円板の境界条件の実験的同定法*
(非線形の軸対称問題の場合)安田 仁彦^{*1}, 神谷 恵輔^{*1}, 鈴木 昭宏^{*1}Experimental Identification Technique for Boundary Conditions
of a Circular Plate
(Nonlinear Axisymmetrical Problems)Kimihiro YASUDA^{*2}, Keisuke KAMIYA and Akihiro SUZUKI^{*2} Department of Electronic-Mechanical Engineering, Nagoya University,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

In a previous paper, the first author proposed an experimental identification technique for boundary conditions of a circular plate for the axisymmetrical case. In that paper, the boundary conditions were assumed to be linear. In this paper, an attempt is made to generalize the technique so that it can be applied to the case in which the boundary conditions are nonlinear. The main procedures of the proposed technique are (1) determining the displacement in an analytical form by combining experimental data with the theoretical solution, and (2) determining the boundary conditions by using the principle of harmonic balance. Numerical simulation is conducted. It is confirmed that (1) the proposed technique determines the boundary conditions when noises are small and that (2) use of data of strains in addition to those of displacements improves accuracy.

Key Words: Identification, Nonlinear Vibration, Vibration of Continuous System, Boundary Conditions, Circular Plate, Axisymmetrical Problem, Harmonic Balance

1. ま え が き

機械・構造物の高速化, 高性能化, 軽量化に対する要求と共に, これらの対象物の動的問題に対する数学モデルを精度よく構築することが重要となってきた。このため, 理論的モデル化の結果と対象物の動的応答の実験データを融合して, よりよい数学モデルを作成しようとする実験的同定法が大きな関心を持っている。

実験的同定の問題のうち, 境界条件の同定については, 田中ら⁽¹⁾, 長松ら⁽²⁾がその必要性を指摘している。しかしこれまで, 軸受部の同定のように, 個別の問題に対する同定法の研究は多くなされてきたが, 汎用性のある同定法の開発を目的とした研究は少ない。特に実際の場合に困難なことが多い, 境界部の加振あるいは境界部の動的応答の測定を必要としない同定法の開発に関する研究は少ない。境界部の加振あるいは境界部の動的応答の測定を必要としない同定法の研究としては, 荒井ら⁽³⁾や安田ら^{(4),(5)}によるはりの同定

法, Zhu らによる矩形板の同定法⁽⁶⁾, 安田らによる円板の同定法がある⁽⁷⁾。

実際の系においては, 境界条件は通常非線形性を示す。しかしこれまでの研究の多くが線形の境界条件を対象にしている。非線形の境界条件の同定に関する基礎的な検討を目的にして, 著者の一人は, はりを対象に同定法を提案した⁽⁸⁾。この報告では, 非線形の境界条件の同定についてさらに検討を加えることを目的として, 円板をとりあげる。

2. 実験的同定法の提案

2.1 問題設定 機械・構造物の構成要素として円板がしばしば用いられる。この報告では, 円板の境界条件を実験的に同定することを考える。円板単独の特性は既知であるとする。簡単のため, 円板は一様であるとし, 軸対称問題を考える。

同定のため, 図1に示すように, 円板の境界をたわみ w と傾き $\theta = \partial w / \partial r$ に対するばね, およびこれと並列に置かれたダンパでモデル化する。この報告では, これらのばね, ダンパの特性は線形とは限定せず, たわみと傾きに対するばねの復元力 F_r と復元力モー

* 原稿受付 2001年8月27日。

^{*1} 正員, 名古屋大学大学院工学研究科(〒464-8603 名古屋千種区不老町)。

E-mail: yasuda@nuem.nagoya-u.ac.jp

Fig. 1 Model of a circular plate

メント M_r , たわみと傾きに対するダンパの減衰力 F_d と減衰力モーメント M_d は, それぞれ非線形関数になるとする. 対象とする系によっては, 境界部に等価な質量 m と慣性モーメント I を考える必要がある. これらを含めて考える. このとき境界条件の実験的同定とは, 円板の動的応答の実験データを用いて, 未知関数 F_r , F_d , M_r , M_d と未知パラメータ m , I を定めることである.

