構造物の回転自由度に関する周波数応答関数の推定* (第2報, ランダム誤差に対する推定精度の向上)

細 矢 直 基^{*1}, 吉 村 卓 也^{*2}

Estimation of Frequency Response Function on Rotational Degrees of Freedom of Structures (2nd Report, Improvement of Accuracy for Random Noise)

Naoki HOSOYA^{*3} and Takuya YOSHIMURA

^{*3} Department of Mechanical Engineering, Saitama University,
255 Shimo-Okubo, Saitama-shi, Saitama, 338-8570 Japan

Experimental modal analysis is a fundamental technique for the analysis of structural vibration. However FRF measurement on rotational degrees of freedom (DOFs) has been disregarded in the experiment because of the difficulties of measurements. Rotational FRFs are vital to extend the applicability of experimental modal analysis. The authors have proposed a measurement technique of rotational FRFs. It is important to evaluate the accuracy and reliability of estimated rotational FRFs. In this paper an improved method for the estimation of rotational FRF and the evaluation of the reliability of rotational FRF are presented: The variance of rotational FRF is derived by considering the propagation of random noise in the measured FRF; and the Reliability Factor of estimated FRF is also obtained from variance. The effect of random noise in the measurement to the rotational FRF is investigated by numerical simulation and experimental application.

Key Words: Experimental Modal Analysis, Frequency Response Function, Rotational Degrees of Freedom, Impact Testing, Rigid Body Dynamics, Random Noise

1. 緒 論

実験モード解析は、構造物の振動特性をモード特性によってモデル化し、それを種々の動設計に応用する基盤技術として重要な地位を占めている。実験モード解析においては、まず周波数応答関数 (Frequency Response Function: FRF, 以下 FRF と略記) を振動実験により測定し、これに基づいてモード特性を同定する。ところが、従来の FRF 測定においては、並進自由度 FRF のみが測定対象とされ、回転自由度 FRF は考慮されていなかった。一方、実構造物は本質的に回転自由度を有し、また有限要素法 (Finite Element Method: FEM, 以下 FEM と略記) によって作られる理論モデルも同様であるために、実験モデルと理論モデルの間には自由度の食い違いが生じ、このことが実験モード解析の適用範囲に制約を与えていた。

このような背景の元に、著者らは前報告において、構造物の回転自由度に関する自己 FRF の推定方法を提案した⁽¹⁾。提案法は、構造物の測定点に慣性特性が既知である剛体ブロックを取り付けて回転自由度 FRF を測定

する方法である。提案法は、原理的に並進3自由度、回転3自由度の計6自由度に関する FRF が推定可能であり、推定された FRF は取り付けられた剛体ブロックの質量、及び慣性モーメントの影響を受けないものとなる。前報告では、はり構造物の回転自由度に関する自己 FRF 測定を行い、提案法の妥当性を確認した。また、提案法により得られた実験モデルを部分構造合成法へ適用することにより、結合系の動特性予測を行うためには、回転自由度を考慮した実験モデルを用いることが不可欠であること、並びに提案法を用いることで、予測精度が大きく向上することを示した。

一方、近年、回転自由度を含めた構造物の FRF 測定を行うことの重要性が再認識され、例えば EU においてはプロジェクト研究により回転自由度計測の試みが推進され、いくつかの新しい計測方法が開発されつつある⁽²⁾。これらの中には、i) レーザドップラ計による方法⁽³⁾、ii) 特異値分解による方法⁽⁴⁾、iii) 疑似角加速度センサによる方法^{(5),(6)} などがあり、また、他の研究報告の中に、iv) 6 自由度インピーダンスヘッドによる方法⁽⁷⁾、v) インパクトハンマによる方法⁽⁸⁾ などがある。しかし、これらの方法はいずれも研究段階であり、実用面における評価は未知数である。また、いずれの方法も特別な装置や比較的大掛かりな計測準備を必要とし、測定の簡便さと正確さを両立させた実用的な方法は、著者ら

* 原稿受付 2001 年 7 月 24 日。

^{*1} 正員, 埼玉大学工学部 (☎ 338-8570 さいたま市下大久保 255) (元: 東京都立大学大学院工学研究科)。

^{*2} 正員, 東京都立大学大学院工学研究科 (☎ 192-0397 八王子市南大沢 1-1)。

E-mail: hosoya@ecomp.metro-u.ac.jp

の知る限り存在しない。これに対して、著者らの提案する方法は、剛体ブロックは用いるものの、一般的なインパクトハンマと加速度センサにより行うため、測定は容易であり、また、推定されたFRFは取り付けた剛体ブロックの質量、慣性モーメントの影響を受けないため比較的精度が良いという特徴を有する。

従って、提案法を実用技術として確立するには、FRFの推定精度のさらなる向上、及び適用周波数範囲の拡大が必須であり、そのための第一として、計測において必然的に混入するランダム誤差を考慮する必要があると考えた。

そこで本論文では、測定された元のFRFに含まれるランダム誤差（偶然誤差）の回転自由度FRFに対する影響を考察し、その精度を向上させるための方法を提案すると共に、推定された回転自由度FRFのランダム誤差による影響を信頼性係数として評価する。

