解析解による板の曲げ振動解析*
(集中励振力とその関連問題)浦 田 喜 彦^{*1}Analysis of Bending Vibration of Plates Using Analytic Solutions
(Concentrated Exciting Forces and Related Problems)Yoshihiko URATA^{*2}^{*2} Department of Mechanical Engineering, Shizuoka Institute of Science and Technology,
2200-2 Toyosawa, Fukuroi-shi, Shizuoka, 437-8555 Japan

This paper deals with analysis of bending vibration of plates excited by concentrated forces and related problems. These problems have been treated by the finite element method, the finite difference method and the method of series expansion so far. However, these methods are not necessarily adequate to the present problems, because they cannot express exactly singularities due to concentrated forces. Analytic solutions including particular solutions corresponding to concentrated forces are used in this study. Boundary conditions are satisfied approximately by the collocation method. This method can be applied to not only forced vibrations but also free vibrations of a plate supported at several points. A class of arbitrarily shaped plates can be analysed by the proposed method.

Key Words: Vibration of Continuous System, Arbitrarily Shaped Plate, Analytic Solution, Concentrated Force, Singularity, Forced Vibration, Point Support, Free Vibration

1. 緒 言

板の曲げ振動では集中荷重による強制振動のほか、点支持された場合も板に集中力が作用する問題と考えることができる。集中力というのはせまい範囲に加えられる分布力をモデル化した概念で、その本来の意味は問題の単純化にあると考えられる。ところが、力の作用点では形式的に計算した単位面積あたりの力が無限大になることからわかるように、集中力が関与する問題は解析的にはある種の特異性が関係する問題であり、その取り扱いには必ずしも容易とは言えない面がある。従来はこのような問題も差分法^{(1),(2)}や有限要素法^{(3),(4)}などで扱われてきた。しかし、これらの研究では比較的粗い分割で計算しており、結果の信頼性についてはなお検討の余地を残していると考えざるを得ない。

ところで著者はこれまでに板の曲げ振動解析に解析解が有効に利用できることを示してきた^{(5),(6)}。その方法は極座標系で表した方程式の解を項とする級数を構成して、それに対して選点法を適用するという単純な

ものである。この方法は集中力が関与する問題にも拡張することができる。集中力による特異性の表現は解関数の選択の問題であって比較的簡単に対応できる。実際の計算では特異性を表現する項を本研究でこれまで用いてきた解級数に付け加えるだけでよい。この方法では集中力を集中力としてそのまま扱うことができ、モデル化の本来の特長を活かすことができる。

本論文ではこの方法の効果を確かめるために、点支持された板などの解析例を示す。

主な記号

 x, y : 直角座標 r, θ : 二次元極座標 (全体座標) ∇^2 : ラプラシアン $\mathbf{r}$: 位置ベクトル $r^{(i)}, \theta^{(i)}$: 力の作用点 $\mathbf{r} = \mathbf{a}_i$ を原点とする局所座標 w : 板の横変位 $D, \nu, \rho h$: 板の曲げ剛性, ポアソン比, 面密度 ω : 角振動数 $\delta(\mathbf{r})$: デルタ関数 $J_n(z), Y_n(z)$: n 次の第 1, 2 種ベッセル関数 $I_n(z), K_n(z)$: n 次の第 1, 2 種変形ベッセル関数

* 原稿受付 2001 年 10 月 4 日。

^{*1} 正員, 静岡理工科大学理工学部 (〒437-8555 袋井市豊沢 2200-2)。

E-mail: urata@me.sist.ac.jp

2. 集中強制力に対する特解と一般解

2.1 集中力に対する特解 角振動数 ω で調和振動する一つの集中励振力 F が原点に作用する板の曲げ振動の方程式はつぎのように書くことができる。

$$D\nabla^4 w - \rho h \omega^2 w = F \cdot \delta(\mathbf{r}) \quad (1)$$

$\delta(\mathbf{r})$ は二次元のデルタ関数で $\delta(x)\delta(y)$ と等価である。式(1)の記号を改めてつぎのように書く。

$$\nabla^4 w - \alpha^4 w = f \cdot \delta(\mathbf{r}) \quad (2)$$

ここに

$$\alpha^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D}, \quad f = \frac{F}{D} \quad (3)$$

