B スプラインによるカム曲線の最適生成*

林 長 軍^{*1}, 丘 華^{*2}
尾 崎 弘 明^{*1}, 下 川 哲 司^{*1}

Optimal Generation of Cam Curves with B-Spline

Chang-Jun LIN^{*3}, Hua QIU,
Hiroaki OZAKI and Tetsuji SHIMOGAWA^{*3} Department of Mechanical Engineering, Fukuoka University,
8-19-1 Nanakuma, Jonan-ku, Fukuoka-shi, Fukuoka, 814-0180 Japan

This paper proposes an approach to optimal generation of cam curves. In the approach, cam curve is described with a uniform B-spline curve and then the values of B-spline control points are optimized with the Complex Method according to the design purpose. The algorithm is simple and the programming is easy since it only needs to compute the performance index value but require no gradient of the index in optimization calculation. Several examples of cam curve generation are also shown together with a performance comparison between the obtained curves and those applied in engineering practice, in order to illustrate the effectiveness of the approach.

Key Words: Cam Curve, Uniform B-Spline, Complex Method, Optimization

1. 緒 言

カムは広く使用されている機械要素の一つである。カムの輪郭を設計する際に、通常まず使用目的に合うカム曲線を選択する。つぎに選んだカム曲線をベースにして、カムの基礎円半径などの機構学パラメータと合わせて実際のカム輪郭を生成する。現在、よく利用されているカム曲線は、運動学の立場から検討され比較的簡単な解析式で表現されるものが多い⁽¹⁾。近年、より柔軟にカム輪郭を設計するには、種々なスプライン曲線が有効に利用できることが報告されている⁽²⁾⁻⁽⁴⁾。しかし、これらの研究では、カム輪郭上の特定点の運動学特性を満足することやカム曲線の連続特性を検討することなどを重点に置き、使用目的にあうようにカム曲線を最適化する方法が明らかにされていない。従って、得られたカム輪郭が従来のカム曲線による輪郭に比べて優れているとはいえない。

本報告では、ユニフォームBスプラインを利用して新しいカム曲線の最適生成法を提案する。この方法では、ユニフォームBスプラインを利用してカム曲線を記述し、カムの使用目的にあうように、コンプレックス法を使用してBスプラインの制御点を最適化する。以下、その結果を報告する。

2. カム曲線の最適生成法

2-1 カム曲線の記述 式(1)を満足する無次元時間 T と無次元変位 S との関係曲線を無次元カム変位曲線 (以下単にカム曲線と略す) と呼ぶ。

$$S = S(T) \quad (1)$$

$$(0 \leq T \leq 1, 0 \leq S \leq 1, S(0) = 0, S(1) = 1)$$

また、 S を T で順次微分したものを V, A, J とし、それぞれ無次元速度、無次元加速度、無次元躍動 (以下単に速度、加速度、躍動と略す) と呼ぶ。すなわち、

$$\begin{cases} V = V(T) = dS/dT \\ A = A(T) = d^2S/dT^2 \\ J = J(T) = d^3S/dT^3 \end{cases} \quad (2)$$

通常、 V, A, J またはそれらの積の極値 (最大値と最小値) を利用してカム曲線の特性を評価する⁽¹⁾。

本研究では、 n 次ユニフォームBスプライン (n は奇数) を使用してカム曲線を記述する。すなわち、 T の区間 $[0, 1]$ を間隔 ΔT で N 等分し、第 i 番目の小区間 $[T_i, T_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$) における曲線部分を $S_i(T)$ と記すると、 $S_i(T)$ は次式で表される。

$$\begin{cases} S_i(T) = \sum_{l=0}^n B_l(u) \hat{S}_{i-(n-1)/2+l} \\ T(u) = T_i + u \Delta T \quad (0 \leq u \leq 1) \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 $B_l(u)$ と $\hat{S}_{i-(n-1)/2+l}$ はそれぞれBスプラインの基底関数と制御点である⁽⁵⁾。従って、制御点 $\hat{S}_j$ ($j = -(n-1)/2, -(n-1)/2+1, \dots, N+(n-1)/2$) の値を与え

* 原稿受付 2001年5月17日。

^{*1} 正員、福岡大学工学部 (☎ 814-0180 福岡市城南区七隈 8-19-1)。^{*2} 正員、九州産業大学工学部 (☎ 813-8503 福岡市東区松香台 2-3-1)。

E-mail: lin@fukuoka-u.ac.jp

ば, $n-1$ 次連続のカム曲線は一意的に定まる.

