \sqrt{\omega_n^4 + \omega_1^4}} \right] \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

図3から $\zeta_1^2 \ll 1$ であるので、式(22)から $\text{Re}(\lambda) > 0$ のとき系は不安定となる。そこで、 $\text{Re}(\lambda) = 0$ から安定・不安定境界の回転速度 ω が求められ、不安定条件は次式で表される。

$$\omega \geq \omega_n \frac{c_0 + c_1}{|k_1|} \dots\dots\dots(23)$$

このように、式(21)の剛性行列が異符号の非対角成分をもつときには、不安定振動の発生する回転数領域が存在し得る。式(23)に式(20)の c_1 と k_1 を使って、安定・不安定の境界を計算した結果を図7の▲で示す。ただし、 B'_{dz} には有限要素法による静磁場解析で求められた B_{dz} を2次元スプライン補間し、 R で偏微分した結果を利用した。

図7では実験結果と解析結果は良く一致していると言える。この実験装置においては、電磁石の磁場が強くなると、安定・不安定境界は危険速度 44Hz に近づくこともわかる。また、Kligerman らの実験⁽⁷⁾でも危険速度以上でしか不安定振動は発生していない。

7. 結 言

本報では、磁気ダンパに起因した回転体の不安定振動について検討した。得られた成果を以下にまとめる。

(1) 微小ループモデルにより、静磁場の中を運動する導体円板に働く磁気ダンピング力の発生機構のモデル化および算出法の定式化を行った。この算出法では導体中のスカラー・ポテンシャルの分布を求める必要がなく、あらかじめ静磁場を有限要素法や実験などで求めておけば、簡単に磁気ダンピング力が計算できる。

(2) 提案した方法で求められた磁気ダンピング力が、回転体の不安定なふれまわり振動の発生原因を説明するのに有効であることを示した。

(3) 非一様な軸対称静磁場内で運動する導体円板に作用する半径方向の磁気ダンピング力は、運動方程式を行列表示すると、減衰行列の対角成分と剛性行列の回転数に比例した非対角成分に分けられる。減衰行

列の対角成分は粘性減衰効果として働き、系の安定度を増加させる。一方、剛性行列の回転数に比例した非対角成分は異符号となるので、系を不安定化させる可能性がある。解析から求めた減衰比および安定・不安定境界はともに実験結果と極めて良く一致した。

文 献

- (1) 背戸一登・山之内三男, 磁気ダンピング力を有する定数可変形動的吸振器の研究, 機論, **44-378**, C(1978), 542-553.
- (2) 長屋幸助・小島宏行, 円形磁石と任意形状導体より構成される磁気ダンパの研究(第1報, 減衰係数の解析), 機論, **50-453**, C(1984), 806-811.
- (3) Nagaya, K., Kojima, H., Karube, Y. and Kibayashi, H., Braking Forces and Damping Coefficients of Eddy Current Brakes Consisting of Cylindrical Magnets and Plate Conductors of Arbitrary Shape, IEEE Transactions on Magnetism, **MAG-20-6**, (1984), 2136-2145.
- (4) 砂川重信, 理論電磁気学 第3版, (1999), 25-26, 紀伊國屋書店.
- (5) 今井功, 「磁力線の運動に意味があるか?」 パリティブックス 続 間違いだらけの物理概念, (1995), 130-131, 丸善.
- (6) Frederick, J. R., and Darlow, M. S., Operation of electromagnetic eddy-current damper with a supercritical shaft, Trans. ASME, J. Vib. Acoust., **116-10**(1994), 578-580.
- (7) Kligerman, Y., Grushkevich, A., and Darlow, M. S., Analytical and experimental evaluation of instability in rotordynamic system with electromagnetic eddy-current damper, Trans. ASME, J. Vib. Acoust., **120-1**(1998), 272-278.
- (8) 熊谷信昭 編著, 電磁理論特論, (1998), 254-263, コロナ社.
- (9) 飯田修一 監訳, パークレー物理学コース 2 電磁気 (第2版) 下, (1992), 337-341, 丸善.