実際の問題では, 境界部に外力を加えたり境界部の動的応答を測定することが困難な場合が少なくない. そこでこの報告では, 境界部を除く円板本体に外力を加え, 境界部を除く円板本体の動的応答の実験データを利用する場合を考える.

2.2 運動方程式とその解 実験的同定法の提案の準備として, 円板の運動方程式と境界条件が与えられたときの解を考える. 円板は密度 ρ , 縦弾性係数 E , ポアソン比 ν の材料からなり, 半径 a , 厚さ h とする. 静止時の円板の中心を原点 O とし, 極座標 (r, ϕ) を定める. 円板の横方向に単位面積あたり f の外力が作用してたわみ w を生じるものとする. 軸対称問題においては, 外力 f , たわみ w , そして傾き θ はいずれも座標 r と時間 t の関数となる. 円板の本体に粘性減衰が作用する場合を考え, 減衰係数を C とおく. このとき運動方程式は

$$D\nabla^4 w + C\frac{\partial w}{\partial t} + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (1)$$

となる. ここで,

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \\ D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

である. 境界条件は, $r = a$ で

$$\left. \begin{aligned} D\frac{\partial}{\partial r}(\nabla^2 w) &= F_r + F_d + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ D\left(\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\nu}{r}\theta\right) &= -M_r - M_d - I\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

が満たされることである.

外力として, 基本角振動数が ω の周期外力を作用させるものとする. この外力 f は,

$$f = F_0(r) + F_1(r)\cos\omega t + F_2(r)\cos 2\omega t + \cdots + F_1^*(r)\sin\omega t + F_2^*(r)\sin 2\omega t + \cdots \quad (4)$$

の形のフーリエ級数で表すことができる. ここで係数 $F_0(r)$, $F_n(r)$, $F_n^*(r)$ ($n = 1, 2, \dots$) は, 外力 f から定められる座標 r の既知関数である. 境界条件が非線形であるので, 円板は例えば分数調波振動のような応答を示し得るが, ここでは調振動が発生する場合を考える. このときたわみ w は,

$$w = W_0(r) + W_1(r)\cos\omega t + W_2(r)\cos 2\omega t + \cdots + W_1^*(r)\sin\omega t + W_2^*(r)\sin 2\omega t + \cdots \quad (5)$$

の形のフーリエ級数で表すことができる. ここで係数 $W_0(r)$, $W_n(r)$, $W_n^*(r)$ ($n = 1, 2, \dots$) は座標 r の未知関数である. 式 (4) と式 (5) を式 (1) に代入すると, $W_0(r)$, $W_n(r)$, $W_n^*(r)$ を定める式として

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 W_0(r) &= \frac{F_0(r)}{D} \\ \nabla^4 W_n(r) + \beta_n^4 W_n^*(r) - \alpha_n^4 W_n(r) &= \frac{F_n(r)}{D} \\ \nabla^4 W_n^*(r) - \beta_n^4 W_n(r) - \alpha_n^4 W_n^*(r) &= \frac{F_n^*(r)}{D} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

を得る. ここで

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n^4 &= \frac{\rho h}{D}(n\omega)^2 \\ \beta_n^4 &= \frac{C}{D}(n\omega) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

である.

式 (6) の一般解を求める. まず式 (6) の右辺を 0 として得られる同次方程式の一般解を求める. $r \rightarrow 0$ で特異とならない第 1 式の一般解は

$$W_0(r) = C_{10} + C_{20}r^2 \quad (8)$$

である. ここで C_{10} , C_{20} は任意定数である. つぎに式 (6) の第 2, 3 式の一般解を求めるために, 0 次の円柱関数 Z_0 を用いて, 求める解を

$$\left. \begin{aligned} W_n(r) &= A_n Z_0(\lambda_n r) \\ W_n^*(r) &= A_n^* Z_0(\lambda_n r) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

