一意な質量行列及び剛性行列の同定法*

平野 篤史^{*1}, 三澤 正吉^{*2}

A Method to Identify Unique Mass and Stiffness Matrices

Atsushi HIRANO and Masayoshi MISAWA^{*3}^{*3} Department of Mechanical Engineering, Shizuoka University,
3-5-1 Johoku, Hamamatsu-shi, Shizuoka, 432-8561 Japan

This paper deals with the uniqueness of identified mass and stiffness matrices in system identification. Using the constrained minimization theory, these matrices are so identified as to minimize the Euclidean norm of the matrices. Current identification methods with constraints on the modal masses can never give a unique mass matrix because mode shapes are relative ratio of amplitude at points on structures. This paper proposes that the measured mass properties of a structure and mode orthogonality are introduced into the constraints to solve this problem. The proposed method is applied to a cantilever beam. Numerical results show that the proposed method gives unique mass and stiffness matrices.

Key Words: Identification, Finite Element Method, Modal Analysis, Space Equipment, Space Engineering, Unique Solution, Modal Mass, Mode Orthogonality, Mass Property

1. 緒言

打上げ時の強度や軌道上での制御の観点から、他の機器との共振や制御系との連成を避けるため、固有振動数は宇宙構造物の重要な設計条件の一つになっている。宇宙構造物が大形化し、構造が複雑になるにつれて解析モデルには誤差が生じる。このため、振動試験結果を精度良く予測できる解析モデルをつくるのが難しくなっている。当然のことながら、このような解析モデルでは、打上げ時の強度や軌道上での動特性を確認することができない。即ち、品質を保証することができないため、打上げに供することができない。このような理由から宇宙構造物では動特性を正確に予測することが非常に重要であり、高精度な解析モデルがますます必要になっている。

上記の問題を解決する一つの方法として、地上での試験結果を精度良く予測するように解析モデルを修正することが考えられる。しかし、試行錯誤による修正で

は、自由度数の大きな解析モデルを試験結果に一致するように修正することは不可能である。このため、近年、振動試験結果を用いて解析モデルを修正する、システム同定に関する研究が盛んに行なわれている(1)~(6)。一方、宇宙構造物の振動試験では、打上げ時の荷重に対する強度確認を目的として、正弦波による台加振が広く一般に行われている。強度確認に先立って、解析による振動特性の予測との大きな違いを確認するために低加振レベルのモーダルサーベイ試験が実施され、加速度の計測点数は予測モードを参考に少なく抑えられる。この台加振による振動試験ではモード質量を得ることができないため、後述するように、同定した質量行列が一意ではないといった問題を生じる。近年注目を集める実験モード解析はモード質量が得られる利点を有するが、時間的な制約条件から宇宙構造物に用いられることが少ない。加速度計やケーブルの質量が固有振動数に影響することを考慮すると、加速度計を何回も付替えて加振する必要がある、また、取得したデータからモーダルパラメータを抽出する計算が必要となり、振動特性の確認のみに多大な時間を要するためである。

* 原稿受付 2001年11月16日。

^{*1} 学生員, 静岡大学大学院(〒432-8561 浜松市城北3-5-1)。^{*2} 正員, 静岡大学工学部。

E-mail: tmmisaw@ipc.shizuoka.ac.jp

従来のシステム同定法の一つに、モード質量とモード直交性を満たすように質量行列を求める方法がある(3)~(6)。振動試験によって得られるモード数はたかだか数次であり、したがってモード行列は正方行列にはならない。その結果、質量行列をモード質量とモード直交性の関係のみから求めることができない。そこで、モード質量とモード直交性を制約条件として、ノルムを最小とする質量行列を同定する方法が採られている。この方法の問題点は、最適化手法を適用しているにも拘わらず、同定された質量行列が一意ではないことである(7),(8)。前述したように、宇宙構造物の開発に広く用いられている台加振では、振動試験によってモード質量が得られないことによる。対象とする固有振動数に関して、同定された質量行列と剛性行列は測定値に一致する結果を与えるが、質量や剛性の分布は実際の構造物とは全く異なる結果を与える。

