ゲインスケジュール $\mathcal{H}_\infty$ 制御による
2リンクフレキシブルアームの位置決め・制振制御*坂本 弘道^{*1}, 野波 健蔵^{*2}Gain-Scheduled $\mathcal{H}_\infty$ Control Based System Design
for Positioning and Vibration Control of Two-Link Flexible ArmHiromichi SAKAMOTO and Kenzo NONAMI^{*3}^{*3} Dept. of Electronics and Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Chiba University,
1-33 Yayoi-cho, Inage-ku, Chiba-shi, Chiba, 263-8522 Japan

This study is concerned with the positioning and vibration control of two-link-flexible-arm using Gain-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ control theory based on LMI (Linear Matrix Inequality). It is necessary to control the vibration of the arm tip, because, the link part of robot is elasticity body. And, the robot arm has strong non-linearity by attitude change with turn operation. From these two problems, tip vibration of the arm, and the change of the dynamical system, it is difficult to obtain a satisfactory performance, even if the robot arm is controlled using LTI controller which is designed for one of all states. Then, Gain-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ controller is designed, to obtain a satisfactory control performance of the positioning accuracy and tip vibration in range of motion. The validity of this proposal is experimentally verified using the above mentioned test rig.

Key Words: Gain-Scheduled $\mathcal{H}_\infty$ Control, LMI, Two-Link Flexible Arm Robot, FEM, Experiment Vibration Control, Positioning Control

1. 緒 言

ロボットを含む多くの機械装置において位置決め制御は基本技術で極めて重要であり、高速化、高精度化が要求されている。ロボットアームは広く産業界で用いられているが、それらの多くは手先効果器等が取付けられたアーム先端の位置決め精度を増すために重いアームとして剛性を高めている。しかし、そのために機械装置全体が大型化し作業時に相当なエネルギーが必要になる。また、地球上だけでなく宇宙開発等においてもロボットアームは利用されており、宇宙空間での利用を考えたときには軽量化、省エネルギー化は重要な課題となる。また、エネルギーの問題だけでなく設置場所にも制限が生じる。それに対しアームリンク部の軽量化のために低剛性なものとすれば、消費エネルギーが少なくしかも高速な位置決めが可能となる。しかし低剛性とした結果、アーム先端に振動現象が生じるためにこれを抑制する必要がある。振動とは別の

問題としてロボットアームはその自由度が多いために姿勢変動(アーム旋回動作)による非線形性が強く、地上では重力の影響も考慮に入れる必要がある。この二つの問題、すなわちアームに生じる振動、姿勢変動による状態変化の影響により単一コントローラですべての状態の制御を試みても満足できる性能を得ることは難しい。

ロボットアームに関しては3リンク以上のロボット、双腕ロボット、弾性リンクと剛体リンクの双方を持つものや自由関節を持つものなどさまざまな角度から研究がなされている。2リンクフレキシブルアームに限定してもこれまでにいくつかの研究がなされている。著者らは数値最適化法の一手法である凸最適化法により制御系を設計し、ある程度の姿勢変化に対するロバスト性を示した⁽¹⁾。また、小林らは制御対象を精度良くモデリングし出力フィードバックスライディングモードにより制御を行っている⁽²⁾。また、ロバスト制御だけでなく特異摂動法と呼ばれる手法でのアプローチ⁽³⁾や、振動の起こりにくい旋回動作を行うために目標値を整形する手法も適用されている⁽⁴⁾。

本論文では垂直方向に動作する2リンクフレキシブルアームを制御対象とし、上記で述べた振動と姿勢変動の問題を克服するためにGahinetらが提案した手

* 原稿受付 2001年4月5日。

^{*1} 学生員, 千葉大学大学院(〒263-8522 千葉市稲毛区弥生町1-33)。^{*2} 正員, フェロー, 千葉大学工学部。

E-mail: nonami@meneth.tn.chiba-u.ac.jp

法⁽⁵⁾を適用する。変動するプラントを時変パラメータに対し依存性がアフィンである線形パラメータ依存系モデルとし、旋回動作範囲内での大域的安定性を保証するコントローラをLMIに基づくゲインスケジュール $\mathcal{H}_\infty$ 制御理論により設計する。これにより旋回動作範囲内での位置決め精度および制振制御性能の向上を目指す。また、その性能や有効性、そして問題点を実験により検証する。

2. モデリング

2.1 実験装置 実験装置を簡略化した制御対象モデルを図1に示す。それぞれの記号の意味は以下のとおりである。 m_i :各リンク質量, l_i :各リンク長, r_i :各リンク半径, M_i :角関節集中質量, α :肩モータ回転角, β :肘モータ回転角, v_i :各リンク先端変位, T_i :各軸入力トルク。

観測量としてモータ付属のエンコーダより出力されたパルスのカウント回路により回転角度としDIボードより取り込む。また、回転角度の差分を取ることで角速度を得る。アームの振動は肘部と先端部に付けられた加速度計より出力された電圧をADボードより取り込む。加速度計で観測されるのは重力成分を含む絶対加速度であるため数値計算によりそれを取り除いた相対加速度を得る。DAボードより出力された制御電圧はアンプにより増幅し各モータを駆動することでトルクに変換される。

2.2 有限要素法によるアーム部の運動方程式の導出 制御対象であるロボットアームは各リンクとも弾性体であるためにアーム部のたわみ、振動を表現するための運動方程式は偏微分方程式で記述され解析が非常に困難になる。そこで近似法のひとつである有限要素法を適用しシステムのエネルギーを算出し、ラグ