の形におく. ここで A_n , A_n^* , λ_n ($n = 1, 2, \dots$) は未知定数である. 式 (9) が非自明な解となるための条件は

$$\begin{vmatrix} \lambda_n^4 - \alpha_n^4 & \beta_n^4 \\ -\beta_n^4 & \lambda_n^4 - \alpha_n^4 \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

である. これを解くと, λ_n は

$$\lambda_n = \pm\{a_n + jb_n\}, \pm\{b_n - ja_n\}, \pm\{a_n - jb_n\}, \pm\{b_n + ja_n\} \quad (11)$$

の形で定められる。 $a_n, b_n (n = 1, 2, \dots)$ の具体的な表示は省略する。以下、式 (11) で求めた λ_n を、それぞれ $\pm\lambda_{1n}, \pm\lambda_{2n}, \pm\lambda_{3n}, \pm\lambda_{4n}$ とおく。 λ_n の各値に対して A_n, A_n^* の比を求めると、 λ_n の前の二組、後の二組の値に対してそれぞれ

$$\frac{A_n^*}{A_n} = -j; j \quad (12)$$

を得る。よって $r \rightarrow 0$ で特異とならない一般解として

$$\left. \begin{aligned} W_n(r) &= B_{1n} J_0(\lambda_{1n} r) + B_{2n} J_0(\lambda_{2n} r) \\ &\quad + B_{3n} J_0(\lambda_{3n} r) + B_{4n} J_0(\lambda_{4n} r) \\ W_n^*(r) &= -j B_{1n} J_0(\lambda_{1n} r) - j B_{2n} J_0(\lambda_{2n} r) \\ &\quad + j B_{3n} J_0(\lambda_{3n} r) + j B_{4n} J_0(\lambda_{4n} r) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

を得る。ここで $B_{in} (i = 1, 2, 3, 4; n = 1, 2, \dots)$ は任意定数、 J_0 は第 1 種 0 次のベッセル関数である。この式で $J_0(\lambda_{in} r)$ を実部と虚部に分けて

$$\left. \begin{aligned} J_0(\lambda_{1n} r) &= u_{1n}(r) + j v_{1n}(r) \\ J_0(\lambda_{2n} r) &= u_{2n}(r) - j v_{2n}(r) \\ J_0(\lambda_{3n} r) &= u_{1n}(r) - j v_{1n}(r) \\ J_0(\lambda_{4n} r) &= u_{2n}(r) + j v_{2n}(r) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

とおけば、式 (13) は

$$\left. \begin{aligned} W_n(r) &= C_{1n} u_{1n}(r) + C_{2n} v_{1n}(r) \\ &\quad + C_{3n} u_{2n}(r) + C_{4n} v_{2n}(r) \\ W_n^*(r) &= -C_{2n} u_{1n}(r) + C_{1n} v_{1n}(r) \\ &\quad + C_{4n} u_{2n}(r) - C_{3n} v_{2n}(r) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

と書き直すことができる。ここで $C_{in} (i = 1, 2, 3, 4; n = 1, 2, \dots)$ は任意定数である。

つぎに式 (6) の特解を求める。フーリエ係数 $W_0(r), W_n(r), W_n^*(r), F_0(r), F_n(r), F_n^*(r)$ のハンケル変換を、それぞれ $\bar{W}_0(\xi), \bar{W}_n(\xi), \bar{W}_n^*(\xi), \bar{F}_0(\xi), \bar{F}_n(\xi), \bar{F}_n^*(\xi)$ で表すと、式 (6) から

$$\left. \begin{aligned} \xi^4 \bar{W}_0(\xi) &= \frac{\bar{F}_0(\xi)}{D} \\ (\xi^4 - \alpha_n^4) \bar{W}_n(\xi) + \beta_n^4 \bar{W}_n^*(\xi) &= \frac{\bar{F}_n(\xi)}{D} \\ -\beta_n^4 \bar{W}_n(\xi) + (\xi^4 - \alpha_n^4) \bar{W}_n^*(\xi) &= \frac{\bar{F}_n^*(\xi)}{D} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