とした。方程式(2)の特解はつぎようになる。(付録参照)

$$w(r, \theta) = f \cdot q(r) \quad (4)$$

$$q(r) = -\frac{1}{8\alpha^2} \left\{ Y_0(\alpha r) + \frac{2}{\pi} K_0(\alpha r) \right\} \quad (5)$$

式(5)右辺に含まれる $Y_0(\alpha r)$ と $K_0(\alpha r)$ はそれぞれ単独では $r=0$ で特異性を持つ関数である。しかし、これら2関数の特異性を相殺するように係数が定められているので式(5)全体としては原点でも正則であり、 $q(0)=0$ である。これは集中荷重の作用点であっても板の変位が無限大になることはあり得ないといういわば一つの境界条件を適用することによって導かれたものである。力の作用点の近傍における $q(r)$ の変化の概要を図1に示す。 $q(r)$ を r について微分した1階導関数は $r=0$ では正則であるが、2階以上の導関数はすべて $r=0$ で特異性を示す。これは物理的には曲げモーメントやせん断力が集中力の作用点で特異性を持つことに対応している。なお、 $q(0)=0$ であることからわかるように一般に $q(r)$ は単独では集中力の作用点近傍の変位さえも表すことができない。 $q(r)$ と方程式(2)の同次解を重ね合わせることによって始めて変位分布の全体を表すことができるのである。

図2に示すように集中力が原点以外の点 $\mathbf{r} = \mathbf{a}_i$ ($=a_i \mathbf{i} + b_i \mathbf{j}$) に作用するときには式(2)に替えて

$$\nabla^4 w - \alpha^4 w = f \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}_i) \quad (6)$$

が方程式になる。その特解は式(4)の原点を $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ から $\mathbf{r} = \mathbf{a}_i$ に変更した次式となる。

$$w(r, \theta) = f \cdot q(r^{(i)}) \quad (7)$$

$$q(r^{(i)}) = -\frac{1}{8\alpha^2} \left\{ Y_0(\alpha r^{(i)}) + \frac{2}{\pi} K_0(\alpha r^{(i)}) \right\} \quad (8)$$

Fig. 1 Distribution of $w=q(r)$ around an exciting point

Fig. 2 A plate excited by a concentrated force

ただし、 $r^{(i)}$ は力の作用点 $\mathbf{r} = \mathbf{a}_i$ と考察対象の任意点 $P(\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$ の距離であって次式で表される。

$$r^{(i)} = |\mathbf{r} - \mathbf{a}_i| = \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2} \quad (9)$$

以下、集中力による変位を表す特解については全体座標による表現を用いずに力の作用点を原点とする局所的極座標を用いることにする。この方が数値計算にも適している。

複数の集中力の存在を考える必要がある場合には方程式は

$$\nabla^4 w - \alpha^4 w = \sum_{i=1}^I f_i \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}_i) \quad (10)$$

であり、その特解は

$$w = \sum_{i=1}^I f_i \cdot q(r^{(i)}) \quad (11)$$

となる。

2.2 一般解 集中荷重によって励振される凸形境界を持つ無孔板に対する一般解は方程式(2)の同次方程式の原点で正則な一般解に集中力に対する特解の式(11)を加えたものである。

$$w = \sum_{n=0}^N [\epsilon_n J_n(\alpha r) \{A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\} + \epsilon_n I_n(\alpha r) \{C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta\}] + \sum_{i=1}^I f_i \cdot q(r^{(i)}) \quad (12)$$

ただし, $B_0 = D_0 = 0$ である. また, ε_n は数学的な意味の解としては不要であるが, 関数値の変動幅を小さくして計算を安定化させるために導入したスケールファクターであって, 数値計算を目的とする限りは本質的な役割を果たすものである. ε_n は一義的に決まるものではないが, ここではつぎの定義を採用した.⁽⁶⁾

$$\varepsilon_n = (2/\alpha d)^n \quad (13)$$

d は計算範囲に現れる r の最大値と最小値の間に適当な値がある. 式(12)を記述の便宜上つぎのように書くことにする.

$$w = \sum_{j=1}^J A_j W_j(r, \theta) + \sum_{i=1}^I f_i \cdot q(r^{(i)}) \quad (14)$$

2.3 $q(r)$ の微分係数 集中力に対応する特解を含む一般解に選点法を適用して振動方程式を導くのであるが, 板の場合にはどの境界条件でも $q(r)$ についての微分が必要となる.