記号の説明

x_i, y_i, z_i	: 剛体ブロック上の任意の点 <i>i</i> における変位
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	: 剛体ブロックの角変位
x_G, y_G, z_G	: 剛体ブロック重心の変位
p	: 剛体ブロック上の計測点数
$\mathbf{V}$	: 剛体ブロック上各点の加速度ベクトル($3p \times 1$)
$\mathbf{U}_G$	: 剛体ブロック重心の加速度ベクトル(6×1)
$[\mathbf{R}]$	: 剛体ブロックの変位変換行列($3p \times 6$)
$[\mathbf{I}_M]$	: 剛体ブロックの質量行列(6×6)
$[\mathbf{T}]$	: 剛体ブロック内の力変換行列(6×6)
$\mathbf{F}_i$	: 結合点 <i>i</i> の内力ベクトル(6×1)
$\mathbf{F}_{hammer}$	: インパクトハンマの加振力ベクトル(6×1)
$[\mathbf{H}_{ii}]$	: 結合点 <i>i</i> に関する構造物の自己FRF行列(6×6)

2. 回転自由度FRF推定法の説明

前報で提案した回転自由度FRFの推定法は、構造物の測定点に慣性特性が既知である剛体ブロックを取り付けてFRFを測定する方法である。まず、複数の加速度センサが付加された剛体ブロックをインパクトハンマで加振し、センサの応答より剛体ブロックの重心運動を決定する。次に、ブロックの剛体運動方程式を解くことにより、結合点（構造物の測定点）における内力、応答を推定し、それらの関係から結合点の回転自由度に関する自己FRFを推定する。このように、振動実験は剛体ブロックを取り付けた状態で行うが、FRFの推定は、剛体ブロックと構造物の間に作用する内力とその応答を用いて行う。そのため、得られた回転自由度FRFは剛体ブロックの質量、慣性モーメントの影響を受けないものとなる。

響を受けないものとなる。

本論文で提案する方法は、ランダム誤差に対する回転自由度FRFの推定精度を向上させる方法である。一般に測定において混入する誤差には、ランダム（偶然）誤差とバイアス（系統）誤差があり、前者は平均化や繰り返し測定によって除去または低減可能であるが、後者は不可能である。剛体ブロックによる回転自由度FRF測定において、バイアス誤差の要因として考えられるものに、(i) 剛体ブロックに固定した加速度センサの校正誤差、(ii) センサの取り付け方向誤差、(iii) センサの横軸感度、(iv) 剛体ブロックの弾性振動成分、(v) 剛体ブロックの質量、慣性特性の誤差、(vi) 信号処理系の誤差（例えば、FFTにおける漏れ誤差）、(vii) 供試体の支持方法による誤差、等がある。

上述の(i)~(iii)はセンサに起因するバイアス誤差であるが、これは、センサの選択、取り付けから測定までを含めた過程として考えればランダムな性質を持つと考えられる。従って、FRF測定においては、剛体計測に用いるセンサ数を増やすことにより、これら(i)~(iii)の誤差の平均化をすることが期待できる。

本章においては、前報告で述べた方法（簡便法）と本論文で提案する方法（提案法）について、それらの違いを明確にしながらか説明する。

2.1 結合点内力、結合点応答の推定 本研究においては簡便のために、剛体ブロックは構造物の測定点*i*に剛に結合されていると仮定する。提案法においては、構造物への入力（剛体ブロック上の加振点*l* ($l=1, \dots, n$)）をインパクトハンマで順次加振することにより作用させる。このとき、結合点に作用する内力は、剛体ブロックの運動方程式から得られる。まず結合点内力を推定し、次に結合点応答を推定する。

座標原点を剛体ブロックの重心に取り、座標軸を慣性主軸と一致させる。このとき剛体ブロックの運動方程式は、

$$[\mathbf{I}_M] \mathbf{U}_G^{(l)} = -[\mathbf{T}_i] \mathbf{F}_i^{(l)} + [\mathbf{T}_i] \mathbf{F}_{hammer}^{(l)} \quad (1)$$

ここに、

$$[\mathbf{T}_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & -z_i & y_i & 1 & 0 & 0 \\ z_i & 0 & -x_i & 0 & 1 & 0 \\ -y_i & x_i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{U}_G^{(l)} = \{\ddot{x}_G \quad \ddot{y}_G \quad \ddot{z}_G \quad \ddot{\theta}_x \quad \ddot{\theta}_y \quad \ddot{\theta}_z\}^T \quad (3)$$

$$\mathbf{F}_i^{(l)} = \{F_x \quad F_y \quad F_z \quad M_{ix} \quad M_{iy} \quad M_{iz}\}^T \quad (4)$$

ここで、添字の*i*は剛体ブロックの結合点（構造物の測

定点), x_i, y_i, z_i は剛体ブロックの重心 G を原点とした点 i の座標, 右肩の "l" はこれらのベクトルが剛体ブロック上の加振点 l によって得られたものであることをそれぞれ表している. また, $[I_M]$ (6×6) は剛体ブロックの質量行列, $\mathbf{U}_G^{(l)}$ (6×1) は重心の加速度ベクトル, $[T_i]$ (6×6), $[T_i]$ (6×6) は力変換行列, $\mathbf{F}_i^{(l)}$ (6×1) は結合点 i に働く内力, $\mathbf{F}_{hammer}^{(l)}$ (6×1) はインパクトハンマによる加振力ベクトルである.

