H^∞ 制御理論を使った剛性リンクに載った弾性リンクからなる**2重倒立振子系のスライディング・モード制御***神本和昭^{*1}, 川辺尚志^{*2}**Sliding Mode Control for an Inverted-Double Pendulum System
Consisting of an Elastic Link Mounted on a Rigid One
by Using the H^∞ Control Theory**Kazuaki KAMIMOTO and Hisashi KAWABE^{*3}^{*3} Hiroshima Institute of Technology, Dept. of Intelligent Machine Engineering,
Saeki-ku, Hiroshima-shi, Hiroshima, 731-5193 Japan

The stabilizing control techniques for an inverted-double pendulum system consisting of an elastic link mounted on a rigid one have been investigated by employing a distributed-parameter modeling method taking the 2nd and 3rd vibration modes of the elastic beam as the residual modes, and by using both a sliding mode controller (SMC) designed on the basis of the H^∞ control theory and a conventional H^∞ servo controller to compare the robust performance. By applying the loop-shaped H^∞ control scheme to the design of the switching plane of SMC, the robust hyper-plane with both frequency characteristics and integral ones can be easily realized even to a multi-mode of flexible structure system having the $j\omega$ poles such as the double pendulum system discussed here, and the effectiveness of the design is verified from the real system-experimental results that the H^∞ control based frequency-shaped SMC has not only the simultaneous suppression effect against the chattering and the spillover components, but also the cart positioning control without static error. Furthermore, it is found that the designed SMC system exhibits considerably robust performance against impulsively applied disturbances, and that the SMC system is robust as compared with the conventionally designed H^∞ controller system.

Key Words: Inverted-Double Pendulum, Elastic Link, Rigid Link, H^∞ Control Based Hyper Plane, Sliding Mode, Frequency Shaping, Robust Stability, Distributed-Parameter Modeling, Chattering, Spillover

1. 緒 言

スライディングモード制御 (SMC) 理論には、切換え超平面に依存して制御特性が変えられ、また不確かさを含む系に対して優れたロバスト性があるため、多くの応用研究がある¹⁾。SMC を特徴づける切換え超平面の設計に関しては、これまで μ 設計理論²⁾をはじめ種々の提案があるが、 H^∞ 制御理論の適用に基づく有効性の検証例はまだ少ないように思われる³⁾。

本研究は、制御対象に $j\omega$ 極が存在しても設計が比較的容易である McFarlane や Glover ら⁴⁻⁶⁾により提案された H^∞ ループ整形制御理論に着目し、それに基づくロバスト超平面を持つ SMC 制御系設計問題を、特に (スピルオーバー問題を有するため) 制御の難しい構造物である剛性リンクに載った弾性リンクからなる直列型 2 重倒立振子系に適用して、その有効性を検証するものである。超平面設計に線形ロバスト制御理論を用いる特徴として、スピルオーバー抑制のための周波数整形の容易性をはじめ、超平面の境界層領域内での H^∞ 制御性、さらに状態の速やかな超平面への拘束による制御力伝達系に存在する不確かな動特性に起因する制御性能低下の抑制が考えられる。またプラントとしての弾性

モードを有する多重倒立振子系での適用例はあまり見られず、線形オペレータとして H^∞ 制御理論を用いた SMC 制御則のロバスト性能やスピルオーバー抑制への有効性の検証に役立つと考えられる。

併せて H^∞ 制御器構造系との比較検討も行ってみる。

2. モデリング

図 1 に剛性リンクに載った弾性リンクからなる直列型 2 重倒立振子系のモデルを示す。記号を以下に示す。

M_c : 台車の等価質量 [kg]
 D_c : 台車の水平移動の等価減衰係数 [Ns/m]
 G_c : 台車の水平駆動の等価ゲイン定数 [N/V]
 l_k : k 番目のリンク長 [m]
 m_k : k 番目のリンク質量 [kg]
 ρ_k : k 番目のリンクの線密度 [kg/m]
 I : 弾性梁の断面 2 次モーメント [m⁴]
 μ_k : k 要素に関する等価減衰係数 [Nms/rad]
 E : 弾性梁のヤング率 [N/m²]
 C_m : 弾性梁の内部減衰係数 [Ns/m]
 d : 弾性梁の厚さ [m]
 g : 重力加速度 [m/s²]
 $w(r_2, t)$: 弾性梁のたわみ [m]
 $X_i(t)$: モード変数 [-]
 $\phi_i(r_2)$: 固有関数 [-]
 $\theta_k(t)$: k 番目のリンクの振れ中心角 [rad]
 $\varepsilon(t)$: 弾性梁のひずみ [-]
 $S(t)$: 台車の変位 [m]
 $u(t)$: 制御入力 [V]

