変位加振による振動系の昇降運動*

中野 健^{*1}, 川東 秀登^{*2}, 佐藤 勇一^{*3}

Climb Up/Down Motion of a Vibrating System by Displacement Excitation

Ken NAKANO^{*4}, Hideto KAWAHIGASHI and Yuichi SATO^{**}Graduate School of Environment and Information Sciences, Yokohama National University,
79-7 Tokiwadai, Hodogaya-ku, Yokohama-shi, Kanagawa, 240-8501 Japan

Motion of a vibrating system attached to a vertical shaft with a small clearance is examined experimentally. When the shaft is still, the vibrating system climbs down as well-known. However, the vibrating system climbs up in the case that the shaft is vibrated sinusoidally with adequate amplitude and frequency. When the vibrating system climbs up, its motion is entrained to the shaft vibration and the frequency ratio of the vibrating system to the shaft is 1/1 or 1/2. Calculated results based on a simplified model with three degrees of freedom agree well with experimental results not only qualitatively but also quantitatively. The effects of amplitude and frequency of the shaft vibration and the mechanism of the climbing-up motion is also discussed.

Key Words: Forced Self-Excited System, Nonlinear Vibration, Entrainment, Synchronization, Mechanism

1. 緒 言

自励系に対して振動的な外力を加えた強制自励系は, さまざまな非線形振動が現れる興味深い系である。過去にも摩擦振動系^{(1)~(6)}や時間遅れ系⁽⁷⁾⁽⁸⁾を対象とした研究などがなされており, 高調波振動, 分数調波振動, 超分数調波振動の発生や, 概周期振動, カオスの存在などが明らかになっている。

本研究では, 自励系の身近な例として有名な『キツツキの玩具』の系⁽⁹⁾を考察の対象としている。よく知られるように, 振動系を取付けた鉛直軸が静止した場合には, 振動系は重力による位置エネルギーを振動エネルギーに変換しながら下降し続ける。しかし, この系に振動的な外力や変位を加えた場合の振動系の挙動については, 著者らの知る限り報告がない。

本論文では, 軸を変位加振した場合の振動系の運動について, 実験的検討の結果を述べる。さらに解析的検討の結果に基づき, 振動系の運動メカニズムを考察

する。

2. 実 験

実験装置の概略を図1に示す。実験装置は, 電磁加振器により上下に振動する鉛直な軸と, 2枚のリング, 板ばね, おもりから構成される振動系とからなる。軸の直径 d_s は 8.0 mm, リングの内径 d は 8.7 mm (直径すき間: 0.7 mm), 2枚のリング間距離 h は 5 mm, おもりの取付位置 l は 57 mm である。なお, 振動系の胴部(リング側)を固定して腕部(おもり側)を微小振動させたときの振動数は 13.1 Hz であった。

本実験では, 振幅 a_s , 振動数 f_s で軸を正弦的に加振して, 振動系の運動を観察した。振動系の運動は

Fig. 1 Experimental apparatus

* 原稿受付 2001 年 7 月 12 日。

^{*1} 正員, 横浜国立大学大学院環境情報研究院 (〒240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7)。^{*2} 学生員, 横浜国立大学大学院学生。^{*3} 正員, フェロー, 埼玉大学工学部 (〒338-8570 さいたま市下大久保 255)。

E-mail: nakano@ynu.ac.jp

$$\dot{\phi} = \dot{\phi} \dots\dots\dots (19)$$

ただし、切り替わり直前の変数を z_i, θ, ϕ , 切り替わり直後の変数を z_i', θ', ϕ' とした。

(ii) 状態IIから状態IまたはIIIへの切り替わり

振動系胴部と軸との衝突は完全非弾性的で、切り替わりは瞬間的に生じ、衝突の前後で腕部の点Aまわりの角運動量が保存されるとした。これらの仮定より、接続条件は次式で表される。

$$\dot{z}_i' = \dot{u}_s \dots\dots\dots (20)$$

$$\dot{\theta}' = 0 \dots\dots\dots (21)$$

$$\dot{\phi}' = \{(\dot{z}_i - \dot{z}_i') \cos \phi + a \dot{\theta} \cos(\phi - \theta - \alpha) + l \dot{\phi}\} / l \dots\dots\dots (22)$$