が得られる。この式から得られる特解を $G_0(r), G_n(r), G_n^*(r) (n = 1, 2, \dots)$ とおけば、

$$\left. \begin{aligned} G_0(r) &= \frac{1}{D} \int_0^\infty \bar{F}_0(\xi) \frac{1}{\xi^3} J_0(r\xi) d\xi \\ G_n(r) &= \frac{1}{D} \int_0^\infty \frac{(\xi^4 - \alpha_n^4) \bar{F}_n(\xi) - \beta_n^4 \bar{F}_n^*(\xi)}{(\xi^4 - \alpha_n^4)^2 + \beta_n^8} \xi J_0(r\xi) d\xi \\ G_n^*(r) &= \frac{1}{D} \int_0^\infty \frac{\beta_n^4 \bar{F}_n(\xi) + (\xi^4 - \alpha_n^4) \bar{F}_n^*(\xi)}{(\xi^4 - \alpha_n^4)^2 + \beta_n^8} \xi J_0(r\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

となる。ここで $\bar{F}_0(r), \bar{F}_n(0), \bar{F}_n^*(r)$ は

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_0(\xi) &= \int_0^\infty r F_0(r) J_0(\xi r) dr \\ \bar{F}_n(\xi) &= \int_0^\infty r F_n(r) J_0(\xi r) dr \\ \bar{F}_n^*(\xi) &= \int_0^\infty r F_n^*(r) J_0(\xi r) dr \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

によって求められる。例として、半径 b の円内に一様な大きさ q_0 の調和外力

$$f = q_0 H(b - r) \cos \omega t \quad (19)$$

が作用する場合を考える。ここで $H(b - r)$ はヘビサイドのステップ関数である。このとき式 (18) は

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_n(\xi) &= \begin{cases} q_0 \frac{b}{\xi} J_1(\xi b) & (n = 1) \\ 0 & (n \neq 1) \end{cases} \\ \bar{F}_n^*(\xi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

となる。特に $\pi b^2 q_0 = F_c$ を一定にしたまま $b \rightarrow 0$ として、 $\lim_{b \rightarrow 0} J_1(\xi b)/(\xi b) = 1/2$ なる関係を用いると、円板の中心に大きさ F_c の調和外力が作用する場合の $\bar{F}_1(\xi)$ として

$$\bar{F}_1(\xi) = \frac{F_c}{2\pi} \quad (21)$$

を得る。

以上から式 (6) の一般解は、

$$\left. \begin{aligned} W_0(r) &= C_{10} + C_{20} r^2 + G_0(r) \\ W_n(r) &= C_{1n} u_{1n}(r) + C_{2n} v_{1n}(r) \\ &\quad + C_{3n} u_{2n}(r) + C_{4n} v_{2n}(r) + G_n(r) \\ W_n^*(r) &= -C_{2n} u_{1n}(r) + C_{1n} v_{1n}(r) \\ &\quad + C_{4n} u_{2n}(r) - C_{3n} v_{2n}(r) + G_n^*(r) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

となる。任意定数 C_{in} は、式 (22) を式 (5) に代入して得られる w を式 (3) に代入し、その両辺をフーリエ級数の形に表し、ハーモニックバランス法に基づいて定められる。

2.3 実験的同定法 円板の動的応答の実験データから、円板の境界条件を同定する方法を考える。実験的同定のため、外力の大きさと分布および基本角振動数 ω を適当に定め、式 (4) の形の周期外力を円板に作用させる。この外力に対する調和応答を円板の N 個の点 $r = r_i (i = 1, 2, \dots, N)$ において測定する。