* 原稿受付 2001 年 1 月 19 日。

^{*1} 学生員, 広島工業大学大学院 (〒731-5193 広島市佐伯区三宅)。^{*2} 正員, 広島工業大学工学部。
E-mail: kawabe@cael.me.it-hiroshima.ac.jp

Fig. 1 Schematic illustration for an inverted double pendulum system consisting of an elastic link mounted on a rigid one.

この運動系は、西村ら⁷⁾の手法より、次の 4 釣り合い式で記述される。まず水平方向の力の釣り合いから

$$M_e \ddot{S} + D_e \dot{S} + \rho_1 \int_0^{l_1} (r_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \ddot{S}) dr_1 + \rho_2 \int_0^{l_2} \{r_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \ddot{w}\} \cos(\theta_1 + \theta_2) + \ddot{S} dr_2 = G_e u \quad (1)$$

次に、支点 1 回りのモーメントの釣り合いから

$$\begin{aligned} & \rho_1 \int_0^{l_1} r_1 (r_1 \ddot{\theta}_1 + \ddot{S} \cos \theta_1) dr_1 + \rho_2 \int_0^{l_2} \{l_1 \cos \theta_2 + r_2\} \\ & \cdot \{r_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \ddot{S} \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2\} dr_2 \\ & + \rho_2 \int_0^{l_2} \{l_1 \cos \theta_2 + r_2\} \ddot{w} dr_2 - \rho_1 g \int_0^{l_1} r_1 \sin \theta_1 dr_1 \\ & - \rho_2 g \int_0^{l_2} \{l_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + w \cos(\theta_1 + \theta_2)\} dr_2 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

また支点 2 回りのモーメントの釣り合いから

$$\begin{aligned} & \rho_2 \int_0^{l_2} r_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \ddot{S} \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 dr_2 \\ & + \rho_2 \int_0^{l_2} r_2 \ddot{w} dr_2 - \rho_2 g \int_0^{l_2} \{r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + w \cos(\theta_1 + \theta_2)\} dr_2 = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

さらに梁の微小要素の運動方程式として

$$\rho_2 \{r_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \ddot{S} \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \ddot{w}\} + EI w'''' + C_m I \ddot{w}'' - \rho_2 g \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0 \quad (4)$$

の関係が得られる。次に、リンクは鉛直近傍での微小運動と考えて線形化を行い、さらにリンクの粘性摩擦 μ_k を考慮に入れてモード分離を行う。

たわみ $w(r_2, t)$ は、 i 次モードのモード変数 $X_i(t)$ と固有関数 $\phi_i(r_2)$ を用いて次式のように表わされる。

$$w(r_2, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(r_2) \cdot X_i(t) \quad (5)$$

固有関数 $\phi_i(r_2)$ は境界条件 (回転支持と他端自由)

$$\begin{cases} \phi_i'(0) = \phi_i''(0) = \phi_i(0) = 0 & \text{: 支持端} \\ \phi_i'(l_2) = \phi_i''(l_2) = 0 & \text{: 自由端} \end{cases} \quad (6)$$

より、 $v_i \equiv (i + 0.25)\pi / l_2$ とおくと

$$\phi_i(r_2) = \frac{1}{\sqrt{l_2}} \left(\frac{\sinh v_i r_2}{\sinh v_i l_2} + \frac{\sin v_i r_2}{\sin v_i l_2} \right) \quad (7)$$

となる。よって、直交条件を用いて弾性 3 次モードまでの有限次元近似を行うと次式を得る。

$$A \ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \Phi z = \Omega u \quad (8)$$

ただし、

$$z = [S \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad X_1 \quad X_2 \quad X_3]^T \quad (9)$$