本解析では、以上に示した方程式を Runge-Kutta 法により数値的に解き、振動系の運動の時刻歴応答を求めた。式中の諸量としては、実験系に基づく次の値を用いた。 $m_1: 6 \text{ g}$, $m_2: 4 \text{ g}$, $I_1: 600 \text{ g} \cdot \text{mm}^2$, $d_s: 8.0 \text{ mm}$, $d: 8.8 \text{ mm}$, $h: 4.6 \text{ mm}$, $l: 57 \text{ mm}$, $a_1: 9 \text{ mm}$, $a_2: 3 \text{ mm}$, $k: 0.092 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$ 。主として軸の加振振動数 f_s および加振振幅 a_s をパラメータとして、振動系の運動に及ぼす影響を調べた。

4. 結果および考察

4.1 変位加振なしの場合 まず軸を静止させた場合の検討を行った。初期角変位 $\theta_0 = \theta_{\max}$, $\phi_0 = 45^\circ$ を与えた後の運動の時刻歴応答について、実験結果を図4に示す。これらは系の運動が定常状態となった後の結果であるが、便宜的に横軸 t の始点を零とし、そのときの z_r を零として表示してある。

図4より z_r は階段状に減少し(平均速度: -74.7 mm/s)、 θ と ϕ は周期的に振動している(振動数: 7.3 Hz)。また、それらの振動1周期の間に、 θ と ϕ がともに増加するとき(振り上げ時)、 θ と ϕ がともに

Fig. 4 Experimental results on the free self-excited vibration of the system ($a_s = 0 \text{ mm}$)

減少するとき(振り下げ時)、いずれも z_r は減少するが、その減少量は振り下げ時のほうが大きいことがわかる。

図5に示す計算結果は、定量的には実験結果といくらかの差が認められるが、実験において観察された上記の定性的性質がよく現れている。

4.2 変位加振を与えた場合 次に、軸に変位加振を与えた場合の検討を行った。実験結果を図6に示す。ただし加振振幅は $a_s = 3 \text{ mm}$ とし、加振振動数は (a) $f_s = 12 \text{ Hz}$, (b) $f_s = 17 \text{ Hz}$ である。

まず(a)を見ると、振動系の回転運動を表す角変位 θ と ϕ が、軸の加振変位 u_s と同じ振動数で周期的に変化していることがわかる。このように軸と振動系の運動が同期して、それぞれの周期の比が1:1となる場合を、以後『1/1次同期振動』と呼ぶ。また、軸に対する振動系の相対変位 z_r に着目すると、増加と減少を階段状に繰返していることがわかる。この場合には、 u_s の増加とともに θ と ϕ が増加するとき(振り上げ時)に z_r は増加し、 u_s の減少とともに θ と ϕ が減少するとき(振り下げ時)に z_r は減少している。ただし前者が後者を上回っているために、結果として振動系は上昇している。

一方、加振振動数を(a)の条件よりも高く設定した(b)では、(a)とは異なった運動が現れる。この場合も振動系の運動は軸振動と同期するが、軸と振動系の周期の比は1:2である。これを以後『1/2次同期振動』と呼ぶ。軸に対する振動系の相対変位 z_r は階段状となるが、振り上げ時、振り下げ時のいずれも増加し、振動系は上昇していることがわかる。

図6の両図について平均上昇速度を計算すると、(a) $V = 6.2 \text{ mm/s}$, (b) $V = 61.6 \text{ mm/s}$ となり、1/2次同期振動を示す(b)の場合のほうが1桁程度高い。

Fig. 5 Calculated results on the free self-excited vibration of the system ($a_s = 0 \text{ mm}$)

(a) 1/1-th synchronized vibration ($a_s=3$ mm, $f_s=12$ Hz) (b) 1/2-th synchronized vibration ($a_s=3$ mm, $f_s=17$ Hz)

Fig. 6 Experimental results on the forced self-excited vibration of the system

また、振動系腕部の角変位 ϕ に着目すると、(a)では約 90° という大振幅に対して、(b)では約 20° と小さいことがわかる。本現象を振動搬送機構^{(10)~(14)}に適用する場合には、1/1次同期振動よりも、1/2次同期振動の利用が適切であることを示唆している。

