強非線形系に対する平均法の高性能化に関する研究* (第1報, ヤコビの cn 楕円関数を母解とする場合)

近藤孝広^{*1}, 岡部 匡^{*2}, 関谷 浩^{*3}

Study on High Performance Averaging Method for a Strongly Nonlinear System (1st Report, In Case that the Jacobian Elliptic Cosine Function is Used as a Generating Solution)

Takahiro KONDOU^{*4}, Tadashi OKABE and Hiroshi SEKIYA

^{*4} Department of Intelligent Machinery and Systems, Kyushu University,
6-10-1 Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka-shi, Fukuoka 812-8581 Japan

The averaging method improved by using the Jacobian elliptic function is developed in order to obtain a highly accurate periodic solution for a strongly nonlinear system. The Jacobian elliptic cosine function (so-called cn function) is used as a generating solution for the harmonically excited Duffing-type equation with hardening spring and damping. The stability for approximate solution obtained by the present method is also discussed. By comparing with the very accurate numerical solutions obtained by applying the shooting method, it is confirmed that the present method gives more accurate solution than that obtained by the traditional averaging method using the trigonometric function. In addition, not only the fundamental amplitude but also the higher harmonic amplitudes of the solution obtained by the present method are in good agreement with those obtained by the shooting method.

Key Words: Nonlinear Vibration, Forced Vibration, Stability, Strongly Nonlinear System, Averaging Method, Jacobian Elliptic Function, Duffing-Type Equation with Hardening Spring

1. 緒 言

非線形振動系に対する近似解法のひとつである平均法は、近似解が閉じた形で求められること、適用対象が形式的にはかなり広範囲であること、計算手続きが比較的容易であること、過渡応答が求められること等の特長を有していることもあって、これまで理論的研究の場面で多用されてきた。しかしながら、1項のみの三角関数を母解として用いる従来の平均法は基本的に弱非線形系を対象とする手法であり、高調波成分の影響が大きくなる非線形性の強い系に対しては、定量的

のみならず定性的にも不十分な結果しか与えないことが多い。したがって、平均法の上記の特長を活かすためにも、より高精度の近似解が得られるように平均法を改良することは、強非線形系に対する理論的研究を深める上で極めて重要な課題であると考えられる。

このような問題意識に基づいて、これまでに平均法に対するいくつかの改良法が提案されて来た。それらは方法論的見地から次の2種類に大別される。その一つは、三角関数を母解とする平均法によって得られた近似解に対する2次的な精度改善法である⁽¹⁾。しかしながら、その数式処理には膨大な労力を要するので実用性の面で問題が多い。いま一つは、三角関数に代わるより適切な関数を母解として利用するという方法である⁽²⁾⁻⁽⁶⁾。たとえば、Roy⁽⁶⁾は、不減衰自由振動の厳密解がヤコビの楕円関数で表される3種類の非線形系を取扱い、その楕円関数を母解として調和外力と粘性減衰が作用するときの定常振動解を求める手法を提案して

* 原稿受付 2001年10月19日。

^{*1} 正員, 九州大学大学院工学研究院(〒812-8581 福岡市東区箱崎6-10-1)。

^{*2} 正員, 宮崎大学工学部(〒889-2192 宮崎市学園木花台西1-1)。

^{*3} 富士通九州システムエンジニアリング(〒814-8589 福岡市早良区百道浜2-2-1)。

E-mail: t-kondou@mech.kyushu-u.ac.jp

いる。上記の課題からすれば、このタイプの改良法には大きな可能性があると考えられるが、現状では適用対象が限定されるだけでなく、近似解の計算に要する労力に比して十分な精度が得られないものが多い⁷⁾。

そこで、本報では、従来よりも比較的簡便で汎用性の高い計算手続きにより、かなり広範な非線形系の定常周期解を高精度で計算し得るような、ヤコビの楕円関数を母解とする平均法を提案する。以後これを楕円型平均法と呼ぶ。楕円型平均法は、解析の対象とする微分方程式中に変位に関する1次と3次の復元力が含まれるような非線形系全般に対して適用可能であるが、本報では基本概念の明確化のために、最も基本的な cn 関数を母解とする場合の解析方法を示す。また、得られた近似解に対する安定判別法についても提案する。さらに、主に漸硬ダフティング型方程式を解析例として取扱い、シューティング法⁸⁾による高精度の数値解との比較を通して、楕円型平均法の有効性を検証する。

2. cn 関数を母解とする楕円型平均法

2.1 基礎式および自由振動の厳密解 本報では、次のような漸硬型の不減衰ダフティング方程式に基づく周期系の非線形常微分方程式を解析の対象とする。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + x + x^3 &= \varepsilon f(\omega t, x, \dot{x}) \\ f(\omega t, x, \dot{x}) &= f(\omega t + 2\pi, x, \dot{x}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 x は変位を表す無次元変数、 t および ω はそれぞれ時間および角振動数を表すパラメータであり、“ $\cdot$ ” は t に関する微分を示す。また、 ε はダフティング方程式に対する摂動項 f の大きさを表す微小パラメータである。式(1)には奇数次のみのフーリエ級数で表されるような奇数次解が存在するものとする。