2・2 評価関数 カム曲線の最適化とは, カムの使用目的に応じて B スプラインの制御点を最適に決めることである. そのため, カム曲線を総合的に評価する指標, つまり評価関数 I を次のように設定する.

$$I = k_{c1}I_{c1} + k_{c2}I_{c2} + \cdots + k_{cp}I_{cp} + k_{r1}I_{r1} + k_{r2}I_{r2} + \cdots + k_{rq}I_{rq} \quad (4)$$

ここで, I_p はカム曲線に課する p 番目 ($p=1, 2, \dots, P$) の拘束条件に対応する評価項目である. つまり, 最適化目標を満足するカム曲線であれば, それに対応するすべての拘束条件の評価値が 0 でなければならない. 一方, I_q はカム曲線に対する q 番目 ($q=1, 2, \dots, Q$) の非拘束的評価項目であり, その値が小さいほどカム曲線がよいと評価される. また, k_p と k_q はそれぞれ I_p と I_q にかけた重み係数である.

前述したように, 通常カム曲線の特徴を V, A, J またはそれらの積の極値の大きさによって評価する. したがって, カム曲線の最適化は次のように取り扱うことができる. まず, カムの使用目的に応じて, 制限値以内に抑える必要があるカム曲線のパラメータを拘束条件として定め, ほかのパラメータを非拘束条件としてその値をできるだけ小さく抑える. そうすると, 拘束条件に対する評価項目は次式のように定義すればよい.

$$I_{cp} = \begin{cases} h_{cp, \max} - h_{cp, \max}^* & \text{if } (h_{cp, \max} > h_{cp, \max}^*) \\ h_{cp, \min}^* - h_{cp, \min} & \text{if } (h_{cp, \min} < h_{cp, \min}^*) \\ 0 & \text{for the others} \end{cases} \quad (5)$$

ここで, $h_{cp, \max}$ と $h_{cp, \min}$ はカム曲線の定義区間にわたって, 拘束条件に対応するパラメータの最大値と最小値であり, $h_{cp, \max}^*$ と $h_{cp, \min}^*$ はそれぞれ $h_{cp, \max}$ と $h_{cp, \min}$ の制限値である. また, 非拘束的条件に関する評価項目は次式のように定義すればよい.

$$I_{rq} = |h_{rq, \max}| \text{ or } |h_{rq, \min}| \quad (6)$$

I_q にかける重み係数 k_q は問題の特徴に応じて前もって与える定数である. また, I_p にかける重み係数 k_p の値に関しては, サフィックス p の値によって拘束条件の優先順位を示し (つまり p の値が小さいほど最適化計算中にこの拘束条件を優先的に満足すべきものである), 文献(6)に説明した方法を用いて計算中に自動的に調整する.

2・3 最適化方法 前節に説明したように, 式(4)の評価関数 I はカム曲線のパラメータの極値に関するものであるため, その勾配の計算は非常に難しい. そ

のため, 本研究では, 評価関数値の計算のみで済み, 勾配の計算を必要としないコンプレックス法⁷⁾を用いてカム曲線を最適化する.

普通, カム曲線の場合は, その両端の変位, 速度, 加速度などについて値を指定していることが多い¹⁰⁾. つまり, カム曲線に境界条件を課している. このような境界条件の数を n_0 とすると, カム曲線を記述する B スプラインの $N+n$ 個の制御点の中で独立なものは $N+n-n_0$ 個となる. 以下, 説明を簡潔にするために, これらの独立な制御点のセットを制御点ベクトル $\hat{S}$ として記する. すなわち, $\hat{S} = (\hat{S}_1, \hat{S}_2, \dots, \hat{S}_{N+n-n_0})^T$ である. $\hat{S}$ の値を次のアルゴリズムによって最適化する.

(a) 制御点ベクトルの初期点を $\hat{S}_1$ として適当に定めた後, 次式を用いてほかの $M-1$ 個の初期制御点ベクトル $\hat{S}_2, \hat{S}_3, \dots, \hat{S}_M$ を与える.

$$\begin{aligned} \hat{S}_{m,k} &= \hat{S}_{1,k} + DR \\ (m &= 2, 3, \dots, M; \quad k = 1, 2, \dots, N+n-n_0) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで, D は制御点の探索域に対応して設定する値であり, R は区間 $[-0.5, 0.5]$ の一様乱数である. また, 制御点ベクトルの数 M は $M=2(N+n-n_0)$ である. さらに, カウンター数 K_L を $K_L=0$ とする.

(b) 各制御点ベクトルで定まるカム曲線に対して式(4)より評価関数 I の値を計算し, 評価の最大値 $I^{(H)}$ を与える制御点ベクトル (最大点) $\hat{S}^{(H)}$ と最小値 $I^{(L)}$ を与える制御点ベクトル (最小点) $\hat{S}^{(L)}$ を求める. $\hat{S}^{(L)}$ を更新するたびに $K_L = K_L + 1$ とする.