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ J_2 & J_4 & J_5 & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ J_3 & J_5 & J_6 & P_{31} & P_{32} & P_{33} \\ \beta_1 & P_{41} & \varphi_1 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_2 & P_{42} & \varphi_2 & 0 & 1 & 0 \\ \beta_3 & P_{43} & \varphi_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\Gamma = \text{Block diagonal} [D_e, \mu_1, \mu_2, 2\zeta_1 \omega_1, 2\zeta_2 \omega_2, 2\zeta_3 \omega_3] \quad (11)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & K_2 & -\rho_2 g \xi_1 & -\rho_2 g \xi_2 & -\rho_2 g \xi_3 \\ 0 & K_2 & K_2 & -\rho_2 g \xi_1 & -\rho_2 g \xi_2 & -\rho_2 g \xi_3 \\ 0 & -\beta_1 g & -\beta_1 g & \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 g & -\beta_2 g & 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & -\beta_3 g & -\beta_3 g & 0 & 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\Omega = [G_e \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (13)$$

$$\begin{cases} J_1 = M_e + m_1 + m_2, J_2 = \frac{1}{2} m_1 l_1 + \frac{1}{2} m_2 l_2 + m_2 l_1 \\ J_3 = \frac{1}{2} m_2 l_2, J_4 = \frac{1}{3} m_1 l_1^2 + m_2 l_1 l_2 + m_2 l_1^2 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \\ J_5 = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2, J_6 = \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \\ P_{1i} = \rho_2 \xi_i, P_{2i} = \rho_2 (l_1 \xi_i + \eta_i), P_{3i} = \rho_2 \eta_i \\ P_{4i} = \varphi_i + l_1 \beta_i \\ K_1 = -\frac{1}{2} m_1 g l_1 - m_2 g l_1 - \frac{1}{2} m_2 g l_2, K_2 = -\frac{1}{2} m_2 g l_2 \\ \xi_i = \int_0^{l_2} \phi_i(r_2) dr_2, \eta_i = \int_0^{l_2} r_2 \phi_i(r_2) dr_2, \gamma_i = \int_0^{l_2} \phi_i^2(r_2) dr_2 \\ 2\zeta_i \omega_i = C_m I v_i^4 / \rho_2, \beta_i = \xi_i / \gamma_i, \varphi_i = \eta_i / \gamma_i \quad (i=1,2,3) \end{cases} \quad (14)$$

運動方程式 (8) は、状態変数 $x = [z \quad \dot{z}]^T$ を用いると

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (15)$$

ただし、

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & I_{6 \times 6} \\ -A^{-1} \Phi & -A^{-1} \Gamma \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 1} \\ A^{-1} \Omega \end{bmatrix} \quad (16)$$

となる。次に、出力方程式は、台車位置 S および速度 $\dot{S}$, k リンクの振り角 θ_{pk} , 2 リンクの根元から $r_2 = r_e$ に取り付けた位置の歪み ε であり以下になる。

$$y = [\theta_{p1} \quad \varepsilon \quad \theta_{p2} \quad S \quad \dot{S}]^T = Cx \quad (17)$$

ここで、

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_1 & E_2 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & e_1 & e_2 & e_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} E_i = \frac{d}{2} \phi_i'(r_2) \Big|_{r_2=r_e} \\ e_i = \phi_i'(r_2) \Big|_{r_2=0} \\ (i=1 \cdots 3) \end{cases} \quad (18)$$

の関係がある。なお $\theta_{p1} = \theta_1, \theta_{p2} = \theta_2 + \sum_{i=1}^3 e_i$ である。

制御系設計に際しては、弾性 1 次モードまでを制御対象モード x_N とし残りを残留モード x_R とするため式 (15), (17) を (必要な変換行列を $T_{NR} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ とする)

$$x = T_{NR} \begin{bmatrix} x_N \\ x_R \end{bmatrix} \quad (19)$$

の変換をし残留モードの定常値 $\dot{x}_R$ を 0 と仮定し低次元化を行った次の状態方程式および出力方程式を用いる。

$$\begin{cases} \dot{x}_N = A_N x_N + B_N u \\ y = C_N x_N \end{cases} \quad (20)$$