式(1)で $\varepsilon = 0$ と置いたダフティング方程式：

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0 \dots\dots\dots (2)$$

は、漸硬型ばね特性を有する強非線形系の不減衰自由振動を記述する代表的な方程式であり、その厳密解 $\hat{x}(t)$ は次式で与えられる⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{A} \text{cn}(\hat{v}, \hat{k}) \\ \hat{v} &= \hat{\alpha}(\hat{\omega} t + \hat{\theta}), \quad \hat{\alpha} = \frac{2K(\hat{k})}{\pi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $K = K(k)$ は第1種完全楕円積分、 k ($0 \leq k < 1$) は楕円積分の母数であり、厳密解の振幅 $\hat{A}$ 、その角振動数 $\hat{\omega}$ および母数 $\hat{k}$ の3定数間の関係は、

$$\left. \begin{aligned} \hat{\alpha}^2 \hat{\omega}^2 (2\hat{k}^2 - 1) + 1 &= 0 \\ \hat{A}^2 - 2\hat{\alpha}^2 \hat{\omega}^2 \hat{k}^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

となる。また位相角 $\hat{\theta}$ は任意の値を取り得る。

2.2 摂動系に対する近似解の仮定 式(1)において $\varepsilon \neq 0$ とした摂動系の定常周期解を平均法により求め

るため、 $\varepsilon = 0$ の場合の厳密解 [式(3)] を母解として利用する。

式(3)を参考に、式(1)の解を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A \text{cn}(v, k) \\ \dot{x}(t) &= -A\alpha\omega \text{sn}(v, k) \text{dn}(v, k) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、

$$v = \alpha(\omega t + \theta), \quad \alpha = \frac{2K(k)}{\pi} \dots\dots\dots (6)$$

であり、未知変数は振幅 $A = A(t)$ 、位相角 $\theta = \theta(t)$ 、楕円関数の母数 $k = k(t)$ の3個である。 $\varepsilon \neq 0$ の摂動系の場合には、これらはいずれも一般に時間 t の関数である [式(4)から分かるように、 k は A と関係する量であるので、 A を時間の関数とみなす以上、 k も時間の関数と考えるのが自然である]。ただし、定常振動状態ではこれらはいずれも定数となり、 $x = x(t)$ は t に関して周期 $2\pi/\omega$ 、 v に関して周期 $4K$ の関数となる。

なお、以下の議論では、式表現の簡単化のため、ヤコビの楕円関数 $\text{sn}(v, k)$ 、 $\text{cn}(v, k)$ および $\text{dn}(v, k)$ をそれぞれ sn 、 cn および dn と略記する。

2.3 時間微分公式 まず、のちの計算に必要な時間 t に関する微分公式を導出する。

$$\frac{dK}{dk} = \frac{1}{k} \left\{ \frac{E}{(k')^2} - K \right\} \dots\dots\dots (7)$$

であること¹⁰⁾に注意すると、 $v = 2K(\omega t + \theta)/\pi$ の時間微分は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{k}{k'} \left\{ \frac{E}{(k')^2} - K \right\} u + K(\omega + \dot{\theta}) \right] \\ u &= \omega t + \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $k' = \sqrt{1 - k^2}$ は補母数、 $E = E(k)$ は第2種完全楕円積分である。仮定により、振幅 A 、位相角 θ および母数 k はいずれも時間 t の関数であること、および式(8)の関係を考慮すると、時間微分の公式は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \dot{A} \frac{\partial}{\partial A} + \dot{k} \frac{\partial}{\partial k} \\ &+ \frac{2}{\pi} \left[\frac{k}{k'} \left\{ \frac{E}{(k')^2} - K \right\} u + K(\omega + \dot{\theta}) \right] \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned} \right\} \dots\dots (9)$$

2.4 平均化方程式の導出 式(9)の時間微分公式を利用して、式(5)の第1式を時間 t に関して微分することにより、次式を得る。

$$\dot{x} = \dot{A} \text{cn} - A\alpha(\omega + \dot{\theta}) \text{sn} \text{dn} + \dot{k} \frac{A\varphi_1}{k(k')^2} \dots\dots\dots (10)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= Z \text{sn} \text{dn} - k^2 \text{sn}^2 \text{cn} \\ Z &= Z(v, k) = \bar{E}(v, k) - \frac{E(k)}{K(k)} v \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

であり、 $\bar{E}(v, k)$ は第2種楕円積分を示す。式(10)と式

(5)の第2式とを比較すると、次の関係式を得る。

$$\dot{A}cn - \dot{\theta}A\alpha sn dn + \dot{k} \frac{A\varphi_1}{k(k')^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

一方、式(5)の第2式を時間微分することにより、

$$\ddot{x} = -\dot{A}\alpha\omega sn dn + A\alpha^2\omega(\omega + \dot{\theta})\varphi_2 - \dot{k} \frac{A\alpha\omega\varphi_3}{k(k')^2} \quad \dots\dots\dots(13)$$