本稿では、一意な質量行列と剛性行列を得る同定法について述べる。まず、従来の同定における問題点を明らかにする。次いで、一意性を考慮して制約条件を設定する。最後に、数値計算例により、本方法の有効性を示す。

2. 記号

A	0でない任意の定数を成分とする対角行列
E_{n_T}	$n_T \times n_T$ の単位行列
G_1, G_2, G_3	$=X_G m, Y_G m, Z_G m$
I_X, I_Y, I_Z	構造物の慣性モーメント
I_{XY}, I_{YZ}, I_{ZX}	構造物の慣性乗積
K	同定された剛性行列
K_A	同定前の剛性行列
M	同定された質量行列
M_A	同定前の質量行列
M_0	質量特性の測定値を成分とする行列
R	剛体変位行列
X_G, Y_G, Z_G	構造物の重心位置
m	構造物の質量
n_A	解析モード数
n_T	測定モード数
ΔM	$=M - M_A$
Λ	ラグランジュ乗数 λ_{ij} を成分とする行列
Ω	固有振動数の測定値を成分とする対角行列
ε	ノルム
ϕ	モード行列
$\bar{\phi}$	式(8)で定義される行列
ψ	ラグランジュ関数

3. 従来の同定法

代表的な同定法として、Bermanの方法(4)について述べる。同定される質量行列 M を同定前の質量行列 M_A と変化分 ΔM との和で表すと、モード質量とモード直交性より

$$\phi^T (M_A + \Delta M) \phi = E_{n_T} \quad (1)$$

いま

$$P = \phi^T M_A \phi \quad (2)$$

とすると、式(1)は

$$\phi^T \Delta M \phi = E_{n_T} - P \quad (3)$$

となる。 ϕ は一般に正方行列ではないので、式(3)を満たす ΔM は一意には定まらない。このため、式(3)を制約条件として、重み付きのユークリッドノルムを最小とする ΔM を求める。ラグランジュ関数は

$$\begin{aligned} \psi = & \| M_A^{-\frac{1}{2}} \Delta M M_A^{-\frac{1}{2}} \| \\ & + \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{j=1}^{n_A} \kappa_{ij} (M - M^T)_{ij} \\ & + \sum_{i=1}^{n_T} \sum_{j=1}^{n_T} \lambda_{ij} (\phi^T \Delta M \phi - E_{n_T} + P)_{ij} \end{aligned} \quad (4)$$

で与えられる。ここに、 κ_{ij} , λ_{ij} はラグランジュ乗数である。また、 $\| \quad \|$ は各成分の2乗和を表す。式(4)の両辺を ΔM の各成分で微分して0と置くと