はじめに、たわみのデータを用いる場合を考える。得られたたわみを各測定点ごとに式 (5) の形のフーリエ級数に展開し、そのフーリエ係数 $W_0(r_i), W_n(r_i), W_n^*(r_i)$ を求める。これらは、式 (22) で $r = r_i$ として得られる値に等しくなければならないから、

$$\left. \begin{aligned} C_{10} + C_{20}r_i^2 &= W_0(r_i) - G_0(r_i) \\ C_{1n}u_{1n}(r_i) + C_{2n}v_{1n}(r_i) + C_{3n}u_{2n}(r_i) \\ &\quad + C_{4n}v_{2n}(r_i) = W_n(r_i) - G_n(r_i) \\ -C_{2n}u_{1n}(r_i) + C_{1n}v_{1n}(r_i) + C_{4n}u_{2n}(r_i) \\ &\quad - C_{3n}v_{2n}(r_i) = W_n^*(r_i) - G_n^*(r_i) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

を得る。これは任意定数 C_{10} , C_{20} および C_{in} に関する線形方程式である。測定点の数 N を 2 として、各測定データから得られる式 (23) を連立させて解けば、 C_{10} , C_{20} , C_{in} を定めることができる。実際には測定データにノイズが含まれることを考慮して、 N を 2 より大きくした場合のデータから得られる式 (23) に最小二乗法を適用して C_{10} , C_{20} , C_{in} を定める。得られた結果を式 (22) に代入し、さらにその結果を式 (5) に代入してたわみ w を定める。こうして理論式と実験データを用いてたわみ w を式 (5) の形に定める。

境界条件によっては、上で述べた、たわみのデータのみを用いる方法では同定精度が悪い場合がある。このような場合の解決策の一つとして、傾きやひずみのようなデータの利用が考えられる。ここではひずみのデータの利用を想定し、たわみの 2 階微分が計測できるとする。得られたデータから、測定点 $r = r_i$ における $\partial^2 w / \partial r^2$ のフーリエ級数の係数 $d^2 W_0(r) / dr^2|_{r=r_i}$, $d^2 W_n(r) / dr^2|_{r=r_i}$, $d^2 W_n^*(r) / dr^2|_{r=r_i}$ を求める。これらは、(22) の両辺を r で 2 階微分して得られる式において、 $r = r_i$ において得られる値に等しいから、

$$\left. \begin{aligned} 2C_{20} &= \frac{d^2 W_0(r)}{dr^2} - \frac{d^2 G_0(r)}{dr^2} \Big|_{r=r_i} \\ C_{1n} \frac{d^2 u_{1n}(r)}{dr^2} + C_{2n} \frac{d^2 v_{1n}(r)}{dr^2} + C_{3n} \frac{d^2 u_{2n}(r)}{dr^2} \\ &\quad + C_{4n} \frac{d^2 v_{2n}(r)}{dr^2} = \frac{d^2 W_n(r)}{dr^2} - \frac{d^2 G_n(r)}{dr^2} \Big|_{r=r_i} \\ -C_{2n} \frac{d^2 u_{1n}(r)}{dr^2} + C_{1n} \frac{d^2 v_{1n}(r)}{dr^2} + C_{4n} \frac{d^2 u_{2n}(r)}{dr^2} \\ &\quad - C_{3n} \frac{d^2 v_{2n}(r)}{dr^2} = \frac{d^2 W_n^*(r)}{dr^2} - \frac{d^2 G_n^*(r)}{dr^2} \Big|_{r=r_i} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

を得る。式 (23) と式 (24) に最小二乗法を適用して C_{10} , C_{20} , C_{in} を定める。得られた結果を式 (22) に代入し、さらに式 (5) に代入してたわみ w を定める。

以上によってたわみ w を解析式の形で求めることができたので、つぎに境界部における未知関数 F_r , F_d , M_r , M_d を式 (3) から定めることを考える。多くの場合、 F_r , M_r はそれぞれたわみ w と傾き θ の関数であり、 F_d , M_d はそれぞれたわみ速度 $\dot{w}$ と傾き速度 $\dot{\theta}$ の関数である。ここではこれらの未知関数は、近似的にそれぞれの引数の多項式で表すことができるものとし、

$$\left. \begin{aligned} F_r &= k_w w + \alpha_w w^2 + \beta_w w^3 \\ F_d &= c_w \dot{w} + \zeta_w \dot{w}^2 + \eta_w \dot{w}^3 \\ M_r &= k_\theta \theta + \alpha_\theta \theta^2 + \beta_\theta \theta^3 \\ M_d &= c_\theta \dot{\theta} + \zeta_\theta \dot{\theta}^2 + \eta_\theta \dot{\theta}^3 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