を得る。ここに、 φ_2, φ_3 は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= cn(2k^2 sn^2 - 1) \\ \varphi_3 &= \left(\frac{E}{K} - 1 \right) sn dn + 2k^2 sn cn^2 dn + Z\varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(14)$$

結局、式(5), (13)を式(1)へ代入して整理することによって、次式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} &\dot{A}\alpha\omega sn dn - \dot{\theta}A\alpha^2\omega\varphi_2 + \dot{k} \frac{A\alpha\omega\varphi_3}{k(k')^2} \\ &= -\varepsilon f(u - \theta, A cn, -A\alpha\omega sn dn) + \eta \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\eta = \left\{ \alpha^2\omega^2(2k^2 - 1) + 1 \right\} A cn + (A^2 - 2\alpha^2\omega^2 k^2) A cn^3 \quad \dots\dots\dots(16)$$

ところで、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき明らかに $A \rightarrow \bar{A}$, $k \rightarrow \bar{k}$ であるから、式(4)の関係を考慮すれば、 ε が微小のとき式(16)の $A cn$ および $A cn^3$ の係数はいずれも微小量となる。よって、式(15)の右辺は微小量となるので、 $\dot{A}$, $\dot{\theta}$, $\dot{k}$ も微小量（時間に関してゆっくりと変化する関数）とみなすことができる。したがって、これらの量に対して通常の方法と同様の平均化処理を施すことが可能である。ところが、今の場合には、未知変数が A , θ , k の3個であるのに対し、これら3変数の間の関係式が式(12)および式(15)の2本しか存在しないので、求解問題としては不適である。そこで、この問題に対処するために、まず式(12), (15)から $\dot{A}$, $\dot{\theta}$, $\dot{k}$ をそれぞれ個別に消去することによって3本の関係式を求める。次に、短い時間範囲内では A , θ , k を定数とみなせるので、これら3本の関係式を $u (= \pi v / 2K = \omega t + \theta)$ に関して1周期 ($0 \sim 2\pi$) にわたって平均化し、3本の独立な平均化方程式を導出する。これが本報で提案する楕円型平均法のキーポイントである。

平均化処理を行う過程で、楕円関数のフーリエ級数展開 (q 展開⁽¹¹⁾) が重要な役割を果たす。これらがどのような項に展開されるか、以下の議論に必要なものを整理すると、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} cn, \varphi_1, \varphi_2 &: \cos(2m-1)u \\ sn, sn dn, \varphi_3 &: \sin(2m-1)u \\ dn &: \cos 2mu, Z: \sin 2mu \end{aligned} \right\} (m=1, 2, 3, \dots) \quad (17)$$

以下の式中において“ $-$ ”が付された変数や記号は、平均化処理が施された量であることを示す。また、 $\bar{K} = K(\bar{k})$, $\bar{E} = E(\bar{k})$, $\bar{\alpha} = \alpha(\bar{k}) = 2\bar{K}/\pi$ である。

まず、式(12), (15)から $\dot{A}$ を消去したのちに、式(17)

の性質と三角関数の直交性を考慮して、 u に関して1周期にわたる平均化を行うと、

$$\bar{\theta} \bar{A} \omega \bar{\Psi}_1 + \bar{A} \omega^2 \bar{\Psi}_2 + \bar{A} \bar{\Psi}_3 + \bar{A}^3 \bar{\Psi}_4 = \varepsilon \bar{H}_1 \quad \dots\dots(18)$$

が求められる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Psi}_1 &= \Psi_1(\bar{k}) = \bar{\alpha}^2 \int_0^{2\pi} (\varphi_2 cn - sn^2 dn^2) du \\ \bar{\Psi}_2 &= \Psi_2(\bar{k}) = \bar{\alpha}^2 \int_0^{2\pi} \varphi_2 cn du \\ \bar{\Psi}_3 &= \Psi_3(\bar{k}) = \int_0^{2\pi} cn^2 du \\ \bar{\Psi}_4 &= \Psi_4(\bar{k}) = \int_0^{2\pi} cn^4 du \\ \bar{H}_1 &= H_1(\bar{A}, \bar{\theta}, \bar{k}) \\ &= \int_0^{2\pi} f(u - \bar{\theta}, \bar{A} cn, -\bar{A} \omega \bar{\alpha} sn dn) cn du \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

次に、式(12), (15)から $\dot{\theta}$ を消去したのちに同様の操作を行うことにより、次式が求められる。

$$\bar{A} \omega \bar{\Psi}_5 + \bar{k} \bar{A} \omega \bar{\Psi}_6 = \varepsilon \bar{H}_2 \quad \dots\dots\dots(20)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Psi}_5 &= \Psi_5(\bar{k}) = \frac{1}{\bar{\alpha}} \bar{\Psi}_1 \\ \bar{\Psi}_6 &= \Psi_6(\bar{k}) = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{k}(\bar{k}')^2} \int_0^{2\pi} (\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_3 sn dn) du \\ \bar{H}_2 &= H_2(\bar{A}, \bar{\theta}, \bar{k}) \\ &= \int_0^{2\pi} f(u - \bar{\theta}, \bar{A} cn, -\bar{A} \omega \bar{\alpha} sn dn) sn dn du \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(21)$$