$$\Delta M = -\frac{1}{2} M_A \phi \Lambda^T \phi^T M_A \quad (5)$$

式(5)を式(3)に代入すると、ラグランジュ乗数 λ_{ij} は

$$\Lambda = -2P^{-1} (E_{n_T} - P) P^{-1} \quad (6)$$

で与えられる。式(6)を式(5)に代入すると質量行列の変化分が得られ、同定された質量行列は

$$M = M_A + M_A \phi P^{-1} (E_{n_T} - P) P^{-1} \phi^T M_A \quad (7)$$

となる。

4. 問題点とその要因

従来の方法における問題点の1つは、同定された質量行列が一意でないことである。振動モードは各自自由度の振幅の比なので、0でない定数を乗じたモード

$$\bar{\phi} = \phi A \quad (8)$$

も同じ振動モードを示す。いま、式(3)のモード質量とモード直交性の条件を満たす他の解 $\Delta \bar{M}$ が存在すると仮定すると

$$\bar{\phi}^T \Delta \bar{M} \bar{\phi} = E_{n_T} - \bar{P} \quad (9)$$

ここに

$$\bar{P} = \bar{\phi}^T M_A \bar{\phi} \quad (10)$$

式(9)を制約条件として Berman の方法を適用すると、最終的に

$$\bar{M} = M_A + M_A \phi P^{-1} (A^{-2} - P) P^{-1} \phi^T M_A \quad (11)$$

が得られる。行列 A は任意なので、式(11)は M とは異なる $\bar{M}$ が無数に存在し、一意な解が得られないことを示す。Baruch⁽⁷⁾ は、全てのモードを考慮した場合、つまりモード行列が正方行列であり、その次元が解析の自由度に等しい場合について同様の指摘をしている。この問題は、振動モードが絶対値ではなく相対値であることに起因する。振動モードは相対値であるため種々の規格化が可能であり、式(1)のモード質量の関係は振動モードの規格化の代表的な一例に過ぎない。即ち、式(1)は振動モードが満たすべき条件であるにも拘わらず、質量行列の同定において、質量行列が満たすべき制約条件としたことに物理的解釈の誤りがある。このことが、最適化手法を適用しても、なお同定された質量行列が一意性を欠く理由であると考えられる。

他の問題点は同定された質量行列から構造物の質量特性が得られないことである。質量行列は各有限要素の形状や密度のデータをもとに組立てられ、当然のことながら構造物の質量特性を表現できる性質を有する。固有振動数や質量特性に関する解析値と測定値が得られると、これらの違いから解析モデルをどう修正するかの情報が得られるが、従来の方法ではこの質量特性の違いが同定の条件として用いられていない。また、式(7)と式(11)を比較すると、単位行列が行列 A の各成分の2乗で割った値に置き換えられる。このことは振動モードの規格化の仕方によって質量行列の変化分の増減が決まることを示す。即ち、真の質量行列に近づく保証が全くない。さらに、振動モードと質量行列は一対一に対応しないので、たかだか数次の振動モードのみで質量行列の変化分を決定することはできない。これらが同定された質量行列から構造物の質量特性が得られない理由である。その結果、数値解析例に示すように、方向によって質量が異なるといった、物理的に不合理な結果を生じる。

一方、以下に示すように、同定された質量行列が一意ならば剛性行列は常に一意に同定される。即ち、制約条件に振動モードを用いた場合でも、同定された剛性行列はモードの規格化に依存しない。したがって、Berman の方法と同様の、モード剛性、モード直交性や振動方程式を制約条件とした剛性行列の同定でも一

意性の問題は生じない。式(11)に示したように、質量行列の一意性は制約条件に依存する。そこで、以下では制約条件をチェックすることによって、剛性行列の一意性を吟味する。一意性に関連する(振動モードを用いた)制約条件としてモード剛性、モード直交性と振動方程式を対象とし、最初にモード剛性、モード直交性

$$\phi^T K \phi = \phi^T M \phi \Omega^2 \quad (12)$$

を考える。ここに、同定された質量行列 M は、一意とする。いま、式(12)を満たす他の解 $\bar{K}$ があると仮定すると

$$\bar{\phi}^T \bar{K} \bar{\phi} = \bar{\phi}^T M \bar{\phi} \Omega^2 \quad (13)$$

が成立する。式(8)を式(13)に代入すると

$$A^T \phi^T \bar{K} \phi A = A^T \phi^T M \phi A \Omega^2 \quad (14)$$

A と Ω^2 は共に対角行列であるので積の順序が交換可能である。したがって、式(14)は

$$A^T \phi^T \bar{K} \phi A = A^T \phi^T M \phi \Omega^2 A \quad (15)$$

と書き換えられる。左右から A^{-1} を乗ずると

$$\bar{\phi}^T \bar{K} \phi = \phi^T M \phi \Omega^2 \quad (16)$$

式(12)と式(16)より $\bar{K}$ は K に等しい。即ち、制約条件はモードの規格化に拘わらず一意であることがわかる。同様に、振動方程式

$$K \phi = M \phi \Omega^2 \quad (17)$$

について考えると

$$\bar{K} \phi = M \phi \Omega^2 \quad (18)$$

となり、モードの規格化に拘わらず制約条件は一意である。Baruch⁽⁷⁾ は剛性行列も一意に同定できないと述べているが、上述のように、質量行列が一意ならば同定される剛性行列は一意である。

5. 提案する同定法

前述の問題点を解決するには、質量行列の同定において構造物の質量特性を考慮することが不可欠である。以下では、一意性を考慮した制約条件を設定し、質量行列の同定法について述べる。