重心の加速度ベクトル $\mathbf{U}_G^{(l)}$ は, 剛体ブロック上に取り付けた複数個の加速度センサの応答から得られる. 今, 剛体ブロック上に p 個の3軸加速度センサを取り付けた場合を考えると,

$$\mathbf{U}_G^{(l)} = \left[[R]^T [R] \right]^{-1} [R]^T \mathbf{V}^{(l)} = [R]^+ \mathbf{V}^{(l)} \quad (5)$$

ここに,

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_1 & -y_1 \\ 0 & 1 & 0 & -z_1 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_1 & -x_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & z_p & -y_p \\ 0 & 1 & 0 & -z_p & 0 & x_p \\ 0 & 0 & 1 & y_p & -x_p & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここで, $\mathbf{V}^{(l)}$ (3p×1) は剛体ブロック上の p 点の応答ベクトル, $[R]$ (3p×6) は剛体変換行列, $[R]^+$ は $[R]$ の疑似逆行列を表している.

結合点内力については, 式(1)に式(5)を代入し, $\mathbf{F}_i^{(l)}$ について解くことにより得られる.

$$\mathbf{F}_i^{(l)} = -[T_i]^{-1} \left[[I_M][R]^+ \mathbf{V}^{(l)} - [T_i] \mathbf{F}_{hammer}^{(l)} \right] \quad (7)$$

次に結合点応答を求める. 結合点応答は式(5)で求めた剛体ブロックの重心応答から推定する. 剛体ブロック上の点 i と重心 G の加速度には以下のような関係がある.

$$\mathbf{U}_i^{(l)} = [T_i]^T \mathbf{U}_G^{(l)} \quad (8)$$

従って, 点 i の結合点応答 $\mathbf{U}_i^{(l)}$ (6×1) は, 式(5), (8) より,

$$\mathbf{U}_i^{(l)} = [T_i]^T [R]^+ \mathbf{V}^{(l)} \quad (9)$$

2.2 回転自由度 FRF の推定 前節で得られた結合点内力 (式(7)) と結合点応答 (式(9)) の関係から, 構造物の測定点 i に関する自己 FRF を推定する.

2.2.1 構造物の入出力関係 構造物の測定点 i においては, 並進3自由度, 回転3自由度の計6自由度の FRF が存在する. 点 i に取り付けられた剛体ブロック上の加振点 l をインパクトハンマで加振したとき, 入力と出力の関係を FRF で表すと,

$$\mathbf{U}_i^{(l)} = [H_{ii}] \mathbf{F}_i^{(l)} \quad (10)$$

ここで,

$$[H_{ii}] = \begin{bmatrix} H_{i\dot{x}i\dot{x}} & H_{i\dot{x}i\dot{y}} & \cdots & H_{i\dot{x}i\dot{\theta}_z} \\ H_{i\dot{y}i\dot{x}} & H_{i\dot{y}i\dot{y}} & \cdots & H_{i\dot{y}i\dot{\theta}_z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{i\dot{\theta}_zi\dot{x}} & H_{i\dot{\theta}_zi\dot{y}} & \cdots & H_{i\dot{\theta}_zi\dot{\theta}_z} \end{bmatrix} \quad (11)$$

ここで, $[H_{ii}]$ (6×6) は点 i を加振点, 測定点としたときの回転自由度に関する自己 FRF である. 式(10)は多入力多出力の入出力関係を表しており, FRF 行列 $[H_{ii}]$ を推定するには, 少なくとも6通りの独立な入力と応答を得ることが必要になる. 今, 剛体ブロック上の n 点 ($n \geq 6$) を加振するとすれば, それらは次のようにまとめて表せる.

$$[\mathbf{U}_i^{(1)} \cdots \mathbf{U}_i^{(n)}] = [H_{ii}] [\mathbf{F}_i^{(1)} \cdots \mathbf{F}_i^{(n)}] \quad (12)$$

2.2.2 簡便法 これは前報告で述べた方法である. まず, 式(12)を次のように書き表す.

$$[U_i] = [H_{ii}] [F_i] \quad (13)$$

式(13)から最小二乗法 (H1 推定) により FRF 行列 $[H_{ii}]$ を得るとすれば,

$$[H_{ii}] = [U_i] [F_i]^H \left[[F_i] [F_i]^H \right]^{-1} = [U_i] [F_i]^+ \quad (14)$$

ここで, $[F_i]^+$ は $[F_i]$ の疑似逆行列, 行列の右肩の "H" は共役転置をそれぞれ表す.

この解法における最小二乗法は結合点応答 $[U_i]$ に含まれる誤差を最小にするように適用されるため, 結合点内力 $[F_i]$ に含まれる誤差を考慮することができない. 式(7), (9)を見てわかるように, 点 i における入出力においては, いずれも剛体ブロック上で測定された FRF が用いられており, 入力, 出力の両側に相関のある誤差を含んでいる. そのため, 剛体ブロックの加振点数 n が $n > 6$ となるときの推定精度が低下すると考えられる.