さらに、式(12), (15)から $\dot{k}$ を消去したのちに同様の操作を行うことにより、次式が求められる。

$$\bar{\theta} \bar{A} \omega \bar{\Psi}_7 + \bar{A} \omega^2 \bar{\Psi}_8 + \bar{A} \bar{\Psi}_9 + \bar{A}^3 \bar{\Psi}_{10} = \varepsilon \bar{H}_3 \quad \dots\dots(22)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Psi}_7 &= \Psi_7(\bar{k}) = \bar{\alpha} \bar{k}(\bar{k}')^2 \bar{\Psi}_6 \\ \bar{\Psi}_8 &= \Psi_8(\bar{k}) = \bar{\alpha}^2 \int_0^{2\pi} \varphi_1 \varphi_2 du \\ \bar{\Psi}_9 &= \Psi_9(\bar{k}) = \int_0^{2\pi} \varphi_1 cn du \\ \bar{\Psi}_{10} &= \Psi_{10}(\bar{k}) = \int_0^{2\pi} \varphi_1 cn^3 du \\ \bar{H}_3 &= H_3(\bar{A}, \bar{\theta}, \bar{k}) \\ &= \int_0^{2\pi} f(u - \bar{\theta}, \bar{A} cn, -\bar{A} \omega \bar{\alpha} sn dn) \varphi_1 du \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(23)$$

以上により、 $\bar{A}$, $\bar{\theta}$, $\bar{k}$ に関する3本の平均化方程式が求められた。

さて、定常周期振動では $\bar{A} = \bar{\theta} = \bar{k} = 0$ なので、その状態における $\bar{A}$, $\bar{k}$, $\bar{\theta}$ を求めるための方程式は、式(18), (20), (22)より次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} \omega^2 \bar{\Psi}_2 + \bar{A} \bar{\Psi}_3 + \bar{A}^3 \bar{\Psi}_4 &= \varepsilon \bar{H}_1 \\ \varepsilon \bar{H}_2 &= 0 \\ \bar{A} \omega^2 \bar{\Psi}_8 + \bar{A} \bar{\Psi}_9 + \bar{A}^3 \bar{\Psi}_{10} &= \varepsilon \bar{H}_3 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(24)$$

式(24)は、 $\bar{A}$, $\bar{\theta}$, $\bar{k}$ に関する非線形代数方程式であるから、これをニュートン法などの数値解法を利用して

解くことによって、式(1)の定常周期振動の近似解が求められる。

なお、式(19), (21), (23)に示したように、式(24)中の $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3$ は、解析の対象とする個々の振動系ごとに定義される関数であり、式(1)の右辺の摂動項 f に依存してその結果が変化する。一方、 $\bar{\Psi}_1 \sim \bar{\Psi}_{10}$ はすべて母数 $\bar{k}$ のみの関数であり、 f に依存しない。しかもこれらは解析的に求めることが可能であり、その結果は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Psi}_1 &= \frac{16\bar{K}^2}{3\pi\bar{k}^2} \bar{F}_1, \quad \bar{\Psi}_2 = \frac{\bar{\Psi}_1}{2} \\ \bar{\Psi}_3 &= \frac{2\pi}{\bar{k}^2} \left\{ \frac{\bar{E}}{\bar{K}} - (\bar{k}')^2 \right\} \\ \bar{\Psi}_4 &= \frac{2\pi}{3\bar{k}^4} \left\{ 2(2\bar{k}^2 - 1) \frac{\bar{E}}{\bar{K}} + (2 - 3\bar{k}^2)(\bar{k}')^2 \right\} \\ \bar{\Psi}_5 &= \frac{8\bar{K}}{3\bar{k}^2} \bar{F}_1, \quad \bar{\Psi}_6 = \frac{4\bar{K}}{3\bar{k}^3(\bar{k}')^2} \bar{F}_2, \quad \bar{\Psi}_7 = \frac{8\bar{K}^2}{3\pi\bar{k}^2} \bar{F}_2 \\ \bar{\Psi}_8 &= \frac{\bar{\Psi}_7}{2}, \quad \bar{\Psi}_9 = -\frac{\pi}{\bar{k}^2} \left\{ \frac{\bar{E}^2}{\bar{K}^2} - (\bar{k}')^2 \right\} \\ \bar{\Psi}_{10} &= \frac{\pi}{3\bar{k}^4} \left\{ (1 - 2\bar{k}^2) \frac{\bar{E}^2}{\bar{K}^2} + 2(\bar{k}')^2 \frac{\bar{E}}{\bar{K}} - 3(\bar{k}')^4 \right\} \\ \bar{F}_1 &= \Gamma_1(\bar{k}) = (1 - 2\bar{k}^2) \frac{\bar{E}}{\bar{K}} - (\bar{k}')^2 \\ \bar{F}_2 &= \Gamma_2(\bar{k}) = (1 - 2\bar{k}^2) \frac{\bar{E}^2}{\bar{K}^2} - 4(\bar{k}')^2 \frac{\bar{E}}{\bar{K}} + 3(\bar{k}')^2 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここに、 $\bar{k}' = \sqrt{1 - \bar{k}^2}$ である。