(c) 前もって設定した収束判定定数 ε に対して, $I^{(H)} - I^{(L)} \leq \varepsilon$ のとき $\hat{S}^{(L)}$ を求めた解として計算を終了する. $I^{(H)} - I^{(L)} > \varepsilon$ のときは, もし K_L が定数 M_L (M_L はあらかじめ与えるある正の整数) になると, 初期点 $\hat{S}_1$ を最小点 $\hat{S}^{(L)}$ で置き換え, (a)へ. そうでないとき, (d)へ.

(d) 最大点 $\hat{S}^{(H)}$ 以外の $M-1$ 個制御点ベクトルの重心 $\hat{S}^{(M)}$ を求める. 最大点 $\hat{S}^{(H)}$ と重心 $\hat{S}^{(M)}$ とを結ぶ直線上で改良点 $\hat{S}^{(C)}$ を求め, その評価値 $I^{(C)}$ を計算する.

$$\hat{S}_k^{(C)} = \left(\sum_{m=1}^M \hat{S}_{m,k} - \hat{S}_k^{(H)} \right) / (M-1) \quad (8)$$

$$\hat{S}^{(C)} = \hat{S}^{(M)} + \alpha(\hat{S}^{(H)} - \hat{S}^{(M)}) \quad (9)$$

(e) $I^{(C)} < I^{(H)}$ なら, $\hat{S}^{(H)}$ を $\hat{S}^{(C)}$ で置き換え, (b)へ.

(f) $I^{(C)} \geq I^{(H)}$ の場合に, ε' を十分小さな正の値として, $\alpha \geq \varepsilon'$ なら α を $\alpha \times \beta$ で置き換え, (d)へ. $\alpha < \varepsilon'$ なら α を初期値に戻し, $\hat{S}^{(M)}$ を $\hat{S}^{(L)}$ で置き換え, (d)へ.

コンプレックス法では, α の初期値は 1.3, β は 0.5

がよいとされている。ただし、本アルゴリズムでは、従来のコンプレックス法⁶⁾に対して、ステップ(c)において K_L が M_L になるごとにステップ(a)に戻る手続きを加えている。これは求める解が局所最小値に陥るのを防ぐためである。

3. 計算例

本章では、前章で提案した方法を両停留対称カム曲線の最適生成に適用した。また、得られたカム曲線を従来よく使われている変形台形と変形正弦カム曲線¹⁾と比較して、提案した方法の有効性を示す。

両停留対称カム曲線は、その中心点 ($T=0.5, S=0.5$) に関して中心対称になるので、 T の区間 $[0, 0.5]$ における曲線部分を最適に生成した後、中心対称原理に基づいて区間 $[0.5, 1]$ における曲線部分が簡単に対称生成できる。したがって、カム曲線の最適化計算における境界条件は次式となる。

$$\begin{cases} S(0) = 0 \\ V(0) = 0 \\ A(0) = 0 \\ S(0.5) = 0.5 \\ A(0.5) = 0 \end{cases}$$

また、カム曲線の記述には5次ユニフォーム B スプラインを用いた。すなわち、式(3)において $n=5$ となり、基底関数 $B(u)$ は次式となる。

$$\begin{cases} B_0(u) = (1-u)^5/120 \\ B_1(u) = (5u^5 - 20u^4 + 20u^3 + 20u^2 - 50u + 26)/120 \\ B_2(u) = (-10u^5 + 30u^4 - 60u^2 + 66)/120 \\ B_3(u) = (10u^5 - 20u^4 - 20u^3 + 20u^2 + 50u + 26)/120 \\ B_4(u) = (-5u^5 + 5u^4 + 10u^3 + 10u^2 + 5u + 1)/120 \\ B_5(u) = u^5/120 \end{cases}$$

以下の例において各計算用パラメータの値を $\epsilon=10^{-12}$, $\epsilon'=10^{-4}$, $D=1.0$, $M_L=50$ とした。

例題1: 本例題では、速度の極値 V_m と躍動の極値 J_m を拘束条件とし、それぞれの制限値を $V_m \leq 2.0$ と $|J_m| \leq 61.4$ とした。また、加速度の極値 A_m を非拘束的条件とした。得られたカム曲線の特徴値及び変位曲線、速度曲線、加速度曲線、躍動曲線を Table 1 と Fig.1 に示す。なお、比較するために変形台形カム曲線の特徴値も Table 1 に記入している。ただし、表中 N は計算中に使用した、 T の空間 $[0, 0.5]$ における B スプラインの分割数である。なお、Table 2 および Table 3 における N も同様である。