必要な微分は境界上の法線 (図3の $\mathbf{n}_0$) 方向と接線 (図3の $\mathbf{s}_0$) 方向に関するものである. 法線, 接線方向の微分を $\partial w / \partial n_0$, $\partial w / \partial s_0$ で表すと

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial n_0} &= \cos(\varphi - \theta) \frac{\partial w}{\partial r} + \sin(\varphi - \theta) \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{\partial w}{\partial s_0} &= -\sin(\varphi - \theta) \frac{\partial w}{\partial r} + \cos(\varphi - \theta) \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

という公式が成立する. 局所座標についての微分は変数 r, θ に上添え字 (i) をつけたものとする. 式(15)にはつぎの結果を利用する.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dr} q(r) &= \frac{1}{8\alpha} \left\{ Y_1(\alpha r) + \frac{2}{\pi} K_1(\alpha r) \right\} \\ \frac{d}{d\theta} q(r) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

境界条件によっては法線方向の曲げモーメントや等価せん断力などの量 (自由な角点ではねじモーメントの跳びもこれに加わる) が必要となるが, これらの計算に必要なさらに高階の微分は式(15)を繰り返して適用して求める. $q(r)$ を構成する 2 関数の微分則は同次

解に含まれる $J_n(\alpha r)$ や $I_n(\alpha r)$ に類似する点があるので⁽⁷⁾詳細については前報⁽⁵⁾が参考になる.

3. 各問題の解法

3.1 集中力による強制振動 式(14)の f_i およびそれらの作用点の座標に数値を与えて境界条件を選点法で近似することにより未定係数を決定するための非同次連立一次方程式を得る. たとえば, 全周が固定された板に I 個の集中例振力が作用する場合には板境界上に配置された節点 m において

$$\sum_{j=1}^J A_j W_j(r_m, \theta_m) + \sum_{i=1}^I f_i \cdot q(r^{(i)}_m) = 0$$

$$\sum_{j=1}^J A_j \frac{\partial W_j(r_m, \theta_m)}{\partial n} + \sum_{i=1}^I f_i \cdot \frac{\partial q(r^{(i)}_m)}{\partial n} = 0$$

となるが, 節点数 M と未知係数の個数 J の間に $J=2M$ の関係を持たせれば係数 A_j についてのつぎの連立一次方程式を得る.

$$\begin{bmatrix} g_{mj} \\ h_{mj} \end{bmatrix} \{A_j\} = - \begin{bmatrix} \Phi_m \\ \Psi_m \end{bmatrix} \quad (17)$$

ただし,

$$g_{mj} = W_j(r_m, \theta_m), \quad h_{mj} = \frac{\partial W(r_m, \theta_m)}{\partial n}$$

$$\Phi_m = \sum_{i=1}^I f_i q(r^{(i)}_m), \quad \Psi_m = \sum_{i=1}^I f_i \frac{\partial q(r^{(i)}_m)}{\partial n}$$

とした. 式(17)の右辺は既知で, この式は係数 A_j を未知数とする連立一次方程式であり, これを解いて振動数ごとに係数を定めれば式(14)によってその振動数における振幅分布などの計算ができる. さらにこの結果から励振点と任意点との間のさまざまな伝達関数などの計算も可能となる. 他の境界条件についても同様に扱うことができる.