2.5 通常平均法との関係 ヤコビの楕円関数および第1種、第2種完全楕円積分は、母数が $k=0$ のとき $\text{sn}(u, 0) = \sin u$, $\text{cn}(u, 0) = \cos u$, $\text{dn}(u, 0) = 1$, $Z(u, 0) = 0$ および $K(0) = E(0) = \pi/2$ となる。このとき、式(5)の母解は $x = A \cos u$ および $\dot{x} = -A \omega \sin u$ となり、通常平均法に一致する。また、 k が微小のとき $\bar{E}/\bar{K} = 1 - \bar{k}^2/2 - \bar{k}^4/16 + o(\bar{k}^6)$ であることおよび式(25)の関係に注意して、式(24)に対して $k \rightarrow 0$ の極限計算を行うと、第1式および第2式はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (1 - \omega^2) \bar{A} + \frac{3}{4} \bar{A}^3 \\ = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u - \bar{\theta}, \bar{A} \cos u, -\bar{A} \omega \sin u) \cos u du \\ \int_0^{2\pi} f(u - \bar{\theta}, \bar{A} \cos u, -\bar{A} \omega \sin u) \sin u du = 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式(26)は三角関数を母解とする通常平均法による定常周期解の決定方程式と一致している。また、 $\bar{k} \rightarrow 0$ のとき $\bar{\Psi}_8, \bar{\Psi}_9, \bar{\Psi}_{10}, \bar{H}_3 \rightarrow 0$ なので、式(24)の第3式は恒等的に成立する。このように、本報で提案した cn 関数を母解とする楕円型平均法は、三角関数を母解とする

通常平均法を拡張した解法となっている。

2.6 適用限界に関する注意 式(1)の右辺の摂動項 f が、次式のような変位に関する偶数べきの関数で表される場合を考える。

$$f = x^{2n} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (27)$$

このとき、 $\bar{H}_1 \sim \bar{H}_3$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_1 &= \bar{A}^{2n} \int_0^{2\pi} \text{cn}^{2n+1} du = 0 \\ \bar{H}_2 &= \bar{A}^{2n} \int_0^{2\pi} \text{sn cn}^{2n} \text{dn} du = 0 \\ \bar{H}_3 &= \bar{A}^{2n} \int_0^{2\pi} \text{cn}^{2n} (Z \text{sn dn} - \bar{k}^2 \text{sn}^2 \text{cn}) du = 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

したがって、偶数べき項の影響は $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3$ に全く反映されない。このように、本手法を偶数べきの成分を有する系に適用した場合には、通常平均法と同様に偶数べきの影響が無視されてしまい、計算精度が大きく損なわれることに注意を要する。これは、偶数べき項を含む系では一般に非奇数次解（偶数次をも含むフーリエ級数で表される解）が存在するのに対し、式(5)の母解が奇数次のみのフーリエ級数しか含まないことに対応している。

2.7 安定判別 楕円型平均法によれば、安定解、不安定解ともに原理的には全く同等に求められる。したがって、得られた近似解に対して必ず安定判別を行う必要がある。定常周期解の安定性は、式(18), (20), (22)の変分方程式から判別される。

定常周期解に対する $\bar{A}, \bar{\theta}, \bar{k}$ の微小変分をそれぞれ $\delta A, \delta \theta, \delta k$ とすれば、式(18), (20), (22)の変分方程式は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \omega \bar{A} \bar{\Psi}_1 \delta \theta &= \bar{X}_{11} \delta A + \bar{X}_{12} \delta \theta + \bar{X}_{13} \delta k \\ \omega \bar{\Psi}_5 \delta A + \omega \bar{A} \bar{\Psi}_6 \delta k &= \bar{X}_{21} \delta A + \bar{X}_{22} \delta \theta + \bar{X}_{23} \delta k \\ \omega \bar{A} \bar{\Psi}_7 \delta \theta &= \bar{X}_{31} \delta A + \bar{X}_{32} \delta \theta + \bar{X}_{33} \delta k \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_{11} &= \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{A}} - \omega^2 \bar{\Psi}_2 - \bar{\Psi}_3 - 3\bar{A}^2 \bar{\Psi}_4, \quad \bar{X}_{12} = \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{\theta}} \\ \bar{X}_{13} &= \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{k}} - \omega^2 \bar{A} \frac{d\bar{\Psi}_2}{d\bar{k}} - \bar{A} \frac{d\bar{\Psi}_3}{d\bar{k}} - \bar{A}^3 \frac{d\bar{\Psi}_4}{d\bar{k}} \\ \bar{X}_{21} &= \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial \bar{A}}, \quad \bar{X}_{22} = \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial \bar{\theta}}, \quad \bar{X}_{23} = \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial \bar{k}} \\ \bar{X}_{31} &= \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_3}{\partial \bar{A}} - \omega^2 \bar{\Psi}_8 - \bar{\Psi}_9 - 3\bar{A}^2 \bar{\Psi}_{10}, \quad \bar{X}_{32} = \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_3}{\partial \bar{\theta}} \\ \bar{X}_{33} &= \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_3}{\partial \bar{k}} - \omega^2 \bar{A} \frac{d\bar{\Psi}_8}{d\bar{k}} - \bar{A} \frac{d\bar{\Psi}_9}{d\bar{k}} - \bar{A}^3 \frac{d\bar{\Psi}_{10}}{d\bar{k}} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