2.2.3 提案法 本論文では, 上述の問題点を考慮し, 測定された FRF に含まれる誤差を最小にするように最小二乗法を適用することで推定精度の向上を試みる. すなわち, 簡便法においては点 i の応答成分 $\mathbf{U}_i^{(l)}$ に含まれる誤差を最小にしていたのに対して, 提案法においては, 剛体ブロック上の FRF $\mathbf{V}^{(l)}$, もしくは, これより得られる重心応答 $[R]^+ \mathbf{V}^{(l)}$ に対して直接誤差の最小化を図る. 点 i に固定された剛体ブロック上の加振点 l を加振したとき, 測定点 i の結合点内力は式(7), 結合点応答は式(9)より得ることができた. 式(12)にこれらを代入すると次式を得る.

$$[T_i]^T [R]^+ [\mathbf{V}^{(1)} \cdots \mathbf{V}^{(n)}] = -[H_{ii}] [T_i]^{-1} \cdots \\ [I_M][R]^+ [\mathbf{V}^{(1)} \cdots \mathbf{V}^{(n)}] - [T_i] \mathbf{F}_{hammer}^{(1)} \cdots [T_n] \mathbf{F}_{hammer}^{(n)} \quad (15)$$

これをまとめて,

$$[R]^+ [V] = -[T_i]^{-1} [H_{ii}] [T_i]^{-1} [I_M][R]^+ [V] - [F_7] \quad (16)$$

式(16)を次式のように書き直すと,

$$[U_G] = -[H_G][I_M][U_G] - [F_T] \quad (17)$$

ここに,

$$[U_G] = [R]^T [V] \quad (18)$$

$$[H_G] = [T_i]^T [H_{ii}][T_i] \quad (19)$$

なお, $[U_G]$ ($6 \times n$) は点 i の剛体ブロックの重心応答である。ここでさらに, 式(17)を次式のように書き換える。

$$[U_G] = [A_G][F_T] \quad (20)$$

ただし,

$$[A_G] = [I] + [H_G][I_M]^{-1} [H_G] \quad (21)$$

式(20)において, 測定データは全て左辺 $[U_G]$ に含まれている。また, 右辺に含まれる行列 $[F_T]$ は既知であるから, 未知行列を $[A_G]$ として最小二乗法を適用すれば, これは出力側のみに誤差が含まれるという仮定を満足する。従って, 良好な推定値が得られるものと考えられる。なお, この行列 $[A_G]$ は剛体ブロックの重心における力と応答の関係, すなわち FRF を表している。

式(20)に最小二乗法を適用し $[A_G]$ を求めると,

$$[A_G] = [U_G][F_T]^T [F_T][F_T]^T]^{-1} = [U_G][F_T]^* \quad (22)$$

ここで, $[F_T]^*$ は $[F_T]$ の疑似逆行列である。式(22)により, 行列 $[A_G]$ が求まれば, 式(21)から次のように $[H_G]$ が求められる。

$$[H_G] = [A_G][I] - [I_M][A_G]^{-1} \quad (23)$$

ここで, さらに式(19)を用いることにより, 測定点 i における回転自由度に関する自己 FRF $[H_{ii}]$ を求めることができる。

$$[H_{ii}] = [T_i]^T [A_G][I] - [I_M][A_G]^{-1} [T_i] \quad (24)$$

以上のように, 提案法では剛体ブロック上で測定された FRF, または重心応答の FRF に含まれるランダム誤差に対して平均化を行うことにより, 回転自由度 FRF の推定精度の向上を図る。

3. ランダム誤差の評価方法の説明

本章では, 測定された FRF から回転自由度 FRF への誤差伝播を考察することにより, 測定値に含まれるランダム誤差がどのように回転自由度 FRF に影響を与えているかを評価し, また回転自由度 FRF の持つ信頼性の評価方法を提案する。

3.1 分散の推定方法 ここでは, 提案法による回転自由度 FRF の分散の推定方法を説明する。まず, $[V]$ と $[H_{ii}]$ の微分関係を導き, それより回転自由度 FRF の分散を推定する。式(23)を次式のように書き換える。

$$[H_G][I] - [I_M][A_G] = [A_G] \quad (25)$$

式(25)において, 測定された FRF のランダム誤差の影響は行列 $[A_G]$ と $[H_G]$ の両方に含まれるので, これらを

変数として式(25)を全微分して, 式を整理すると,

$$[\delta H_G] = [I] + [H_G][I_M]^{-1} [\delta A_G][I] - [I_M][A_G]^{-1} \quad (26)$$

一方, $[A_G]$ は式(18), (22)より, 次式のように表せる。

$$[A_G] = [R]^T [V][F_T]^* \quad (27)$$

これより,

$$[\delta A_G] = [R]^T [\delta V][F_T]^* \quad (28)$$

式(21), 式(23)と式(28)の関係を用いることにより, 式(26)は,

$$[\delta H_G] = [H_G][A_G]^{-1} [R]^T [\delta V][F_T]^* [A_G]^{-1} [H_G] \quad (29)$$

さらに, 式(19)より,

$$[\delta H_{ii}] = [T_i]^T [\delta H_G][T_i] \quad (30)$$

従って,

$$[\delta H_{ii}] = [T_i]^T [H_G][A_G]^{-1} [R]^T [\delta V][F_T]^* [A_G]^{-1} [H_G][T_i] \quad (31)$$

式(31)は行列 $[V]$ と $[H_{ii}]$ のそれぞれの微小変化分の関係を示したものである。式(31)を次式のように書き直す。

$$[\delta H_{ii}] = [X][\delta V][Y] \quad (32)$$

ここに,

$$[X] = [T_i]^T [H_G][A_G]^{-1} [R]^T \quad (33)$$

$$[Y] = [F_T]^* [A_G]^{-1} [H_G][T_i] \quad (34)$$

ここで, 式(32)の (q, r) 要素に注目し, 行列における誤差伝播の関係(付録参照)を適用すると, 回転自由度 FRF の分散を求めることができる。

$$\sigma_{H_{ii}}^2(q, r) = \sum_s \sum_t |X_{qs}|^2 |Y_{rt}|^2 \sigma_V^2(s, t) \quad (35)$$