3.2 複数の点で支持された板 領域内の I 個の点で支持された板の自由振動問題である. 支持点では拘束の結果として変位 w は 0 となるが, たわみ角に対しては何らの拘束もないものとする. つまり, 支持点では面外方向の反力は発生するが, 反力モーメントは発生しないものとする. したがって, この場合に用いる解は式(12)あるいは(14)そのものである. これらの式において f_i は A_j と同列の未知係数としての扱いとなる. これに選点法を適用するのであるが, 周辺では自由, つまり法線方向の曲げモーメントと等価せん断力が 0 であることを指定するものとする⁽⁵⁾. 角点

Fig.3 Local coordinates

があればそこでは等価せん断力の代わりにねじりモーメントの跳びを 0 とする⁽⁵⁾。それに加えてすべての支持点で $w = 0$ であることも指定しなければならない。支持点が境界上に存在する場合も当然対象となるが、この場合には支持点を境界からわずかにだけ内側に移動させて領域内部の点として扱うことにする。

4. 解析例

ここでは方法の妥当性を示すための基本的な計算例を示す。

4.1 集中力による強制振動 計算例として図 4 に示すような長方形板について計算した。寸法は代表的な値 a で無次元化してある。板の中央で加振するとして図に示すように加振点から少し離れた位置での変位応答を求めた。この場合には対称性があるので板の $1/4$ の領域のみについて計算すればよい。境界条件は全周が固定、単純支持、自由の 3 種類とし、すべて同じ節点配置で計算した。

図 5 に固定と単純支持の場合の応答の計算値を示す。横軸は無次元角振動数 $\bar{\omega} = (\alpha a)^2$ である。縦軸はそれぞれの境界条件について、加振点に静的に荷重を加えた場合の計算点における変位で無次元化した相対変位である。

静的変位も選点法で求めた。この場合の方程式は式(2)に代わって

$$\nabla^4 w = f \cdot \delta(\mathbf{r}) \quad (18)$$

であり、その $f = 1$ としたときの特解と同次解はそれぞれつぎのようになる。

$$q(r) = \frac{1}{8\pi} r^2 \log r \quad (19)$$

$$w = \sum_{n=0}^N [r^n \{A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\} + r^{n+2} \{C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta\}] \quad (20)$$

である。これらの解に強制振動の場合と全く同じ手順で選点法を適用すれば未知係数についての連立一次方程式が得られる。結果は境界条件を十分な精度で満足

Fig.4 A rectangular plate

していた。周辺が単純支持や固定の長方形板の中央に静的集中荷重が加えられた板の変形を級数によって扱う方法がたとえば Timoshenko らの教科書⁽⁸⁾に紹介されているが、荷重の位置や板の形状に対する柔軟性を高めるためには選点法が板の静的問題に対しても有効な計算手段である。

さて、図 5 の結果の妥当性はつぎの各点によって判断した。まず、 $\bar{\omega} \rightarrow 0$ で $A \rightarrow 0$ dB となっており、静的な解との連続性が確認されること、共振点の位置が前報の方法で求めた固有振動数に一致していること、共振/非共振にかかわらず計算した振動モードが境界条件をよく満足していたこと、の 3 点である。場の方程式を満たしている解を用いているので境界条件を満

Fig.5 Frequency response of clamped and simply supported plate

Fig.6 Vibration mode of the clamped plate at a non-resonance frequency: $\bar{\omega} = 16$

Fig.7 Frequency response of a free plate

たしているか否かが計算の妥当性を判断するための重要なポイントとなる。一例として周辺固定の場合の非共振時 ($\bar{\omega} = 16$) の振動モードを図6に示す。1次、2次の共振点の中間の遷移状態にあって共振点近傍に比較すると振幅はきわめて小さいのであるが、周辺固定の条件をよく満たしていることがわかる。ここでは詳細を省略するが、共振点近傍では当然のことながら自由振動の固有モードによく一致した振動形となっていることも確認した。これらのことは周辺単純支持でも同じであり、これにより図5の応答は全体として妥当であると判断される。