5.1 制約条件の設定 式(11)から、式(1)の非対角項、つまりモード直交性の制約条件は振動モードの規格化に拘わらず一意である。したがって、モード直交性のみを制約条件とする。

$$\phi_i^T M \phi_j = 0 \quad (i \neq j) \quad (19)$$

また、質量特性は対称性を満足する必要があるので

$$M = M^T \quad (20)$$

を制約条件とする。さらに質量行列は質量特性に関する条件を満たす必要がある。いま、X, Y, Z方向の単位並進ベクトルと、X, Y, Z軸回りの単位回転ベクトルをそれぞれ $R_1 \sim R_6$ とすると、剛体変位行列 R は

$$R = [R_1 \ R_2 \ R_3 \ R_4 \ R_5 \ R_6] \quad (21)$$

で与えられる。これを用いて、質量特性の制約条件は

$$R^T M R = M_0 \quad (22)$$

で表される。ここに、 M_0 は質量特性の測定値を成分とする行列で

$$M_0 = \begin{bmatrix} m & & & & & \\ 0 & m & & & & \\ 0 & 0 & m & & & \\ 0 & -G_3 & G_2 & I_X & & \\ G_3 & 0 & -G_1 & I_{XY} & I_Y & \\ -G_2 & G_1 & 0 & I_{XZ} & I_{YZ} & I_Z \end{bmatrix} \quad (23)$$

で与えられる。式(22)に示すように、質量特性を表わす行列(剛体質量行列)は質量行列と剛体変位行列から求められる。剛体変位行列はモード行列のような相対値ではなく、絶対値として与えられるので、質量特性を制約条件としても一意性は保証される。

剛性行列に関しては、従来と同様の制約条件を用いても一意性は保証される。したがって、モード剛性、モード直交性

$$\phi^T K \phi = \phi^T M \phi \Omega^2 \quad (24)$$

対称性

$$K = K^T \quad (25)$$

振動方程式

$$K \phi = M \phi \Omega^2 \quad (26)$$

を制約条件とする。

5.2 質量行列の同定 式(19)、式(20)、式(22)で表される制約条件のもとに

$$\epsilon = \frac{1}{2} \|\Delta M\| \quad (27)$$

を最小にする質量行列を求める。モード質量は一意な質量行列を同定する上で制約条件にすべきではないが、

定式化の記述を簡略化するため、以下では便宜的に制約条件に含める。ラグランジュ関数 ψ は

$$\begin{aligned} \psi = \epsilon + 2 \sum_{i=1}^{n_T} \sum_{j=1}^{n_T} \alpha_{ij} (\phi^T M \phi - E_{n_T})_{ij} \\ + \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{j=1}^{n_A} \beta_{ij} (M - M^T)_{ij} \\ + 2 \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \gamma_{ij} (R^T M R - M_0)_{ij} \end{aligned} \quad (28)$$

で与えられる。ここに、 α_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} は、ラグランジュ乗数である。式(28)を M の各成分で微分し、0と置き M を求めると

$$\begin{aligned} M = M_A - \sum_{i=1}^{n_T} \sum_{j=1}^{n_T} \alpha_{ij} (H_{ij} + H_{ij}^T) \\ - \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \gamma_{ij} (L_{ij} + L_{ij}^T) \end{aligned} \quad (29)$$

ここに

$$H_{ij} = \langle \phi_i \phi_j^T \rangle \quad (30)$$

$$L_{ij} = \langle R_i R_j^T \rangle \quad (31)$$

また、 $\langle \Gamma \rangle$ は M_A において0である成分に対応する Γ の成分は0であることを示す。これにより、有限要素の結合性を保った質量行列を同定することができる⁽⁹⁾。式(29)を式(19)に代入すると

$$\sum_{i=1}^{n_T} \sum_{j=1}^{n_T} \alpha_{ij} S_{ij} + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \gamma_{ij} Q_{ij} = P - E_{n_T} \quad (32)$$

また、式(29)を式(22)に代入すると

$$\sum_{i=1}^{n_T} \sum_{j=1}^{n_T} \alpha_{ij} V_{ij} + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \gamma_{ij} U_{ij} = T - M_0 \quad (33)$$