変分方程式(29)の解を次のように仮定する。

$$\delta A = \delta \bar{A} e^{\lambda t}, \quad \delta \theta = \delta \bar{\theta} e^{\lambda t}, \quad \delta k = \delta \bar{k} e^{\lambda t} \quad (31)$$

式(31)を式(29)に代入し、 $\delta \bar{A}, \delta \bar{\theta}, \delta \bar{k}$ (いずれも定数) が非自明な解を持つための条件を考慮すれば、特性根

λ の決定方程式として次式を得る.

$$\begin{vmatrix} \bar{X}_{11} & \bar{X}_{12} - \lambda \omega \bar{A} \bar{\Psi}_1 & \bar{X}_{13} \\ \bar{X}_{21} - \lambda \omega \bar{\Psi}_5 & \bar{X}_{22} & \bar{X}_{23} - \lambda \omega \bar{A} \bar{\Psi}_6 \\ \bar{X}_{31} & \bar{X}_{32} - \lambda \omega \bar{A} \bar{\Psi}_7 & \bar{X}_{33} \end{vmatrix} = 0$$

.....(32)

式(32)は λ に関する2次方程式であり, 特性根 λ の実部がともに負であれば定常周期解は安定, どちらか一方でも正であれば不安定と判別される.

3. 数値計算例

3.1 計算モデルおよび付帯事項 本報で提案した楕円型平均法の有効性を, 非線形振動系の代表的モデルである漸硬型の強制ダフティング方程式を対象として検証する. 粘性減衰を有し, 調和外力が作用する無次元化ダフティング方程式の f は, 一般性を失うことなく次式のように表される.

$$f(\omega t, x, \dot{x}) = F \cos \omega t - c \dot{x} \quad \text{.....(33)}$$

ここに, F, ω は強制力の振幅と角振動数, c は減衰係数を代表するパラメータである. 以下, $F=1.0, c=0.2$ とした場合の計算結果を示す.

式(33)の f に対しては, 楕円関数の q 展開公式を利用することにより $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3$ を解析的に計算することが可能であり, 結果は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_1 &= \frac{2\pi^2}{kK} \frac{\bar{q}^{1/2}}{1+\bar{q}} F \cos \bar{\theta} \\ \bar{H}_2 &= \frac{\pi^3}{kK^2} \frac{\bar{q}^{1/2}}{1+\bar{q}} F \sin \bar{\theta} \\ &\quad + \frac{4}{3k^2} \{ (2\bar{k}^2 - 1)\bar{E} + (\bar{k})^2 \bar{K} \} \omega c \bar{A} \\ \bar{H}_3 &= \pi (\bar{w} - \bar{k}^2 \bar{v}) F \cos \bar{\theta} \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(34)}$$

ここに, $\bar{q} = \exp\{-\pi K(\bar{k})/K(\bar{k})\}$ であり,

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= (1 - \bar{\alpha}^{-2}) \frac{\pi}{k^3 K} \frac{\bar{q}^{1/2}}{1+\bar{q}} \\ \bar{w} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\beta}_m (\bar{\gamma}_m - \bar{\gamma}_{1-m}) \\ \bar{\beta}_m &= \frac{\pi^2}{kK^2} (2m-1) \frac{\bar{q}^{m-1/2}}{1+\bar{q}^{2m-1}} \\ \bar{\gamma}_m &= \frac{2\pi}{K} \frac{\bar{q}^m}{1-\bar{q}^{2m}}, \quad \bar{\gamma}_0 = 0, \quad \bar{\gamma}_{-m} = -\bar{\gamma}_m \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(35)}$$

ところで, 任意の摂動項 f に対しては $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3$ の解析的な計算が困難である. そのような場合には数値積分を利用すればよい. 本報の系に対しては, 数値積分を用いることによって全く同様の計算結果が得られることを確認している. また, 定常周期解の決定方程式[式(24)]の求解法としてニュートン法を用いる際に必要となるヤコビ行列の要素や, 安定判別に利用する行列式[式(32)]の要素には, $\bar{A}, \bar{k}, \bar{\theta}$ に関する偏導関

数が必要となるが, これらも解析的に求めることはかなり面倒である. このため, 本報の数値計算においては, これらを数値差分で代用した. このような処理を行うことによって, 汎用性の高いプログラムが作成可能である.