図7に周辺が自由の場合の振動数応答を示す。縦軸は集中力を板の中央に非振動的に加えたときに質点として求めた定常的な加速度に対する計算点の加速度振幅の比を A_c として dB 表示したもので、図から明らかにこの場合にも $\bar{\omega} \rightarrow 0$ のとき $A_c \rightarrow 0$ dB であって非振動的な場合との連続性が確認される。

4.2 点支持された板 点支持された板の自由振動の例として長方形板を4点で支持した場合を計算結果を示す。板の寸法は無次元で 2.4×2 で支持点は中心を原点とした座標で $(1, 0.7)$ およびそれに対称な位置にある3点である。このような場合には対称性を利用して計算規模を小さくすることができるが、注意すべきは計算対象の $1/4$ 領域の外にある支持点の影響をすべて解に加えておかなくてはならないことである。計算した振動モードは節線が支持点を通るか、支持点が節点になっているかのいずれであって、支持点における変位拘束の結果が正しく計算に反映されていることが確認できた。支持点での振幅は最大振幅の 10^{15} 倍程度 (倍精度計算) になっていた。図8に領域の $1/4$

Fig.8 Nodal lines of vibration modes of a point supported plate

Fig.9 Mode shapes of a point supported plate

4の部分における振動モードの例を節線によって示す。ここに示したのは x, y 軸の双方に関して対称な場合でモードの番号も対称-対称におけるものである。図8では節線が支持点を通してることが確認できるが、このうちとくに12次モードでは節線が支持点を通るように強制されている様子がよくわかる。図9はこのうちの2例をわかりやすくするために板全体を立体的に表示したもので周辺自由の境界条件の特徴を満たしていることがうかがえる。以上の結果より、点支持された板の振動解析にも特異性を考慮した解が有効であることが確認されたと考えられる。

5. 結 言

本論文では解析解に選点法を適用するという方法の板の集中励振力による強制振動と点支持された板の自由振動への拡張について述べた。方法の骨子は集中力に対応する特解を同次解に加えて、これまでに報告してきたのと基本的に同じ手順を採用するというものである。同じ方法で集中力が作用する板の静的変形の問題を扱えることも確かめた。

緒言でも述べたが、集中力は本来は問題を把握しやすくするためのモデル化であったはずである。しかし、現実には集中力の概念を導入したために解法面ではむしろ困難を惹起してしまっていたと考えざるを得ない状況があった。本論文で報告した方法は関数の知識が必要という側面はあるが、集中力をそのまま扱うことができ、しかも小規模計算ですむのでその点ではひとつの改善ということができよう。本論文では計算例として長方形板だけを述べたが、これは結果の検証が容

易であるという理由によるもので、方法自体は既報で述べたようにある範囲での形状の任意性に対応できるものであることに注意したい。

ここで述べた方法はさらに板が吸振器やその他の構造物と点で結合された場合へ応用できる可能性が大きい。実は本研究もある種の吸振器による厚板構造物の制振の効果をシミュレーションするための基礎として開始したものであったが、その方面の結果については改めてまとめることとしたい。

本論文の結果は平成 13・14 年度日本学術振興会科学技術研究費補助金（基盤研究（C））の助成を受けた研究の一部であることを記して感謝の意を表します。

付録 特解 $q(r)$ の導出

グリーンの定理を領域 Ω とその境界 Γ に適用すると

$$\int_{\Omega} (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) d\Omega = \int_{\Gamma} (\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}) d\Gamma$$

ここで原点を中心とする半径 R の円を Ω とし、さらに $\psi = 1$ とすれば $\nabla^2 \psi = 0$, $\partial \psi / \partial n = 0$ であるから上式は

$$2\pi \int_0^R \nabla^2 \varphi r dr = 2\pi R \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r=R}$$

となる。ここで $\varphi = \nabla^2 w$ とすれば

$$2\pi \int_0^R \nabla^4 w r dr = 2\pi R \left[\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w \right]_{r=R}$$

したがって方程式(2)において $f = 1$ としたうえで両辺を半径 R の円内で積分すると

$$2\pi R \left[\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w \right]_{r=R} - \alpha^4 \cdot \pi R^2 w(\epsilon R) = 1 \quad (A1)$$