ここに

$$T = R^T M_A R \quad (34)$$

$$S_{ij} = \phi^T (H_{ij} + H_{ij}^T) \phi \quad (35)$$

$$Q_{ij} = \phi^T (L_{ij} + L_{ij}^T) \phi \quad (36)$$

$$V_{ij} = R^T (H_{ij} + H_{ij}^T) R \quad (37)$$

$$U_{ij} = R^T (L_{ij} + L_{ij}^T) R \quad (38)$$

ラグランジュ乗数 α_{ij} , γ_{ij} は、式(32)と式(33)の連立一次方程式を解くことにより得られ、これらを式(29)に代入することにより、同定した質量行列 M が求まる。但し、連立一次方程式の係数行列は悪条件行列と

Fig. 1 Finite element model of cantilever beam

なことがある。その場合、係数行列の逆行列を用いて解く方法ではラグランジュ乗数の真の値が得られない。即ち、制約条件を満足するような質量行列と剛性行列を同定できない。そこで、連立一次方程式を特異値分解を用いて近似解を求めることにより、制約条件を満足するような質量行列と剛性行列を同定する⁽¹⁰⁾。剛性行列は質量行列の同定と同様にして同定することができるので、本稿では説明を省略する。

6. 数値計算例

提案した同定法の有効性を確認するため、図1に示す片持梁を対象としたシミュレーション計算を行った。図中の数字は節点番号、X, Y, Zは座標系を示す。境界条件は節点1を完全固定とし、X軸回りの自由度は固定とした。したがって、対象となる片持梁の解析自由度数は45となる。

表1に片持梁の諸元を示す。試験のパラメータを用いた解析結果のうち、3次までの固有振動数と振動モード、質量特性を試験結果とした。一般に、有限要素モデルの全ての節点における変位を、振動試験の際に測定することは不可能である。そこで、節点6, 10でのY方向および節点4, 6, 8, 10でのZ方向のみを計測点とした。非計測点の変位は、固有振動数と計測点での変位及び同定前の質量行列、剛性行列から求めた^{(4),(9)}。また、節点番号1~6からなる要素の密度を40%減、節点番号6~10からなる要素の密度を10%減、全要素のヤング率を10%増と変化させたパラメータを用いて得られる質量行列と剛性行列を、同定前の質量行列と剛性行列とした。

同定前の解析結果と試験結果の振動特性を表2に示す。1次, 3次, 4次, 6次, 7次, 9次モードはZ方向の曲げ, 2次, 5次, 8次, 10次モードはY方向の曲げである。10次までの固有振動数では、解析値は試験値に対し10%~20%程度高い。質量行列の同定に

Table 1 Parameters of test and analysis

Parameters	Test	Analysis
Density	*1 2.3	1.4
$[\times 10^{-6} \text{kg/mm}^3]$	*2 2.3	2.1
Young's modulus [GPa]	68.7	75.5

*1 Elements containing nodes 1 to 6

*2 Elements containing nodes 6 to 10

Table 2 Vibration characteristics

Mode No.	Natural frequencies [Hz]		Mode description
	Test	Analysis	
1	4.1	4.6	Bending (Z)
2	13.8	15.3	Bending (Y)
3	25.9	30.8	Bending (Z)
4	72.6	88.7	Bending (Z)
5	86.4	102.7	Bending (Y)
6	142.6	171.8	Bending (Z)
7	236.5	288.0	Bending (Z)
8	242.2	295.6	Bending (Y)
9	355.1	428.5	Bending (Z)
10	475.3	572.8	Bending (Y)

関して、対称性に加えて

ケース1; モード質量とモード直交性

ケース2; モード直交性

ケース3; 質量特性

ケース4; 質量特性とモード直交性

を制約条件としてシステム同定を行った。剛性行列の同定に関しては、いずれのケースにおいても、モード剛性、モード直交性、対称性、振動方程式を制約条件とする。以下に、同定結果について述べる。