ただし、

$$x_N = [\theta_1 \ x_1 \ \theta_2 \ S \ \dot{\theta}_1 \ \dot{x}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{S}]^T \quad (21)$$

$$x_R = [x_2 \ x_3 \ \dot{x}_2 \ \dot{x}_3]^T \quad (22)$$

$$\begin{cases} A_N = A_{NR11} - A_{NR12} A_{NR22}^{-1} A_{NR21}, B_N = B_{NR1} - A_{NR12} A_{NR22}^{-1} B_{NR2} \\ C_N = C_{NR1}, T_{NR}^{-1} A T_{NR} = \begin{bmatrix} A_{NR11} & A_{NR12} \\ A_{NR21} & A_{NR22} \end{bmatrix}, T_{NR}^{-1} B = \begin{bmatrix} B_{NR1} \\ B_{NR2} \end{bmatrix} \\ CT_{NR} = [C_{NR1} \ C_{NR2}] \end{cases} \quad (23)$$

3. 制御系の構成

3.1 H^∞ 制御理論により周波数整形された SMC 設計

3.1.1 SMC 設計 式(20)に対して次の座標変換

$$x_N = T^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$T = \begin{bmatrix} I_{7,7} & -B_{N1} B_{N2}^{-1} \\ 0_{1,7} & I_{1,1} \end{bmatrix}, B_N = \begin{bmatrix} B_{N1} \\ B_{N2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

を行うと次式の正準系に変換される。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{7,1} \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0_{4,1} \\ 0_{1,7} & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (26)$$

ここで、 $y_1 = [\theta_{p1} \ \varepsilon \ \theta_{p2} \ S]^T$, $y_2 = \dot{S}$

また正準系(26)に対し、切換え関数 ψ を

$$\psi = -s(x_1) + x_2 \quad (27)$$

と定義する。ただし、 $s(x_1)$ はダイナミクスを有する線形オペレータとし $s(x_1) = K_\infty(s)y_1$ とおき

$$\begin{cases} \dot{z}_k = a_k z_k + b_k y_1 \\ s(x_1) = c_k z_k \end{cases} \quad (28)$$

とする。また、スライディングモード状態では $\dot{\psi} = 0$ から、等価制御入力 u_{eq} は

$$u_{eq} = -B_2^{-1} \{ -c_k(a_k z_k + b_k y_1) + A_{21} x_1 + A_{22} x_2 \} \quad (29)$$

となる。ただし $y_2 = x_2$ (ここで $C_2 = 1$) である。また任意行列 $c_p = [0_{7,3} \ I_{7,7} \ 0_{1,3}]$ を用いると

$$c_p z_k = x_1 \quad (30)$$

の関係をj用いる。よって、リアプノフ関数として

$$V = \frac{1}{2} \psi^2 \quad (31)$$

を定義し、非線形制御入力項として

$$\dot{\psi} = -k\psi \quad (32)$$

線形フィードバック到達則⁸⁾を考えると、SMC 制御則は最終的に

$$u = -B_2^{-1} \{ -c_k(a_k z_k + b_k y_1) + A_{21} c_p z_k + A_{22} y_2 + k\psi \} \quad (33)$$

となる。

Fig.2 Block diagram of augmented plant

3.1.2 線形オペレータの設計

切換え超平面に関する線形オペレータの設計法は McFarlane and Glover ら⁴⁻⁶⁾によって提案された H^∞ ループ整形法を用いる。式(26)において入力の数だけ低次元化した

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11} x_1 + A_{12} x_2 \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases} \quad (34)$$

を改めて実プラント $\bar{P}(s)$ とする。

設計手順 1) 図 2 の細い破線のように、設計仕様を満たす前後補償器 W_1, W_2 を実プラント $\bar{P}$ の前後につなぎ開ループ系の周波数特性を整形し、これを新たな整形プラント $\hat{P} = W_2 \bar{P} W_1$ とみなす。

整形プラント $\hat{P}$ の関係は

$$\hat{y}_1 = \hat{P}(s) \hat{x}_2 \quad (35)$$

また $\hat{P}$ はドイル記述⁹⁾で、状態変数 $\hat{z}$ を次式とおくと

$$\hat{z} = [x_{w2} \ x_1 \ x_{w1}]^T \in \mathbb{R}^{10 \times 1} \quad (36)$$

$$\hat{P}(s) = \begin{bmatrix} A_{w2} & B_{w2} C_1 & 0_{1,2} & 0_{1,1} \\ 0_{7,1} & A_{11} & A_{12} C_{w1} & A_{12} D_{w1} \\ 0_{2,1} & 0_{2,7} & A_{w1} & B_{w1} \\ \bar{C}_{w2} & D_{w2} C_1 & 0_{4,2} & 0_{4,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\bar{P}(s) = C_1 (sI - A_{11})^{-1} A_{12} \quad (38)$$