とおく。ここで k_w , α_w , β_w , c_w , ζ_w , η_w , k_θ , α_θ , β_θ , c_θ , ζ_θ , η_θ は未知パラメータであり、予備的な実験や理論的考察によって未知関数の性質（例えば対称性）などがわかっていれば、それを考慮（例えば二乗の項を除く）して未知関数の形をより正しいものにしておけば精度向上が期待できる。以上のようにして未知関数を定める問題を、未知パラメータを定める問題に帰着させる。

未知パラメータを定める方法を考える。上で求めたたわみ w を用いて、式 (25) に表れる w^2 , w^3 , $\dots$ や、 θ , θ^2 , $\dots$ の各項を求め、それらをフーリエ級数の形に展開する。これらを w のフーリエ級数とあわせて式 (3) に代入すると、両辺はフーリエ級数の形をとる。そこでハーモニックバランスの原理を用いて、両辺の適当な項を等しいとおく。その結果、境界条件の未知パラメータに関する線形方程式を得る。このようにして得られた連立方程式に再び最小二乗法を適用することにより、未知パラメータを定める。以上が提案する境界条件の同定法である。

3. 数値シミュレーション

前章で提案した実験的同定法の有効性を、数値シミュレーションによって確かめる。このため、数値的に得た動的応答のデータを実験データとみなし、このデータを用いて、提案した同定法によって未知パラメータを求め、得られた値をもとの値と比較する方法をとる。

数値シミュレーションのため、円板の諸元を

半径	a	$=$	3.2×10^{-1}	m
厚さ	h	$=$	5.0×10^{-4}	m
縦弾性係数	E	$=$	2.06×10^{11}	Pa
密度	ρ	$=$	7.84×10^3	kg/m ³
減衰係数	C	$=$	5.0×10^{-1}	Ns/m ³
ポアソン比	ν	$=$	3.0×10^{-1}	

とする。境界の非線形性は復元力のみが存在し、 F_r , F_d , M_r , M_d が

$$\left. \begin{aligned} F_r &= k_w w + \beta_w w^3 \\ F_d &= c_w \dot{w} \\ M_r &= k_\theta \theta + \beta_\theta \theta^3 \\ M_d &= c_\theta \dot{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

である場合を考える。これらの式に現れるパラメータの値を

$$\begin{aligned}
 k_w &= 1.0 \times 10^4 & \text{N/m} \\
 k_\theta &= 6.0 \times 10^2 & \text{Nm/rad} \\
 c_w &= 2.0 & \text{Ns/m} \\
 c_\theta &= 3.0 & \text{Nms/rad} \\
 \beta_w &= 7.0 \times 10^{10} & \text{N/m}^3 \\
 \beta_\theta &= 8.0 \times 10^7 & \text{Nm/rad}^3 \\
 m &= 1.0 \times 10^{-1} & \text{kg} \\
 I &= 5.0 \times 10^{-3} & \text{kgm}^2
 \end{aligned}$$

とする。

同定のための外力として、円板中央に加えらるる集中調和外力を考える。大きさ F_c を

$$F_c = 0.1 \text{ N} \quad (27)$$

とする。

動的応答を計算するため、ここでは式(5)で第3次までの成分を考慮する。集中外力に対する $\bar{F}_1(\xi)$ は、前章で述べたように、式(21)によって与えられる。

同定に際して未知関数 F_r , F_d , M_r , M_d の形を定める必要がある。ここでは特性をかなり把握している場合を想定して、これらを

$$\left. \begin{aligned}
 F_r &= k_w w + \alpha_w w^2 + \beta_w w^3 \\
 F_d &= c_w \dot{w} \\
 M_r &= k_\theta \theta + \alpha_\theta \theta^2 + \beta_\theta \theta^3 \\
 M_d &= c_\theta \dot{\theta}
 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Fig. 2 Points of measurement ($r_0 \sim r_3$)