6.1 質量特性 表3に同定した質量行列から求めた質量特性を示す。“解析”は同定前の質量行列から得られる質量特性、“ケース1*”は、制約条件はケース1と同じであるが、行列Aの値を変えたモード行列を用いて同定した質量行列から得られる質量特性を示す。ケース3, 4の結果から、質量特性を制約条件として考慮することにより試験値と同一の質量特性の得られることがわかる。これに対して、質量特性を制約条件としていないケース1, 2では質量特性は試験値に一致しない。ケース1では、方向により質量が異なるといった物理的に不合理な結果を生じる。これは、式(7)からわかるように、質量行列の同定がモード成分の大きさに依存するためである。Y及びZ方向の曲げモードのみを測定モードとして用いたことにより、質量行列

Table 3 Mass properties

	Test	Case 1	Case 1*	Case 2	Case 3	Case 4	Analysis
Weight [g]	X	55.2	40.6	40.6	55.2	55.2	40.6
	Y	55.2	45.4	38.8	40.6	55.2	40.6
	Z	55.2	51.1	33.6	40.6	55.2	40.6
Center of gravity [mm]	X	400	475	444	454	400	454
	Y	0	0	0	0	0	0
	Z	0	0	0	0	0	0
Moment of inertia [$\times 10^3 \text{ kgmm}^2$]	X	0	0	0	0	0	0
	Y	11.8	12.9	7.4	10.0	11.8	10.3
	Z	11.8	12.4	9.5	10.3	11.8	10.3

Table 4 Residual of mode orthogonality
($\phi^T M_A \phi - E$)

Mode No.	1	2	3
1	-0.19	0	0.04
2	0	-0.19	0
3	0.04	0	-0.24

Fig. 2 Frequency errors

のYとZ成分しか修正されない。また、表2からわかるようにY方向の測定モードよりもZ方向の測定モードを多く用いていることによりZ方向の質量が大きく改善される。さらに、ケース1とケース1*の結果は、振動モードの規格化により質量特性が異なることを示す。これは同定された質量行列が一意ではないことによる。したがって、必ずしも試験値に近づく保証がない。また、ケース2では質量特性は同定前の値から殆ど変化しない。これは、表4に示すように、同定前の質量行列に関するモード直交性の誤差が小さいことから、質量行列を修正する必要がなかったためと考えられる。

以上の結果から、質量特性を制約条件とすることの有効性が確認できる。

6.2 固有振動数 同定した質量行列と剛性行列から求めた固有振動数の試験値に対する誤差を図2に示す。3次までは固有振動数の測定値を用いて剛性行列を同定しているので、いずれのケースにおいても固有振動数の誤差はない。即ち、試験値と同じ値が得られる。4次以上の固有振動数に注目すると、他のケースに比べてケース3、4では誤差が低減する傾向にある。これは、質量行列が構造物の質量特性を満足するように同定されているためと考えられる。ケース3と4に殆ど違いが見られないのは、先にも述べたように、同定前のモード直交性の誤差が小さいことによる。実際の振動試験から得られる振動モードを用いる場合には、モード直交性が悪くなるのでモード直交性を制約条件とする効果が顕著になると考えられる。

ケース1の4次以上の固有振動数の誤差はケース2に比べて小さい。しかし、ケース1*に示すように、振動モードの規格化により誤差が変化しており、モード直交性に加えてモード質量を制約条件として考慮することが、固有振動数の誤差低減に効果があるとは言えない。ケース2では、質量行列が殆ど修正されていないので、高次の固有振動数の誤差は同定前の解析誤差とほぼ同一になっている。

6.3 質量行列と剛性行列の一意性 一意性を確認するために、行列Aの成分の値が異なる2つのモード行列を用いて質量行列を同定した。対応する成分ごとの比を図3に示す。横軸は節点番号ごとの対角成分のみをX, Y, Z, θ_Y , θ_Z の順に示す。縦軸は、

$$[M] = M_{0.1} \oslash M_{1.0} \quad (39)$$

の値を示す。 $M_{1.0}$ はある基準となるモードを用いたときの同定質量行列、 $M_{0.1}$ は基準となるモードを0.1倍したときの同定質量行列を示す。同定に用いたモードは1～3次共に0.1倍とした。また、 $\oslash$ は質量行列の