以下では, シューティング法による数値解 x_s および $x_c = A_c \cos(\omega t + \theta_c)$ を母解とする通常の方法による近似解 x_c との比較を通して, 本手法の有効性を検証する. シューティング法の数値積分にはルンゲ・クッタ・ギル法利用し, 1周期を1024分割して計算した. このとき, シューティング法による数値解 x_s は, ほぼ正解とみなして良い程度の十分な精度を有していることを確認している. 一方, 通常の方法による定常周期解の振幅 $\bar{A}_c$ と位相 $\bar{\theta}_c$ は, 次式より求められる.

$$\left. \begin{aligned} (1 - \omega^2) \bar{A}_c + \frac{3}{4} \bar{A}_c^3 &= F \cos \bar{\theta}_c \\ \bar{\theta}_c &= -\sin^{-1} \left(\frac{\omega c \bar{A}_c}{F} \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(36)}$$

また, 式(36)から得られた x_c に対する安定判別は, 2.7節と類似の方法によった.

3.2 周波数応答 図1に $\varepsilon=1.0$ としたときの主共振領域における振幅の周波数応答を示す. 図中の太線および細線は, それぞれ楕円型平均法による近似解 x の振幅 A および三角関数を母解とする通常の方法による近似解 x_c の振幅 A_c であり, 実線は安定解, 破線は不安定解, □印はサドル・ノード分岐に基づく安定・不安定境界を示す. また, 一点鎖線は自由振動の振幅であり, シューティング法による高精度数値解の最大振幅 x_s を○(安定解)と●(不安定解)で示している.

図1から, 楕円型平均法による近似解はシューティング法による数値解と極めてよく一致しており, 通常の方法による近似解よりも計算精度がかなり改善されていることが確認できる. ただし, 1項近似では従来の平均法と同様に楕円型平均法によっても高調波共振解を求めることは不可能であり, 高調波共振の発生する低振動数領域では, 近似解の計算精度は悪化する. また, 楕円型平均法および従来の平均法ともに, いわゆる周波数応答曲線の垂直接線部(サドル・ノード分岐点)が安定・不安定の境界となっている. この結果は, シューティング法の結果と一致している.

3.3 計算精度の比較 楕円型平均法によれば, 基本波成分だけでなく高調波成分が求められる. その計算精度を, シューティング法による数値解を基準として, 次式で定義される最大値の相対誤差 $E_{\max}$ とrms誤差 E_{rms} によって評価する.

$$E_{\max} = \frac{|A - X_s|}{X_s} \quad \text{.....(37)}$$

Fig. 1 Frequency response of amplitude

Fig. 2 Relative error of maximum amplitude

Fig. 3 Error of root mean square value

$$E_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \{(a_n - a_{s,n})^2 + (b_n - b_{s,n})^2\}} \quad (38)$$

ここに、式(37)の X_s はシューティング法で得られた数値解の最大振幅、式(38)の $a_{s,n}$, $b_{s,n}$ はFFTにより求めた数値解の n 次の余弦及び正弦フーリエ係数である。また、 a_n , b_n は楕円型平均法による近似解のフーリエ係数である。従来の平均法による近似解に対しても同様の誤差評価を行った。

図2および3に E_{max} と E_{rms} の結果を示す。線種の意味は図1と同様である。これらの図から、楕円型平均法による近似解は、従来の平均法と比較して計算精度が大幅に改善されていることがわかる。とくに主共振領域での精度改善効果が著しい。なお、図2において E_{max} が局所的に鋭い谷を示しているが、これは、 A と X_s とが一致する点であり、この点において E_{max} は零となる。ただし、厳密解が得られた訳ではない。

次に、楕円型平均法による近似解の高調波成分の計算結果(太線)を、シューティング法による計算結果(○, ●および細線)と比較する。図4に両者の1次から9次までの奇数次調波振幅($A_1 \sim A_9$)を示した。周知のように、漸硬型ダフティング方程式の主共振領域の解は奇数次調波のみからなる奇数次解であり⁽¹²⁾, cn 関

Fig. 4 Frequency response of fundamental and higher harmonic amplitudes

数を用いた楕円型平均法の近似解もまた奇数次解である。図4から、基本波だけでなく奇数次高調波の振幅もまた、主共振域における楕円型平均法の安定解はシューティング法の結果と非常によく一致していることがわかる。しかしながら、高調波共振が発生する低振動数域では各調波成分ともに誤差が急激に増大する。

次に、 $F=1.0$, $\omega=1.4$ として、ダフリング方程式に対する摂動項の大きさを表す ε を変化させたときの $E_{\max}$ と E_{rms} の結果を図5, 6に示す。両図より、 ε の値が小さくなるにつれて、楕円型平均法による近似解の計算精度は向上するのに対して、従来の平均法による近似解ではほとんど向上しないことが見て取れる。

3.4 振動波形の比較 図7に主共振領域($\omega=2.0$)

Fig. 5 Influence of ε on relative error of maximum amplitude

Fig. 6 Influence of ε on relative error of root mean square value

および低振動数領域($\omega=0.6$)における安定解の振動波形を示した。この図においても線種の意味は図1と同様である。楕円型平均法による近似解は、最大振幅のみならず波形の微妙な歪みにいたるまで、シューティング法による計算結果と極めてよく一致している。