例題2: 本例題では、速度の極値 V_m と加速度の

Table 1 Characteristic values of cam curve

Curve type	V_m	A_m	J_m
Modified trapezoid	2.00	± 4.89	± 61.4
B-spline ($N=7$)	2.00	± 4.869	± 61.397

極値 A_m を拘束条件とし、それぞれの制限値を $V_m \leq 1.76$ と $|A_m| \leq 5.53$ とした。また、躍動の極値 J_m を非拘束的条件とした。得られたカム曲線の特徴値を Table 2 に示す。なお、比較するために変形正弦カム曲線の特徴値も Table 2 に記入している。

Table 2 Characteristic values of cam curve

Curve type	V_m	A_m	J_m
Modified sine	1.76	± 5.53	+69.5 -23.2
B-spline ($N=7$)	1.76	± 5.503	+66.439 -21.614

Fig.1 Obtained cam curve with uniform B-spline in Example 1

例題3： 本例題では、B スプラインの分割数 N が生成したカム曲線の特性に及ぼす影響を示す。この例では、例題1と同じ評価関数を使用し、得られた結果を Table 3 に示している。Table 3 からわかるように、分割数 N が7より小さい場合は、 N の増加につれて最適化の効果が高くなり、生成したカム曲線の特性がよくなっている。一方、 N の値が7を越えると、 N の増加によるカム曲線の特性の改善効果はほとんど見られない。これは、 $N=7$ の場合に求めたカム曲線は、すでに採用した評価関数に対応する最適解に十分近づいており、これ以上 B スプラインの分割数を増やしてもカム曲線の特性の改善効果は望めないことを意味している。

Table 3 Characteristic values of cam curve

Curve type	V_m	A_m	J_m
B-spline ($N=3$)	2.00	± 5.581	± 61.400
B-spline ($N=4$)	2.00	± 5.177	± 61.400
B-spline ($N=5$)	2.00	± 5.077	± 61.390
B-spline ($N=6$)	2.00	± 4.893	± 61.399
B-spline ($N=7$)	2.00	± 4.869	± 61.397
B-spline ($N=8$)	2.00	± 4.867	± 61.399
B-spline ($N=9$)	2.00	± 4.865	± 61.400
B-spline ($N=10$)	2.00	± 4.864	± 61.399

以上の例題からわかるように、提案した方法を使用すれば、従来よく利用されているタイプのカム曲線と同程度またはその以上により特性のカム曲線を生成することができる。これらの例では、特性の改善が数値的に大きくはないが、変形台形曲線と変形正弦曲線は長い間に理論と実際使用の経験から種々の検討を加えて完成した曲線であり、もとより特性が非常に優れたとされていることを考えれば、カム曲線ないし運動曲線の最適生成にとって以上の例題は提案した方法の有効性をよく示している。

4. 結 言

ユニフォーム B スプラインを用いてカム曲線を記述し、コンプレックス法を利用して目的に応じて B スプラインの制御点、すなわち、カム曲線を最適化する方法を提案した。また、現在よく利用されているタイプのカム曲線と比較した結果、提案方法によるカム曲線は同程度またはその以上により特性を持っていることも確認した。

従来のカム曲線に比べて、B スプラインを利用してカム曲線またはカム輪郭をより柔軟に表現することができるので、より複雑なカム機構の設計、例えば、カム機構の動力学的特性を含め最適的にカム輪郭を設計する場合は、提案した方法を活用可能であると思われる。これを次の課題にしたい。

文 献

- (1) 牧野洋, 自動機械機構学, (1976), 4-41. 日刊工業新聞社.
- (2) D.M.Tsay and C.O.Huey, Cam Motion Synthesis Using Spline Functions, Trans. ASME, J. Mech. Transmiss. Automat. Design, **110**-2(1988), 161-165.
- (3) J. Angeles and C.S. Lopez-Cajun, カム機構の最適化, (西岡雅夫訳), 1997, 36-48, 日刊工業新聞社.
- (4) M.Neamtu, H.Pottmann and L.L.Schumaker, Designing NURBS Cam Profiles Using Trigonometric Splines, Trans. ASME, J. Mech. Design, **120**-2(1998), 175-180.
- (5) 中嶋孝行・大野敏則, CAD・CG 技術者のための NURBS 早わかり, (1994), 84-94, 工業調査会.
- (6) 尾崎弘明・林長軍, コンプレックス法による動力学を考慮したマニピュレータの障害物回避軌道生成, 日本ロボット学会誌, **15**-1(1997), 139-144.
- (7) M.J.Box, A New Method of Constrained Optimization and a Comparison with Other Methods, Computer Journal, **8**(1965), 42-52.