Fig. 3 Diagonal element ratios of two identified mass matrices

Fig. 4 Diagonal element ratios of two identified stiffness matrices

対応する成分どうしの除算演算子であり、

$$[M]_{ij} = (M_{0.1})_{ij} / (M_{1.0})_{ij} \quad (40)$$

を表す。式 (39) は同定前の質量行列の成分が 0 でない場合のみ成立する。全ての成分において、 $(M_{1.0})_{ij}$ と $(M_{0.1})_{ij}$ が等しい、つまり全ての成分において $[M]_{ij}$ の値が 1 のとき、質量行列が一意であることを示す。ケース 1 では $[M]_{ij}$ に 1 でない値が見られ、同定した質量行列の一意でないことがわかる。 $[M]_{ij}$ の値が 1 の成分には同定前の値から変化しなかった成分が含まれているが、いずれにしてもケース 1 では一意な質量行列を同定することはできない。一方、ケース 2 ～ ケース 4 においては、モードの規格化に関係なく全ての成分で $[M]_{ij}$ の値が 1 である。ここには示していないが、非対角成分についても $[M]_{ij}$ の値は全て 1 であった。したがって、提案した同定法により一意な質量行列を同定することができる。

剛性行列の対応する成分ごとの比を図 4 に示す。縦軸、横軸は質量行列の場合と同じである。質量行列の場合と同様にケース 1 では一意な剛性行列を同定でき

ないことがわかる。一方、ケース 2 ～ ケース 4 では、剛性行列は一意に同定できることを示している。したがって、質量行列が一意ならば、従来の同定法における制約条件を用いても一意な剛性行列を同定することができる。

7. 結論

システム同定法において、一意な質量行列と剛性行列を同定する方法について検討し、以下の結論を得た。

- (1) モード質量を制約条件とする従来の同定法では、必ずしも一意な質量行列を同定できない。また、構造物の質量分布を表す質量行列が得られないことを考慮すると、この問題を解決するには質量特性を含む制約条件の設定が必要である。
- (2) 質量行列が一意ならば、モード剛性を制約条件に用いた場合にも、同定した剛性行列は常に一意である。
- (3) より真に近い質量行列や剛性行列を同定する上で、質量特性とモード直交性の制約条件が有効である。

参考文献

- (1) Alvin, K. F., "Finite Element Model Update via Bayesian Estimation and Minimization of Dynamic Residuals," *AIAA Journal*, Vol. 35, No. 5, May 1997, pp. 879-886.
- (2) Kuo, C. P., and Wada, B. K., "Nonlinear Sensitivity Coefficients and Corrections in System Identification," *AIAA Journal*, Vol. 25, No. 11, November 1987, pp. 1463-1468.
- (3) Baruch, M., "Optimal Correction of Mass and Stiffness Matrices Using Measured Modes," *AIAA Journal*, Vol. 20, No. 11, November 1982, pp. 1623-1626.
- (4) Berman, A., and Nagy, E. J., "Improvement of a Large Analytical Model Using Test Data," *AIAA Journal*, Vol. 21, No. 8, August 1983, pp. 1168-1173.
- (5) Zhang, O., Zerva, A., and Zhang, D., "Stiffness Matrix Adjustment Using Incomplete Measured Modes," *AIAA Journal*, Vol. 35, No. 5, May 1997, pp. 917-919.
- (6) Misawa, M., "Mass Matrix Identification Using Test Data," *Proceeding of the 26th Space Structures Conference*, 1984, pp. 184-187.
- (7) Baruch, M., "Modal Data are Insufficient for Identification of Both Mass and Stiffness Matrices," *AIAA Journal*, Vol. 35, No. 11, November 1997, pp. 1797-1798.
- (8) 平野篤史, 三澤正吉, "一意性を考慮したシステム同定法," 機械学会 Dynamics & Design Conference 2001, 323, 2001.
- (9) 三澤正吉, "有限要素の結合性と構造物の質量特性を考慮したシステム同定," 日本機械学会論文集, 62 巻, 593 号, C 編, 1996 年 1 月, pp. 62-69.
- (10) 三澤正吉, 狼 嘉彰, "特異値分解のシステム同定への適用," 日本機械学会論文集, 65 巻, 634 号, C 編, 1996 年 6 月, pp. 2235-2242.