Fig. 3 Amplitude of ω component at point r_0

とおく。

応答の測定点は、図2に示すように、円板の中心 r_0 と、半径を4等分する分割点3箇所 $r_i (i = 1, 2, 3)$ とする。

3.1 実験データにノイズが含まれない場合 はじめに、実験データにノイズが含まれない場合を考える。同定に用いる外力の振動数を定めるため、振動数を0Hzから40Hzの範囲で応答を求めた。その結果を、測定点 $r = r_0$ における1次調和成分の大きさ $|W_1| = \sqrt{W_1(r)^2 + W_1^*(r)^2}$ と外力の基本角振動数 ω の関数として示すと図3のようになった。図3の実線、波線は安定、不安定な振動を意味する。この図を参照して、同定に用いる外力の振動数としてここでは、第一次の共振点付近の11.35Hzと定める。

定めた振動数に対する動的応答の例を図4に示す。この図は周期 T を8等分した各時刻におけるたわみを、横軸に半径 r をとって示したものである。

この節では、実験データとしてたわみのデータを用いた場合のシミュレーションを示す。図5に点 $r = r_0$ のデータをフーリエ解析した結果を示す。図5の結果とその他の測定点におけるフーリエ解析の結果を式(23)に代入し、任意定数 $C_{in} (i = 1, 2, 3, 4; n = 1, 2, 3)$ を求めると表1のようになった。表1の値を用いて境

Fig. 4 Deflection of the circular plate

界部の未知パラメータを定めたところ表2を得た。表2から、同定によるパラメータの値はもとの値とよく一致しており、提案した同定法が有効であることが確認された。

3.2 実験データにノイズが含まれる場合 実験データを計測する場合は、計測中にノイズが入る。このような場合を想定し、正規乱数を加えた動的応答を実験データとみなして同定を行った。同定に用いた外力の振動数は、前節と同じく11.35Hzとした。

ここでもはじめ、実験データとしてたわみを用いた。ノイズが含まれているデータとして、測定点 $r = r_0$ におけるたわみに対して、最大で約1%と約3%に相当する正規乱数を加えた。

Fig. 5 Results of Fourier analysis at point r_0

Table 1 Values of C_{in} ($i = 1, 2, 3, 4; n = 1, 2, 3$)

C_{11}	5.111×10^{-4}	C_{21}	-3.559×10^{-3}
C_{31}	3.744×10^{-5}	C_{41}	2.501×10^{-4}
C_{12}	0.000	C_{22}	0.000
C_{32}	0.000	C_{42}	0.000
C_{13}	1.440×10^{-4}	C_{23}	-2.560×10^{-4}
C_{33}	-1.568×10^{-6}	C_{43}	-2.599×10^{-6}

Table 2 Identified parameters

parameter	original	identified
k_w	1.0×10^4	1.000×10^4
k_θ	6.0×10^2	6.000×10^2
c_w	2.0	2.000
c_θ	3.0	3.000
α_w	0.0	0.000
α_θ	0.0	0.000
β_w	7.0×10^{10}	7.000×10^{10}
β_θ	8.0×10^7	8.002×10^7
m	1.0×10^{-1}	1.000×10^{-1}
I	5.0×10^{-3}	5.000×10^{-3}

このデータを用いて得られた同定結果を表3に示す。表から、実験データに含まれるノイズが大きくなるにつれて、同定の精度が悪くなること、特にパラメータ β_θ , I の精度が悪くなることわかる。同定の精度を別の観点から見るため、例として、3%のノイズを含むデータから得られたパラメータを用いて図3に相当する共振曲線を求め、図3と比較した。その結果を図6に示す。図から、両者に大きな違いは見られないことがわかる。したがってたわみにあまり大きな影響を与えないパラメータの値は同定によって定めにくいと思われる。