3.5 ダフリング-ファン・デル・ポール系に対する適用 前節で示した単純なダフリング方程式以外の系への適用例として、減衰項をファン・デル・ポール型の実非線形減衰項に変更したダフリング-ファン・デル・ポール系に対する数値計算結果を示す。このとき、式(1)の f は次式のように表される。

$$f(\omega t, x, \dot{x}) = F \cos \omega t + c(1-x^2)\dot{x} \quad \dots\dots\dots (39)$$

上式中の c の値を $c=0.95$ および $c=1.0$ と置いたときの(最大)振幅の周波数応答曲線を、それぞれ図8(a)および図8(b)に示す。ただし、両図ともに $F=1.0$ である。図中の△印は、ホップ分岐に基づく安定・不安定境界を表す。図8(a)の $c=0.95$ のときには、従来の平均法の計算結果では主共振領域において安定と不安定解よりなる孤立した島状の分枝が存在し、シューティング法の結果と大きく異なっている。一方、楕円型平均法の結果はシューティング法の結果とよく一致しており、このような島状の分枝は存在しない。図8(b)のように $c=1.0$ となると、いずれの結果ともに対応曲線には島状の分枝が存在するようになるが、従来の平均法の結果はシューティング法の結果に対して大きな誤差を生じている。このように、比較的大きな非線形減衰項を有するダフリング-ファン・デル・ポール系においても、楕円型平均法によれば従来の平均法よりも高精度の近似解が求められることが確認された。

Fig. 7 Wave form

Fig. 8 Frequency response of amplitude

この系に対する 2・7 節で示した安定判別の結果は、垂直接線部（サドル・ノード分岐点）の安定・不安定境界についてはシューティング法の結果とよく一致している。しかしながら、応答曲線の垂直接線部以外の中腹部に存在するホップ分岐点に関しては、安定・不安定境界の位置に若干の誤差が生じている。一方、楕円型平均法により近似解自体は高精度で求められているので、シューティング法と同様に式(1)の変分方程式から近似解の無限小安定性を高精度で判別したところ、ホップ分岐点もまたシューティング法の結果とよく一致することを確認している。この事実から、2・7 節の安定判別法が部分的に十分な解析精度を有していないのは、近似解の精度と安定判別の精度との不整合に起因するものと推察されるが、この原因の解明については今後の課題としたい。

なお、図 8 の計算結果は摂動項を比較的大きくしたときの結果を示したものである。図示のように、単純なダフリング方程式に対する結果と比較すると、楕円型平均法の計算精度がやや悪化している。この改善法については別報で議論する。

4. 結 言

強い非線形性をもつ強制振動系に対する平均法の高精度化を目指して、ヤコビの楕円関数を母解とする楕円型平均法および得られた近似解に対する安定判別法を提案した。具体的な適用例として、漸硬型ダフリング方程式およびダフリング・ファン・デル・ポル系の定常周期解の計算結果を示すとともに、従来の三角関数を母解とする平均法による近似解およびシューティング法による高精度の数値解との比較を通して、楕円型平均法の有効性を実証した。

楕円型平均法は一見かなり複雑な計算を必要とするように思われるが、未定変数である振幅 A 、位相 θ 、楕円関数の母数 k の決定方程式〔式(24)〕中の $\Psi_1 \sim \Psi_{10}$ は対象とする振動系によらない k のみの関数であり、対象系ごとに $H_1 \sim H_3$ のみの計算を行えばよい。この計算に数値積分を利用すれば比較的容易に種々の振動系への適用が可能である。このように、強非線形系に対する高精度の近似解が解析関数で表されると、種々の力学系分野において解析的手法の応用が可能となり、その特性の解明に大きく寄与することが期待される。

本報では、紙幅の都合で楕円型平均法の基本的なアイデアを提示するに止めたが、今後は、ダフリング系以外のより一般的な系や多自由度系等への適用を図ることによって、解法としての信頼性と完成度を高めていきたいと考えている。

文 献

- (1) 前澤, 非線形常微分方程式, (昭 44), 268, ダイヤモンド社.
- (2) Cap, F. F., Int. J. Non-linear Mech., 9 (1974), 441.
- (3) Barkham, P. G. D. and Soudack, A. C., Int. J. Control, 10 (1969), 377.
- (4) Yuste, S. B. and Bejarano, J. D., Int. J. Control, 49-4 (1989), 1127.
- (5) Yuste, S. B. and Bejarano, J. D., J. Sound Vib., 139-1 (1990), 151.
- (6) Roy, R. V., Int. J. Non-linear Mech., 29-5 (1994), 737.
- (7) 岡部・近藤, 九州大学工学集報, 69-6 (1996), 795.
- (8) 近藤・矢ヶ崎, 機論, 61-583, C(1995), 746.
- (9) McLachlan, N. W., Ordinary Nonlinear Differential Equations, (1956), 39, Oxford Press.
- (10) Byrd, P. D. and Friedman, M. D., Handbook of Elliptic Integrals for Engineer and Scientists, (1971), 282, Springer-Verlag.
- (11) 機械工学便覧, (昭 50), A2-23, 日本機械学会.
- (12) 近藤・ほか 2 名, 機論, 51-466, C(1985), 1180.