$$W_1(s) = C_{w1} (sI - A_{w1})^{-1} B_{w1} + D_{w1} \quad (39)$$

$$W_2(s) = C_{w2} (sI - A_{w2})^{-1} B_{w2} + D_{w2} \quad (40)$$

となる。また、前後補償器はそれぞれ次のような設計仕様の基で設定する。まず、前置補償器 W_1 は、無視した高次モード x_R やスライディングモード制御の劣化因となるチャタリングの抑制を目的として

$$W_1(s) = k_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 \left(\frac{s^2 + 2\zeta\omega_2 s + \omega_2^2}{s^2 + 2\zeta\omega_1 s + \omega_1^2} \right) \quad (41)$$

を用いる(この周波数特性は 5.1 で述べるように高域側の ω_1 から ω_2 にかけて減衰する低域フィルター特性を示す)。また、後置補償器 W_2 は速応性の改善と台車系の定常偏差改善を目的として

$$W_2(s) = \text{Block diagonal} \left\{ a_1 \ a_2 \ a_3 \ \frac{\alpha s + \beta}{s} \right\} \quad (42)$$

1 型サーボ系を用いる。

設計手順 2) 整形プラント $\hat{P}$ に対して H^∞ ノルム条件

$$\left\| \begin{bmatrix} I \\ \hat{K}_\infty \end{bmatrix} (I - \hat{P} \hat{K}_\infty)^{-1} \begin{bmatrix} I & \hat{P} \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (43)$$

を満たす制御器 $\hat{K}_\infty$ を求める。式 (44) を満たす中心解は次のアルゴリズムより得られる。

Step1) 二つのリカッチ方程式の正定解 X, Z を求める。

$$\hat{A}^T X + X \hat{A} - X \hat{B} S^{-1} \hat{B}^T X + \hat{C}^T R^{-1} \hat{C} = 0 \quad (44)$$

$$\hat{A} Z + Z \hat{A}^T - Z \hat{C}^T R^{-1} \hat{C} Z + \hat{B} S^{-1} \hat{B}^T = 0 \quad (45)$$

ただし、 $X \geq 0, Z \geq 0, R = I_{4,4}, S = I_{1,1}$

Step2) この時 H^∞ ノルムの最小値 $\gamma_{\min}$ は

$$\gamma_{\min} = \sqrt{1 + \lambda_{\max}(XZ)} \quad (46)$$

で得られる。ただし、 $\lambda_{\max}$ は最大固有値を意味する。

Step3) 不等式 $\gamma > \gamma_{\min}$ を満足する $\gamma = 1.05\gamma_{\min}$ に対して、

H^∞ 制御器 $\hat{K}_\infty$ は

$$\hat{x}_2 = \hat{K}_\infty(s) \hat{y}_1 \quad (47)$$

ただし、 $\hat{K}_\infty$ に関する状態変数 $\hat{z}_k$ を次式とおくことで

$$\hat{z}_k = [\hat{x}_{w2} \ \hat{x}_1 \ \hat{x}_{w1}]^T \in \mathbb{R}^{10 \times 1} \quad (48)$$

$$\hat{K}_\infty(s) = \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\gamma^2 W^{-T} Z \hat{C}^T \\ -\tilde{B}^T X & 0_{1,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_k & \hat{b}_k \\ \hat{c}_k & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\tilde{A} = \hat{A} - \hat{B} S^{-1} \hat{B}^T X + \gamma^2 \{I + (XZ - \gamma^2 I)\}^{-T} Z \hat{C}^T \hat{C} \quad (50)$$

$$W = I + (XZ - \gamma^2 I) \quad (51)$$

で与えられる。

Fig.3 Designed overall SMC system shaped with H^∞ control theory

設計手順 3) 図 2 の太い破線のように設計手順 2 より得られた整形プラント $\hat{P}$ に対する制御器 $\hat{K}_\infty$ を実プラント $\bar{P}$ に対する制御器 $K_\infty = W_1 \hat{K}_\infty W_2$ となるよう等価変換すると最終的に H^∞ 制御器 K_∞ は

$$x_2 = K_\infty(s) y_1 \quad (52)$$

ただし、 K_∞ に関する状態変数 z_k を次式とおくことで

$$z_k = [x_{w1} \ \hat{z}_k \ x_{w2}]^T \in \mathbb{R}^{13 \times 1} \quad (53)$$

$$K_\infty(s) = \begin{bmatrix} A_{w1} & B_{w1} \hat{c}_k & 0_{2,1} & 0_{2,4} \\ 0_{10,2} & \hat{a}_k & \hat{b}_k C_{w2} & \hat{b}_k D_{w2} \\ 0_{1,2} & 0_{1,10} & A_{w2} & B_{w2} \\ C_{w1} & D_{w1} \hat{c}_k & 0_{1,1} & 0_{1,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ c_k & 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