同定の精度を向上させること目的として、つぎに実験データとして、たわみだけでなく、ひずみに相当するたわみの2階微分のデータも用いる場合を考えた。ひずみの計測場所は円板の中心を除いた図2の r_1, r_2, r_3 とした。たわみのデータと同様に、このデータに最大値の約1%と約3%の大きさのノイズを加えた。式(22)中の任意定数 C_{in} を求める際に、式(23)と

Table 3 Identified parameters

	original	identified (1%noise)	identified (3%noise)
k_w	1.0×10^4	1.006×10^4	1.018×10^4
k_θ	6.0×10^2	6.219×10^2	6.995×10^2
c_w	2.0	1.890	1.672
c_θ	3.0	3.039	3.110
α_w	0.0	0.000	0.000
α_θ	0.0	0.000	0.000
β_w	7.0×10^{10}	6.921×10^{10}	6.761×10^{10}
β_θ	8.0×10^7	9.225×10^6	-2.679×10^8
m	1.0×10^{-1}	9.902×10^{-2}	9.701×10^{-2}
I	5.0×10^{-2}	2.365×10^{-3}	-9.865×10^{-3}

Fig. 6 Amplitude of ω component at point $r = r_0$ predicted by data with 3% noise

Table 4 Identified parameters

	original	identified (1%noise)	identified (3%noise)
k_w	1.0×10^4	1.009×10^3	1.028×10^4
k_θ	6.0×10^2	5.987×10^2	5.925×10^2
c_w	2.0	1.916	1.743
c_θ	3.0	3.016	3.049
α_w	0.0	0.000	0.000
α_θ	0.0	0.000	0.000
β_w	7.0×10^{10}	6.910×10^{10}	6.722×10^{10}
β_θ	8.0×10^7	9.203×10^7	1.264×10^8
m	1.0×10^{-1}	9.889×10^{-2}	9.646×10^{-2}
I	5.0×10^{-3}	6.163×10^{-3}	8.871×10^{-3}

共に式 (24) に最小二乗法を適用した。この場合に得られた同定結果を表 4 に示す。この表から β_θ , I を含めて同定精度が向上していることがわかる。

4. ま と め

非線形の境界条件に適用できる実験的同定法の開発のための基礎的な検討を目的として、円板を取り上げ、軸対称問題に対して、同定法を提案した。提案した同定法は、境界部をばねとダンパ、および等価な質量と慣性モーメントで置き換え、円板本体の動的応答のデータを用いて、ばねとダンパの特性を与える関数および質量と慣性モーメントの値を定めるものである。

数値シミュレーションによって、提案した同定法の有効性を検討した。その結果、実験データのノイズが小さい場合にたわみのデータを用いて境界条件の同定が可能であること、実験データのノイズが大きいときは、たわみのデータに加え、例えばひずみのデータを併用することで、同定精度を上げることができることを確認した。

文 献

- (1) 田中・三枝, 振動モデルとシミュレーション, (1984), 281, 応用技術出版
- (2) 長松昭男・大熊政明, 部分構造合成法, (1991), 26, 培風館
- (3) 荒井政大・足立忠晴・須藤秀和・松本浩之, 衝撃を受けるはりの境界条件の同定 (Laplace 変換法を併用した境界要素法による解析法), 機論, **62**-593, A(1996), 226.
- (4) 安田仁彦・後藤良次, はりの境界条件の実験的同定法 (境界条件が線形の場合), 機論, **60**-570, C(1994), 482.
- (5) 後藤良次・安田仁彦, はりの境界条件の実験的同定法 (適用性の検討と転がり軸受への応用), 機論, **62**-597, C(1996), 1797.
- (6) J.Zhu and L.Huang, Estimation of Boundary Parameters of Plate Structures, *J. Sound Vib.*, **179**-3, (1995), 455.
- (7) 安田仁彦・崔勇俊, 円板の境界条件の実験的同定法 (線形の軸対称問題の場合), 機論, **61**-590, C(1996), 3889.
- (8) 安田仁彦・後藤良次, はりの境界条件の実験的同定法 (境界条件が非線形の場合), 機論, **62**-599, C(1996), 2599.