図6に対応する計算結果を示したものが図7である。計算においても $f_s=12$ Hzで1/1次同期振動、 $f_s=17$ Hzで1/2次同期振動が現れている。また、軸と振動系の振動の振幅、位相および相対変位の絶対値など、実験結果と定性的かつ定量的に一致する結果が得

(a) 1/1-th synchronized vibration ($a_s=3$ mm, $f_s=12$ Hz) (b) 1/2-th synchronized vibration ($a_s=3$ mm, $f_s=17$ Hz)

Fig. 7 Calculated results on the forced self-excited vibration of the system

られている。

4.3 加振振幅の影響 加振振動数 f_s を一定としたとき、振動系の平均上昇速度 V に及ぼす加振振幅 a_s の影響を図8に示す。ここで加振振動数は(a) $f_s=12$ Hz, (b) $f_s=17$ Hzである。ただし縦軸の上昇速度は、実験(○印)では運動開始後十分時間が経過後、振動系が50 mmの相対変位を得るまでの時間から算出した。計算(●印)では、軸加振2001周期目以後100周期分の振動系の相対変位から算出した。

まず(a)の結果を見ると、 $a_s < 2.7$ mmの条件で振

動系は下降し ($V < 0$), $a_s \geq 2.7$ mm の条件で振動系は上昇している ($V > 0$). 運動の様子を調べると, $a_s \geq 2.7$ mm では, 図 6(a), 図 7(a) に示したような 1/1 次同期振動が現れていた。

一方, 加振振動数を高く設定した(b)では, $a_s < 1.4$ mm で振動系は下降し ($V < 0$), $a_s \geq 1.4$ mm で振動系は上昇している ($V > 0$). また $a_s \geq 1.4$ mm では, 図 6(b), 図 7(b) に示したような 1/2 次同期振動が現れていた。

図 8 両図の条件ともに, 同期振動が現れる場合には, 加振振幅 a_s の増加に伴い, 平均上昇速度 V は増加している。ただしその増加率は, 1/2 次同期振動が現れる(b)のほうが高い。

4・4 加振振動数の影響 振動系の平均上昇速度 V に及ぼす加振振動数 f_s の影響を図 9 に示す。ただし加振振幅は $a_s = 3$ mm である。

加振振動数 $f_s = 7.5 \sim 20.5$ Hz の範囲で行った実験 (○印) では, 1/1 次同期振動 ($f_s = 9.5 \sim 12.0$ Hz) および 1/2 次同期振動 ($f_s = 14.8 \sim 19.0$ Hz) が観察された。同期振動が発生した条件のうち, $f_s = 11.8 \sim 12.0$

Hz (1/1 次同期振動) および $f_s = 14.8 \sim 19.0$ Hz (1/2 次同期振動) では振動系が上昇した ($V > 0$)。ただし平均上昇速度は, 1/2 次同期振動の場合のほうが 1/1 次同期振動の場合よりも 1 けた程度高い。また, 軸と振動系の運動が同期しない場合には, 振動系の上昇は観察されなかった。

加振振動数 $f_s = 5.0 \sim 25.0$ Hz の範囲で行った計算 (●印) についても, 実験とほぼ同じ加振振動数において, 1/1 次および 1/2 次同期振動が現れた。振動系の平均上昇速度 V の値についても, 実験結果と計算結果の間には, よい一致が見られる。

4・5 同期振動の形態 代表的な加振振動数について, 軸の加振変位 u_s を横軸, 振動系腕部の角変位

Fig. 8 Effects of the excitation amplitude a_s on the mean climbing velocity V ; ○: experimental results, ●: calculated results

Fig. 9 Effects of excitation frequency f_s on mean climbing velocity V ($a_s = 3$ mm); ○: experimental results, ●: calculated results

Fig. 10 Examples of the synchronized vibration between the shaft and the vibrating system (calculated results, $a_s = 3$ mm)

ϕ を縦軸にとり、軸加振 2001 周期目以後 10 周期分の計算結果をプロットすると図 10 が得られる。軸と振動系の運動が同期する場合には、得られる図形は閉曲線となり、その閉曲線の形状から、同期振動の次数を読み取ることができる。同図のように計算では、実験で確認された (a) 1/1 次, (b) 1/2 次同期振動の他に、(c) 1/3 次, (d) 2/3 次などの同期振動が現れた。