となる。図 3 に本制御系の構成図を示す。

3.2 H^∞ 制御器

線形オペレータの設計に用いた H^∞ ループ整形法により変位出力フィードバック補償器を設計する。設計仕様としては 1 次モード以降に不確かさが存在するものとし、高次モードの弾性振動を励起しないように補

償を行う。これをロバスト安定性に関する設計仕様とする。次に制御性能に関しては、ステップ外乱入力に対して定常偏差を零とする補償器を設計する。まず、式 (34) $\Rightarrow$ 式 (20) とし、出力変数を

$$y = [\theta_{p1} \ \varepsilon \ \theta_{p2} \ S \ \dot{S}]^T \Rightarrow \bar{y} = [\theta_{p1} \ \varepsilon \ \theta_{p2} \ S]^T \quad (55)$$

とし 3.1.2 節の解法に帰着して補償器を構成する。最終的に制御入力 $\bar{u}$ は

$$\bar{u} = \bar{K}_\infty(s) \bar{y} \quad (56)$$

となる。

4. 実験方法および装置

使用パラメータは、 $M_e = 4.4$ [kg], $D_e = 19.2$ [Ns/m], $G_e = 18.4$ [N/V], $l_1 = 0.375$ [m], $l_2 = 0.455$ [m], $m_1 = 0.160$ [kg], m_2

Fig.4 Overall experimental apparatus

$= 0.027$ [kg], $\rho_1 = 0.427$ [kg/m], $\rho_2 = 0.059$ [kg/m], $\mu_1 = 3.388 \times 10^{-3}$ [Nms/rad], $\mu_2 = 1.979 \times 10^{-3}$ [Nms/rad], $I = 1.563 \times 10^{-13}$ [m⁴], $E = 206$ G [N/m²], $d = 0.0005$ [m], $C_m = 1.515 \times 10^8$ [Ns/m²] (減衰率 $\delta \approx 0.078$) に設定する。なお弾性梁の幅は 0.015 [m] である。図 4 に実験装置構成図を示す。倒立振り駆動部はジャパン EM 製を使用し、台車移動量 S および各リンクの振り角 $\theta_{p1,2}$ はポテンシオメータによりそれぞれ検出する。ひずみ ε は、1 次振動モードの腹の位置 $r_e \approx 0.15$ [m] に貼ったストレインゲージより検出する。また、台車の速度 $\dot{S}$ はタコジェネレーターより検出する。A/D, D/A 信号変換部は 12bit 精度のコンテック製を用いた。なお、 H^∞ 制御器系では、変位出力フィードバック補償器の構成であるのでタコジェネレーターは用いない。主プログラムは Turbo C Ver.1.5 で書き、計算機 (PC9821CPU:20MHz) に実装した。サンプリング周期は、SMC 系では 0.35 [ms], H^∞ 制御器系では 0.26 [ms] である。

5. 実験結果および考察

5.1 SMC 結果 前置補償器 W_1 は、 $k_1 = 1.0$, $\zeta = 0.7$

$\omega_1 = 2\pi \times 2.3$ [rad/s], $\omega_2 = 2\pi \times 200$ [rad/s] に設定し、図 5 (a) にその特性を示す。その時の前置補償器 W_1 と弾性梁のゲイン特性 (ε/u) を同図 (b) に示す。1 次振動モードは $f_1 \approx 8.7$ [Hz], 2 次モードは $f_2 \approx 28.8$ [Hz] である。また、後置補償器 W_2 は、 $a_1 = 70$, $a_2 = 80$, $a_3 = 70$, $\alpha = 15$, $\beta = 3$ とした。この条件下での $\gamma_{\min} = 20.121$ に関する 13 次の線形オペレータが得られる。