ここで, σ_V^2 は剛体ブロック上で測定された FRF の分散, $\sigma_{H_{ii}}^2$ は回転自由度 FRF の分散をそれぞれ表している。

3.2 信頼性の評価方法 一般に, 測定された FRF の信頼性はコヒーレンス関数によって評価される⁽⁹⁾。ここで, 測定によって得られた FRF は統計量であり, その分散は次式により与えられる⁽¹⁰⁾。

$$\sigma_H^2 = \frac{1}{N-1} |H|^2 \frac{1 - \gamma_H^2}{\gamma_H^2} \quad (36)$$

ここで, N は FRF 測定における平均化回数, $H(1 \times 1)$ は測定された FRF, σ_H^2 は FRF の分散, γ_H^2 は FRF のコヒーレンス関数を表している。

本論文では, この関係を利用して, 測定された FRF の分散を求め, 回転自由度 FRF への誤差伝播を考えることにより, その分散を得る。最後に式(36)をもう一度用いて, 逆に回転自由度 FRF の分散からそのコヒーレンス γ_H^2 を求めることができる。ただし, これはあくまでも誤差指標として意味を持つものであり, スペクトル解析において定義されるコヒーレンス関数と全く同義のものとはいえない。そこで本論文では, これを信頼性係数 R^2 として定義し, 回転自由度 FRF の誤差を評価するために用いるものとする。なお, 信頼性係数 R^2

は、コヒーレンス関数と同様、 $0 \leq R^2 \leq 1$ であり1に近いほど誤差が少なく、信頼性が高いことを意味する。

3.3 誤差伝播関数の推定方法 ここでは、式(35)の関係を用いて、誤差伝播関数を求める。今、剛体ブロック上の応答 $[V]$ に含まれるランダム誤差は独立であり、その分散は全て等しく σ_v^2 であると仮定する。このとき、 σ_v^2 と $\sigma_{H_{ii}}^2$ の比の平方根をとり、これをFRF行列の (q,r) 要素の誤差伝播関数 ε_{EPF} として定義する。すなわち、

$$\varepsilon_{EPF}(q,r) = \sqrt{\sum_s |X_{qs}|^2 \sum_t |Y_{rt}|^2} \quad (37)$$

これは、全てのFRFにおいて一様な誤差が含まれているとき、回転自由度FRFにどのように誤差が伝播するかを標準偏差の比として表すものである。

4. 回転自由度FRF測定への適用例

本章では、数値シミュレーションと実験の両方から、はり構造物の回転自由度FRFを推定し、提案法による回転自由度FRFの推定精度、ランダム誤差の評価方法の妥当性、有効性を検証する。ここでは、はり構造物の曲げ振動測定に注目する。曲げ振動の解析であれば、はりの横方向並進成分 (y) と回転成分 (θ) の並進1自由度、回転1自由度を考慮すれば十分であるが、本論文では、はりの軸方向 (x) の加振も行うために x 方向の並進自由度も加え、並進2自由度 (x,y) 、回転1自由度 (θ) を計測自由度とする。

4.1 FEMモデルによる検討 本節では、回転自由度FRFの測定におけるランダム誤差の影響を評価するために、まず、FEMモデルによる検討を行った。

4.1.1 モデル化方法 本論文では、提案法をはり構造物の回転自由度FRF測定に適用するために、剛体ブロックの形状をT型とした(以下、Tブロックと呼ぶ)。このTブロックを図1に示す。Tブロックはアルミニウム製で質量は51gである。このTブロックは並進2自由度 (x,y) 、回転1自由度 (θ) の計3自由度を測定するために設計されている。本論文では推定精度を向上させるために、Tブロック上で測定されるFRFの数を48個(加振点:I, ..., VIII, 測定点:I, II, VI, VII, VIII, IX)とした。なお、前報告におけるFRFの数は9個(加振点:I, VII, VIII, 測定点:I, VII, VIII)であった。ここで、Tブロックは剛体としてモデル化した。

シミュレーションに用いたはりは、長さが660mmで、6mm×16mmの長方形断面を持ち、黄銅製である。はりの境界条件を周辺自由とし、はり構造物の点1(図10参照)に剛にTブロックを固定したものとして、モデル化を行った。

Fig. 1 Configuration of the T-block

Fig. 2 Translational FRFs (I-I) on the T-block
(Samples: 20, STD: 0.3)

(a) —: Simple Method (c) —: FEM (Noise Free)

Fig. 3 Rotational FRFs of the Beam Structure with Random Noise Included by FEM (48 FRFs, Samples: 20, STD: 0.3)

4.1.2 推定法と精度の関係 ここでは、まず、はり構造物にTブロックが固定された状態で測定される48個のFRFをFEMにより推定し、そのFRFに対してランダム誤差を混入させる。次に、誤差を混入したFRFを元に本研究で提案する方法により回転自由度FRFを推定し、ランダム誤差の影響を評価する。ここでは、標準偏差0.3のランダム誤差を混入した(誤差のFRFに対する比はrms値で約0.4%である)。