4.6 昇降運動のメカニズム 以上に示した実験結果と計算結果の一致から、本解析で用いた 3 自由度モデルは十分妥当であったと考えられる。よって軸に対する振動系の相対運動は、軸と振動系の間に接触がない状態、すなわち状態 II において生じると考えてよい。このとき振動系の昇降運動には、次の 3 種類の要因が考えられる。

- (1) 軸と非接触になる瞬間にもつ振動系の初速度
- (2) 振動系と非接触な状態での軸の変位
- (3) 重力による振動系の落下

上記の要因によって発生する軸と振動系の相対変位を Δz_{r1} , Δz_{r2} , Δz_{r3} とすると、それらは次式で見積もることができる。

$$\Delta z_{r1} = v_0 \Delta t \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\Delta z_{r2} = \Delta u_s \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\Delta z_{r3} = -g \Delta t^2 / 2 \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここで v_0 : 状態 II に切り替わる瞬間にもつ振動系の初速度, Δt : 状態 II の時間, Δu_s : Δt の間における軸の変位を表す。

例として、1/2 次同期振動が発生して振動系が上昇する $a_s = 3 \text{ mm}$, $f_s = 16 \sim 18 \text{ Hz}$ の条件について、 Δz_{r1} , Δz_{r2} , Δz_{r3} を計算した結果を図 11 に示す。ただし (a) は状態 I $\rightarrow$ II $\rightarrow$ III の場合 (振り下げ時), (b) は状態 III $\rightarrow$ II $\rightarrow$ I の場合 (振り上げ時) を表している。振動系の上昇に寄与する支配的な因子は、(a) では初速度 (Δz_{r1} : ○印), (b) では軸の変位 (Δz_{r2} : ●印) であることがわかる。また、各加振振動数 f_s について、両図の Δz_{r1} , Δz_{r2} , Δz_{r3} の値を足し合せると、振動系の振動 1 周期における相対変位とほぼ一致することから、振動系の昇降メカニズムの主要因は、先に挙げた (1) ~ (3) としてよいと考えられる。

5. 結 言

本報では、図 1 に示した系の軸に変位加振を与えた場合の振動系の運動を、実験的・解析的に検討した。その結果、以下の結論を得た。

(a) State I $\rightarrow$ II $\rightarrow$ III

(b) State III $\rightarrow$ II $\rightarrow$ I

Fig. 11 Relative displacement of the vibrating system to the shaft in state II (calculated results, $a_s = 3 \text{ mm}$); ○: by the initial velocity (Δz_{r1}), ●: by the displacement of the shaft (Δz_{r2}), ×: by the gravity (Δz_{r3})

- (1) 軸に変位加振を与えると、軸と振動系の運動が同期して、振動系が上昇する場合がある。
- (2) 振動系に同期振動が生じるためには、ある程度以上の加振加速度が必要である。
- (3) 加振振動数によって、軸と振動系が同じ振動数、あるいは分数次の同期振動が現れる。

文 献

- (1) 井上順吉・ほか 2 名, 機論, 35-274 (1969), 1242-1248.
- (2) 吉武裕・ほか 2 名, 機論, 49-439, C (1983), 298-306.
- (3) 倉本智・ほか 2 名, 機論, 58-552, C (1992), 2348-2356.
- (4) 倉本智・ほか 2 名, 機論, 59-559, C (1992), 665-671.
- (5) 倉本智・ほか 2 名, 機論, 59-563, C (1993), 1999-2006.
- (6) 吉武裕・ほか 3 名, 機論, 61-583, C (1995), 768-774.
- (7) 津田吉広・ほか 4 名, 機論, 52-474, C (1986), 664-671.
- (8) 津田吉広・ほか 3 名, 機論, 53-496, C (1987), 2459-2464.
- (9) 井上喜雄・ほか 8 名, 振動の考え方・とらえ方, (1998), 71, オーム社.
- (10) 谷口修・ほか 3 名, 機論, 28-188 (1962), 485-492.
- (11) 坂口克己・ほか 1 名, 機論, 35-279 (1969), 2183-2189.
- (12) 坂口克己・ほか 1 名, 機論, 38-305 (1972), 103-115.
- (13) 吉村省二・ほか 1 名, 機論, 65-630, C (1999), 449-456.
- (14) 山口秀谷・ほか 1 名, 機論, 65-638, C (1999), 3951-3956.