$$K_\infty(s) = \frac{1}{D(s)} [Z_1(s) \ Z_2(s) \ Z_3(s) \ Z_4(s)] \quad (57)$$

ただし

$$\begin{cases} D(s) = s \prod_{i=1}^2 (s + d_i)(s + \bar{d}_i) \prod_{i=3}^{10} (s + d_i) \\ Z_1(s) = s \prod_{i=1}^3 (s + z_{1i})(s + \bar{z}_{1i}) \prod_{i=4}^8 (s + z_{1i}) \\ Z_2(s) = s \prod_{i=1}^2 (s + z_{2i})(s + \bar{z}_{2i}) \prod_{i=3}^9 (s + z_{2i}) \\ Z_3(s) = s \prod_{i=1}^3 (s + z_{3i})(s + \bar{z}_{3i}) \prod_{i=4}^8 (s + z_{3i}) \\ Z_4(s) = \prod_{i=1}^5 (s + z_{4i})(s + \bar{z}_{4i}) \prod_{i=6}^7 (s + z_{4i}) \end{cases} \quad (58)$$

Fig.5 Gain characteristics of $W_1(s)$ and $\varepsilon/u(s)$

Fig.6 Gain characteristics of linear operator (eq.28)

式 (58) から特性根 $D(s)$ に零固有値を含んでいることから設計した切換え面は積分特性を有していることがわかる。図 6 に得られた線形オペレータの最大特異値特性を示す。これより、線形オペレータがローパス特性を有していることがわかる。したがって、設計仕様としてのチャタリングおよび高次モード励起を抑制する特性を持つ切換え面と考えられる。また、線形フィードバック到達則の係数を $k=1.1$ とする。以上の条件で弾性 3 次モードまでを含むものをシミュレーションモデルとし、台車の初期値を -0.3 [m] とした時のステップ状外乱のシミュレーション結果を図 7 に示す。同図

(I) は第 2 リンクの根元から 0.15 [m] の位置での 1 次ひずみ振動 ε (8.7 Hz) を、(II) は各リンクの出力角 $\theta_{p1,2}$ を、(III) は台車の水平移動 S を、(IV) は制御入力 u をそれぞれ示す。(I) より、周波数整形効果により、スピルオーバー成分としての 2 次モード (28.8 Hz) による励起は見られない。また台車の目標値応答 (III) では、多

Fig.7 Simulation control vs the cart stepwise input in the SMC system (designed with the loop-shaped H^∞ theory)

Fig.8 Real system control vs the cart stepwise input in the SMC system (designed with the loop-shaped H^∞ theory)

少のオーバーシュートは生じるが、速応性や補償器の積分効果は十分見られる。

図8に図7と同様の初期条件下での実機結果を示す。

Fig.9 Real system control vs impulsive disturbances applied to the elastic link in the SMC system (designed with the loop-shaped H^∞ theory)

Fig.10 Stabilized view of the inverted double pendulum system

設計仕様であるチャタリングの抑制については(IV)を見る限り励起されておらず、(I)の2次モード以降の高次ひずみ振動の抑制につながっていると考えられる。また、もう一つの仕様である台車の定常偏差対策についても(III)からはほぼ目標値0に収束し改善されている。図9は、倒立状態から $t=1.5$ [s]後に第2リンクの中央部に衝撃的外乱を与えた時の実機結果を示す。図7と

図9の(II), (IV)の相対関係より、 $t=2.0$ [s]付近から速やかにスライディングモード状態に入っていると考えられる。以上から H^∞ ループ整形法で設計した切換え超平面の有効性やロバスト性が確認できた。なお、図10は制御された倒立振り子の状態を示す。

5.2 H^∞ 制御結果 さらに、SMC 制御特性との比較用として、 H^∞ 制御器(式(59))系での実機実験を行った。この場合、前置補償器 W_1 は、 $k_1=1.0$, $\zeta=0.7$, $\omega_1=2\pi \times 10$ [rad/s], $\omega_2=2\pi \times 200$ [rad/s]に設定した。また、後置補償器 W_2 は、 $a_1=70$, $a_2=80$, $a_3=70$, $\alpha=20$, $\beta=3$ とした。この条件下では、 $\gamma_{\min}=40.317$ となり、次の14次の H^∞ 制御器が得られる。

$$\bar{K}_\infty(s) = \frac{1}{D(s)} [Z_1(s) \ Z_2(s) \ Z_3(s) \ Z_4(s)] \quad (59)$$