図2にTブロック上の並進自由度FRF(I-I)を示す。こ

れらはランダム誤差を混入したFRFの20個のサンプルを示している。ここでは、全周波数域に対して一定のランダム誤差が混入されている。Tブロック上の全てのFRF (48個) に対して均一のランダム誤差を混入し、それらより回転自由度FRFを推定する。

図3には48個のFRFを元に推定した、はりの点1の回転自由度(θ)に関する自己FRF($H_{1\theta 1\theta}$)を示す。図3においては、(a)簡便法によるFRF、(c)FEMによる真のFRFをそれぞれ比較して示してある。(a)はランダム誤差が混入したFRFを元に回転自由度FRFを推定したものであり、20個の推定値を重ね書きにして示している。図3を見ると、(a)のFRFの推定精度は周波数に依存しており、周波数が高くなるに従ってランダム誤差の影響を敏感に受けることがわかる。また、(a)のFRFにおいては、4次以上の共振点でランダム誤差の影響によりピークの形が不鮮明になり、その絶対値が低下する傾向にあることがわかる。

図4には、同じ自己FRF($H_{1\theta 1\theta}$)の提案法による推定結果を示す。図4においては、(b)提案法によるFRF、(c)FEMによるFRFをそれぞれ比較している。図4を見ると、(b)は図3の(a)と同様に周波数が高くなるに従い、推定精度が若干低下するものの、ピークの形は比較的是っきりと示されており、誤差の影響は(a)に比べてやや小さくなっている。

図5は、はりの点1の回転自由度(θ)に関する自己FRF($H_{1\theta 1\theta}$)とその信頼性係数を示している。なお、推定結果(a)、(b)は、Tブロック上のFRFのサンプル数を150として、それぞれの推定結果を平均化したものを示している。(a)のFRFは4~6次の固有振動数付近において、絶対値が小さく見積もられる傾向にあるのに対して、(b)のFRFは、偏りが小さく推定精度が改善されているのがわかる。以上の結果より、提案法はランダム誤差に対して推定精度を向上させるためには有効であることが確認できた。図5を見ると高次モードにおいて、提案法においてもわずかな偏り誤差が見受けられる。この理由として、[V]に含まれるランダム誤差は $[A_G]$ (式(22))に対して線形に伝播するため $[A_G]$ に対しては不偏推定であるが、 $[H_{ii}]$ (式(24))に対しては非線形に伝播するため推定結果にわずかな偏りが生ずるものと考えられる。

次に、得られた回転自由度FRFの信頼性係数について説明する。図5に示した信頼性係数を見ると、図2におけるコヒーレンス関数に比べて全般に低下傾向を示しており、回転自由度FRFは元のFRFよりも誤差に敏感であることがわかる。また、推定値の回転自由度FRFが大きくなばらつきを示していた4次以上の固有振動数付近では、信頼性係数も大きく低下しており、この係

Fig. 4 Rotational FRFs of the Beam Structure with Random Noise Included by FEM (48 FRFs, Samples: 20, STD: 0.3)

Fig. 5 Rotational FRFs of the Beam Structure with Random Noise Included by FEM (48 FRFs, STD: 0.3)

数がFRFのランダム誤差によるばらつきの度合いを示していることが理解される。

4.1.3 FRF数と精度の関係 図6は、回転自由度FRFの推定に用いるTブロック上のFRF数と信頼性係数の関係を示したものである。これは、はりの点1の自己FRF($H_{1\theta 1\theta}$)の信頼性係数を示したものである。図6において、(i)は48個のFRFから得られた信頼性係数、(ii)は9個のFRF (加振点: I, VII, VIII, 測定点: I, VII, VIII) から得られた信頼性係数を示している。本適用例では、計測対象自由度を3自由度(x, y, θ)としているため、Tブロック上の独立な計測自由度は少なくとも3が必要である。図6を見ると、(i)の信頼性係数は推定に用いるFRF数を大きくすることで増加しており、信頼性が向上していることが確認できる。

図7には、回転自由度FRFの誤差伝播関数を示す。図

7において、(i)は48個のFRFから得られた誤差伝播関数、(ii)は9個のFRF(加振点: I, VII, VIII, 測定点: I, VII, VIII)から得られた誤差伝播関数を示す。これは、Tブロック上の元のFRFに含まれるランダム誤差の大きさを1としたとき、推定されたFRFが持つ誤差の標準偏差を近似的に表すものである。図7を見ると、全周波数域において(i)の方が(ii)に比べ誤差の伝播率が小さく、推定精度が優れていることがわかる。これらのことから、剛体ブロック上のFRF数の増加は、推定されたFRFの推定精度向上や信頼性向上に寄与することがわかる。なお、図6の信頼性係数は、測定された元のFRFの誤差特性も反映しているのに対して、図7の誤差伝播関数においてはFRFの推定過程において誤差がどのように伝播するかのみを示している点が異なる。