である。左辺第2項には $0 \leq \epsilon \leq 1$ として積分の平均値の定理を用いた。

ところで、方程式(2)の同次方程式の軸対称解は $c_1 J_0(ar)$, $c_2 Y_0(ar)$, $c_3 I_0(ar)$, $c_4 K_0(ar)$ の4種類あるが、 $J_0(ar)$ と $I_0(ar)$ を式(A1)に代入すると $R \rightarrow 0$ の極限では左辺はいずれも0となり、これらの関数が単独またはそれらの一次結合で式(A1)を満たす可能性はない。残る二つについては $ar \ll 1$ の場合にはつぎのように近似することができる。

$$\nabla^2 w = -c_2 \alpha^2 Y_0(ar) = -c_2 \alpha^2 \frac{2}{\pi} (\gamma + \log \frac{ar}{2}) \quad (A2)$$

$$\nabla^2 w = c_4 \alpha^2 k_0(ar) = c_4 \alpha^2 (\frac{\pi j}{2} - \gamma - \log \frac{ar}{2}) \quad (A3)$$

γ はオイラーの定数である。式(A2)と(A3)をそれぞれ式(A1)に代入して $R \rightarrow 0$ の極限をとるといずれの場合も左辺第1項は有限となるが左辺第2項は0となる。この結果から未知係数が決定される。その結果は

$$w = -\frac{1}{4\alpha^2} Y_0(ar) \quad (A4)$$

$$w = -\frac{1}{2\pi\alpha^2} K_0(ar) \quad (A5)$$

である。これらはそれぞれ単独で式(2)を満たすが、そのまま集中荷重が加えられるときの板の変位を表すものとはならない。なぜならこれらの関数は原点が特異点になっているのであるが、集中荷重の作用点であっても板の変位が無限大となることは物理的にあり得ないからである。そこで式(A4)と(A5)を重ね合わせて特異性を相殺して得た結果が

$$q(r) = -\frac{1}{8\alpha^2} \left\{ Y_0(ar) + \frac{2}{\pi} K_0(ar) \right\} \quad (A6)$$

すなわち式(5)である。

式(A6)を $ar \ll 1$ として(A2), (A3)より高次の項までとって近似すれば

$$q(r) = \frac{1}{8\pi} \{ r^2 \log r + r^2 (\gamma - 1 + \log \frac{\alpha}{2}) \}$$

となるが、この結果は単位の大きさの集中荷重が原点に静的に加えられたときの特解の式(19)に静的方程式の同次解を加えたものに一致する。これは $r = 0$ の近傍では当然満たされなければならない条件である。

なお、大きさが同じで向きが反対の集中力がある距離だけ離して加えた状態に対応する特解は式(11)の特別な場合であるが、集中力間の距離を0に移行させる極限操作で集中モーメントに対応する特解が得られる。この解にはもちろん方向性がある。

文 献

- (1) Cox, H. L. and Boxer, J., Vibration of Rectangular Plates Point-Supported at the Corners, Aeron. Quart., 11:1 (1960), 41-50.
- (2) Johns, D. J. and Nataraja, R., Vibration of a Square Plate Symmetrically Supported at Four Points, J. Sound and Vib., 25:1 (1972), 75-82.
- (3) Petyt, M. and Mirza, W. H., Vibration of Column-Supported Floor Slabs, J. Sound and Vib., 21:3 (1972), 355-364.
- (4) Rao, G. V., Raju, I. S. and Amba-Rao, C.L., Vibrations of Point Supported Plate, J. Sound and Vib., 29:3 (1973), 387-391.
- (5) 浦田喜彦, 境界離散化解析解による板の曲げ振動解析 (第2報), 機論, 62-596, C(1996), 1314-1320.
- (6) 浦田喜彦, 境界離散化解析解による板の曲げ振動解析 (第3報), 機論, 63-605, C(1997), 22-28.
- (7) 森口繁一・宇田川銑久・一松 信, 数学公式Ⅲ, (1960), 145-177, 岩波書店.
- (8) Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., Theory of Plates and Shells, (1959), 141・203, McGraw-Hill.