ただし、

$$\begin{cases} D(s) = s \prod_{i=1}^2 (s + d_i)(s + \bar{d}_i) \prod_{i=3}^{11} (s + d_i) \\ Z_1(s) = s \prod_{i=1}^4 (s + z_{1i})(s + \bar{z}_{1i}) \prod_{i=5}^9 (s + z_{1i}) \\ Z_2(s) = s \prod_{i=1}^3 (s + z_{2i})(s + \bar{z}_{2i}) \prod_{i=4}^9 (s + z_{2i}) \\ Z_3(s) = s \prod_{i=1}^4 (s + z_{3i})(s + \bar{z}_{3i}) \prod_{i=5}^8 (s + z_{3i}) \\ Z_4(s) = \prod_{i=1}^3 (s + z_{4i})(s + \bar{z}_{4i}) \prod_{i=4}^{10} (s + z_{4i}) \end{cases} \quad (60)$$

この条件下での図8と同様のステップ状外乱による実機結果を図11に示す。同図(Ⅰ),(Ⅱ)を図8(Ⅰ),(Ⅱ)と比べると SMC 系の方が外乱に対する過渡的変動量が少ない。また、 $t=4$ [s]で目標値0に到達

Fig.11 Real system control vs the cart-stepwise input in the H^∞ controller system

Fig.12 Real system control vs impulsive disturbances applied to the elastic link in the H^∞ controller system

してからの振れ角のハンチングも図 8(II)と比べて SMC 系の方が明らかに少ない。図 12 は、図 9 と同様の弾性梁への同一量的衝撃外乱による実機応答結果を示す。ひずみ振動応答に関しては、 SMC 系(図 9)では状態の超平面への速やかな拘束により誘起振動の立ち上がり(図 12 と比べて)抑制されている。 SMC 系ではひずみ振幅の最大値は、 $\varepsilon_{\max} \approx 0.75 \times 10^{-6}$ であるが、 H^∞ 制御器系では $\varepsilon_{\max} \approx 0.9 \times 10^{-6}$ とやや大きい。これは、(IV)の制御力を比較しても H^∞ 制御器系の方が過渡的に大きく発生していることから理解される。なお台車の過渡的変動量(III)に関しては、(ステップ状外乱の場合、 SMC 系が若干少ないが)顕著な差は見られない。

以上の諸特性の比較より、 SMC 系が H^∞ 制御系に比べてよりロバスト制御性を示すと言える。

6. 結 言

剛・弾性リンクからなる 2 重倒立振子系に対して H^∞ ループ整形法によって切換え超平面に周波数特性と積分特性を持たせたスライディングモード制御 (SMC) 系を構成し、制御性能を H^∞ 制御器系と比較検討した。

1. $j\omega$ 極を有する多モード柔軟構造物に対しても、 H^∞ ループ整形法により、設計仕様を満たすロバスト超平面を持つ SMC 系を比較的容易に設計できる。
2. 切換え超平面に周波数特性と積分特性をもたせることにより、高次モードの励起抑制と同時に台車系に対する定常偏差が改善できる。
3. ステップ状外乱やインパルス的外乱に対しても速やかにスライディングモード状態に入ることから優れたロバスト性を持つ切換え面と考えられる。
4. H^∞ 制御器系との比較では、外乱応答面から SMC 制御系の方がよりロバスト制御性を示す。

なお本研究は第 2 ハイテクから一部助成を受けた。

文 献

- (1) 例えば野波, 田, スライディングモード制御(非線形ロバスト制御の設計理論), コロナ(1994).
- (2) Nonami, K., et al. Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng. 39-3, (1996), 494-501.
- (3) 伊藤, 野波, 機論(C), 63-611(1997), 120-126.
- (4) 川谷, 土木学会論文集, 23-465(1993), 1-12.
- (5) 劉他, ロバスト最適制御, コロナ社(1997), 466-488.
- (6) 細江他, 制御系設計(H^∞ 制御とその応用)朝倉書店, 115(1994), 113-121.
- (7) 例えば西村, 大賀, 戸谷, 野波, 機論(c), 59-565(1993), 2701-2706.
- (8) 増淵他, システムのモデリングとその非線形制御, コロナ社(1996), 223-224.
- (9) 例えば美多, H_∞ 制御, 昭晃堂(1994).