4.1.4 剛体ブロックの質量と精度の関係 次に、計測に用いる剛体ブロックの質量とランダム誤差の関係について検討する。Tブロックの質量を約3倍(Tブロックの材質をアルミニウムから鋼に変更した場合を想定)に変更し、回転自由度FRFを推定した。図8には48個のFRFより推定した、自己FRF(H_{1010})の信頼性係数を比較して示す。また、同様の条件における誤差伝播関数を図9に示す。これらの2つの図を見ると、(ii)は(i)に比べて明らかに誤差が増大しており、測定に用いる剛体ブロックの質量が大きくなると、ランダム誤差の影響を敏感に受けることがわかる(この傾向は高周波数域の共振点付近において特に著しい)。これは、剛体ブロック上で測定されるFRFの振幅は剛体ブロックの質量が大きいくほど低下する傾向にあり、従って、質量が大きいくほどFRFのSN比が相対的に低下することが原因として考えられる。すなわち、提案法では原理的に剛体ブロックの質量特性の影響を受けないFRFの測定が可能であるが、ランダム誤差に対する精度の観点においては、なるべく質量の小さな剛体ブロックを用いることが望ましいといえる。

4.2 実験モデルによる検討 次に、実験モデルによる検討を行う。実験に用いたTブロックは、図1に示したものと同一のものである。Tブロック上の測定点I, II, VI, VII, VIII, IXに1軸の加速度センサ(PCB M352C65, C66)を取り付け、加振点I, ..., VIIIをインパクトハンマにより順次加振し、FRF測定を行った。

提案法においては、構造物に取り付けるTブロック本体、及びTブロック結合部は共に剛であると仮定している。しかし、本論文で用いたTブロックの1次固有振動数は、境界条件を一端固定としたとき757Hz、周辺自由としたとき2156Hzであり、この振動数は測定対象物とTブロックの質量比、Tブロックの結合部剛性等の条件により変化することが考えられる。そのため、

Fig. 6 Reliability Factor of Rotational FRFs of the Beam Structure (STD: 0.3)

Fig. 7 Error Propagation Function of Rotational FRFs of the Beam Structure (STD: 0.3)

Fig. 8 Reliability Factor of Rotational FRFs of the Beam Structure (STD: 0.3)

Fig. 9 Error Propagation Function of Rotational FRFs of the Beam Structure (STD: 0.3)

1000Hz付近では推定された回転自由度FRFに何らかの影響を及ぼす可能性がある。

はり構造物を紐で自由支持し、インパクトハンマにより加振実験を行った。実験装置の概略を図10に示す。Tブロックは、はりの点1に2本のボルト(M5)で固定した。(実験に用いたはりも、シミュレーションに用いたものと同じものである。) はりに固定されたTブロック上の加振点I, ..., VIIIをインパクトハンマにより順次加振し、計48個のFRFを測定した。これより、はり構

造物の回転自由度 FRF(3×3) を同時に推定した。

ここでは、測定されたはり構造物の回転自由度 FRF に対して提案法を適用し、推定精度の向上を試みると共に、ランダム誤差に対する信頼性を評価する。

図 11 に T ブロック上の 48 個の FRF より推定した、はりの点 1 の回転自由度 (θ) に関する自己 FRF ($H_{\theta\theta}$) とその信頼性係数を示す。図 11 においては、(a) 簡便法による FRF と (b) 提案法による FRF をそれぞれ比較して示してある。図 11 を見ると、500Hz 以下の周波数域では、(a)、(b) は重なっておりほぼ等しいことがわかる。しかし、それ以上の周波数域では、共振点付近で (a) の FRF は (b) よりも小さな振幅を示しており、これはシミュレーションによる傾向 (図 5) と一致している。すなわち、(a) の簡便法は、誤差の影響により推定精度が低下しているものと考えられる。また、(b) の提案法は (a) に比べて精度が向上しているが、5 次、及び 6 次の共振点付近では、共振峰の形にやや歪みが見られ、また信頼性係数も低下しており、これは計測において含まれるランダム誤差などが影響を与えていたと考えられる。

図 12 に T ブロック上の 48 個の FRF より推定した、はりの点 1 の並進自由度 (y) に関する自己 FRF (H_{yy}) とその信頼性係数を示す。これは従来の実験モード解析においても計測可能な自由度の FRF であるが、ここでは検証のために比較して示す。図 12 においては、(a) 簡便法による FRF、(b) 提案法による FRF、(c) 従来法による FRF をそれぞれ比較して示してある。従来法とは、一般的なインパクトハンマと加速度センサを用いて直接 FRF を測定する方法である。図 12 では、4 次の共振点以下においては、(a)、(b) の FRF は (c) の FRF と良く一致している。また、5、6 次の共振点付近においては、(a) の FRF の推定精度は低下しているが、(b) の FRF では、推定精度が大きく向上していることがわかる。

図 11、12 において、600Hz 以上の高周波数域においてはやや推定精度が低下し、提案法を用いても従来法と比べて共振点の振幅が若干低下する傾向にある。この原因としては、T ブロックの弾性振動、T ブロック結合部の剛性、T ブロックの接触面における摩擦の影響などが考えられる。これらはバイアス誤差であり、平均化により除去できない成分なので、対処するためには、実験計測において細心の注意を払うと共に、別途検討が必要であると考えられる。

5. 結 論

本論文では、ランダム誤差に対する回転自由度 FRF の推定精度向上を目的として、新しい推定法を提案した。また、数値シミュレーションと実験により回転自由度

Fig. 10 Rotational FRFs Measurement System

(a) —: Simple Method (b) —: Proposed Method

Fig. 11 Rotational FRFs of the Beam Structure by Experiment (48 FRFs)

(a) —: Simple Method (b) —: Proposed Method
(c) —: Conventional Method

Fig. 12 Translational FRFs of the Beam Structure by Experiment (48 FRFs)

FRFのランダム誤差に対する推定精度について検討を行った。これにより、本論文では以下の結論を得た。

- (1) 提案法による回転自由度FRFの推定精度は簡便法に比べて向上することを示し、提案法のランダム誤差に対する有効性を確認した。
- (2) 測定された元のFRFの回転自由度FRFに対する誤差の伝播を考慮することにより誤差伝播関数を定義し、また、回転自由度FRFに含まれるランダム誤差を評価する指標として、その信頼性係数を定義した。
- (3) 剛体ブロックによる回転自由度FRFの測定においては、剛体ブロック上に取り付けるセンサ数を増やすことで推定精度、信頼性係数を向上させ、ランダム誤差の影響を小さくすることができること、また、推定したFRFは周波数が高くなるに従って、ランダム誤差の影響を敏感に受けること、さらに計測に用いる剛体ブロックの質量、慣性モーメントが大きくなると推定結果のFRFはランダム誤差の影響を受け易くなること等を明らかにした。

以上のことから、本論文で提案した新しい推定法を用いることにより、回転自由度FRFの推定精度の向上、及び適用周波数範囲の拡大を図ることができた。

文 献

- (1) 細矢直基, 吉村卓也, 構造物の回転自由度に関する周波数応答関数の推定 (自己FRF推定法の提案と基礎的検討), 機論, 67-657, C(2001), 1470-1477.
- (2) Quantitative Treatment and Testing of Rotational Degrees of Freedom, BE 97-4184.
URL: <http://www.dem.ist.utl.pt/~QUATTRO>
- (3) Ziaei-Rad, S., Martarelli, M., Ewins, D. J., *Measuring RDOFs Using Laser Doppler Vibrometer*, Proc. of the 25th International Seminar on Modal Analysis, 2000.
- (4) Bregant, L. and Casagrande, D., *Rotational Degrees of Freedom Data Synthesis based on Force Excitation*, Proc. of the 25th International Seminar on Modal Analysis, 2000.
- (5) Silva, J. M. M., Maia, N. M. M., and Ribeiro, A. M. R., *Indirect Estimation of Rotational Frequency-Response Functions*, Proc. of the 19th International Modal Analysis Conference, 2001, 1535-1542.
- (6) Helderweirt, S., Van der Auweraer, H., Mas, P., Bregant, L. and Casagrande, D., *Application of Accelerometer-Based Rotational Degree of Freedom Measurements for Engine Subframe Modelling*, Proc. of the 19th International Modal Analysis Conference, 2001, 1298-1304.
- (7) Witter, M. C., Blough, J. R. and Brown, D. L., *Measuring the 6 Degree of Freedom Driving Point Frequency Re-*

sponse Function Using a 6 DOF Impedance Head and its Validation, Proc. of the 24th International Seminar on Modal Analysis, 1998.

- (8) Champoux, Y., Paillard, B. and Macheto, D., *Moment Excitation Using Two Synchronized Impact Hammers*, Proc. of the 19th International Modal Analysis Conference, 2001, 543-549.
- (9) J. S. ベンダット著, 他1名, 得丸英勝訳, 他4名, ランダムデータの統計的処理, 培風館, 1985, p.33.
- (10) 吉村卓也, 長松昭男, モード解析に関する研究 (第7報, 周波数応答関数の分散の推定方法), 機論, 54-507, C(1988), 2514-2521.
- (11) 栗屋隆, データ解析, 学会出版センタ, 1987, p.96.

付 録

行列における誤差伝播 まず、関数 $y = f(x_1, \dots, x_n)$ (ただし, x_i および y は複素数) について、変数 $x_i (i=1, \dots, n)$ から変数 y への誤差伝播を考える。 y を $x_i (i=1, \dots, n)$ について全微分すると、

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \quad (38)$$

上式は, x_i が平均値 $\bar{x}_i$ の近傍で微小変動したときの y の変動を表している。ここで, $x_1, \dots, x_n$ は互いに独立と仮定すると, これらの分散の間には次の関係が成り立つ⁽¹⁾。

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (39)$$

ここに, $\sigma_{x_i}^2$ 及び σ_y^2 は, それぞれ x_i 及び y の分散を表す。今, 複素行列 H, V, X, Y の間に次の関係が成り立つとする。

$$\delta H = X \delta V Y \quad (40)$$

ここで, 行列 δV の各要素 δV_{st} から行列 δH の各要素 δH_{qr} への誤差の伝播を考える。まず, δH の (q, r) 要素について表せば,

$$\delta H_{qr} = \sum_s X_{qs} \left(\sum_t \delta V_{st} Y_{tr} \right) = \sum_s \sum_t X_{qs} Y_{tr} \delta V_{st} \quad (41)$$

ここで, 行列 V の各要素の変動量 δV_{st} は互いに独立であると仮定すれば, 式(39)の誤差伝播の関係を用いることにより, 次式が導かれる。

$$\sigma_H^2(q, r) = \sum_s \sum_t |X_{qs}|^2 |Y_{tr}|^2 \sigma_V^2(s, t) \quad (42)$$

ここに, $\sigma_{V_{st}}^2$ は行列 V の (s, t) 要素の分散を, $\sigma_{H_{qr}}^2$ は行列 H の (q, r) 要素の分散をそれぞれ表す。このように式(42)は式(40)における行列 V から行列 H への誤差伝播の関係を示している。