ランジュ方程式を用いて運動方程式を導き数式モデルを得る。

アームを図2(a)に示すような有限な要素に分割したとき、 s 番目の要素における節点変位 $u_s(t)=[u_1(t) \ u_2(t) \ u_3(t) \ u_4(t)]^T$ に対して要素間の境界条件を与えて運動方程式を求める。Lagrangeの運動方程式を導くために、運動エネルギー $T(t)$ 、およびポテンシャルエネルギー $V(t)$ を用いる。

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l m \left[\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 m は要素の質量、 l は長さ、 $w(x, t)$ は要素端から x の位置における変位、 EI は曲げ剛性、さらに仮想仕事は次の形をとることを示せる。

$$\delta \bar{W} = \sum_{i=1}^4 f_i(t) \delta u_i(t) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$f_i(t) = \int_0^l f(x, t) \phi_i(x) dx + f_i^*(t) \quad \dots\dots\dots (4)$$

式(4)は節点力であり、その中の $\phi_i(x)$ は形状関数、 $f(x, t)$ は分布非保存力であり、 $f_i^*(t)$ は現在考えている要素に隣の要素から作用する力である。式(1)、(2)および式(4)をLagrangeの方程式に代入すると要素に対する運動方程式が得られる。

$$[m]_s \ddot{u}_s(t) + [k]_s u_s(t) = f_s(t) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$[m]_s = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$[k]_s = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、図2(b)のように要素の両端に集中質量が存在する場合には左右の集中質量を M^L, M^R および慣性モーメントを I^L, I^R とそれぞれ置くと、 $[m]_s$ は $[\bar{m}]_s$ として次式で新たに表すことができる。

$$[\bar{m}]_s = [m]_s + \text{diag}(M^L, I^L, M^R, I^R) \quad \dots\dots\dots (8)$$

Fig. 1 Two-link flexible arm model

Fig. 2 Element of arm

得られた $[\bar{m}]_s$ と $[k]_s$ は各要素ごとの座標系(局所的座標系)で表現されているために個々の要素の空間における向きは必ずしも一致しない。そのため各要素の慣性・剛性行列を各節点変位を対応させる変換行列 $[A]_s$ および座標系を一致させるための回転行列 $[L]_s$ により系全体の慣性行列 $[M]$ と剛性行列 $[K]$ を得る。

$$M\ddot{U} + KU = FT \quad (9)$$

$$M = \sum_{s=1}^p [A]_s^T [L]_s^T [\bar{m}]_s [L]_s [A]_s \quad (10)$$

$$K = \sum_{s=1}^p [A]_s^T [L]_s^T [k]_s [L]_s [A]_s \quad (11)$$

ここで、 p は分割した要素の数、 $U = [u_1, \dots, u_n]^T$ は要素の節点変位、 T は駆動トルクである。

これまでに求めた運動方程式は重力を考慮していないため、ここで重力をトルクとして各軸に与え、剛性行列 K を得る。

2.3 モード分離と低次元化 各モードごとに分解するためシステムのモード行列 Φ を求め $U = \Phi \xi$ と置き、行列変換によってモード分離する。

$$M\Phi\ddot{\xi} + K\Phi\xi = FT \quad (12)$$

両辺の左側から Φ^T を掛け、

$$\Phi^T M \Phi \ddot{\xi} + \Phi^T K \Phi \xi = \Phi^T F T \quad (13)$$

$M_m = \Phi^T M \Phi$, $K_m = \Phi^T K \Phi$ とすれば、

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= -M_m^{-1} K_m \xi + M_m^{-1} \Phi^T F T \\ &= -\Omega^2 \xi + F' T \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、 $\Omega^2 = M_m^{-1} K_m$, $F' = M_m^{-1} \Phi^T F$ であり、 Ω はシステムの固有値行列である。

高周波数領域のモードを切り捨て、得られた r 次の低次元化モデルを設計モデルとする。

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_r \\ \ddot{\xi}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{r \times r} & I_{r \times r} \\ -\Omega_{r \times r}^2 & 0_{r \times r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_r \\ \dot{\xi}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{r \times 2} \\ F'_{r \times 2} \end{bmatrix} T \quad (15)$$

2.4 モータ特性の考慮 実験装置に用いられているアクチュエータは高精度減速機構ハーモニックドライブに DC サーボモータを組合せたものである。DC サーボモータはトルクと電流が比例関係にあるが実際の操作量は電圧であり、逆起電力の影響等のためにモータの特性を考慮する必要がある。

DC モータの電氣的、機械的的特性は以下の式で表せる。ここで各記号の意味は、 e : モータ駆動電圧、 i : 電機子電流、 L : 電機子インダクタンス、 R : 電機子抵抗、 K_e : 誘起電圧定数、 K_t : トルク定数、 D : 粘性制動係数、 J : 負荷イナーシャ、 T : 制御入力トルク、 θ : モータ回転角度である。

$$e = L \frac{di}{dt} + Ri + K_e \dot{\theta} \quad (16)$$

$$J\ddot{\theta} + D\dot{\theta} = T \quad (17)$$

$$T = K_t i \quad (18)$$

これより回転角度(θ)、角速度($\dot{\theta}$)および電流値(i)を状態量とすれば、電圧(e)から発生トルク(T)、モータ回転角度、角速度までの関係が求められる。

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{D}{J} & \frac{K_t}{J} \\ 0 & -\frac{K_e}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} e \quad (19)$$

2.2 節で得られたアームモデルにモータ特性を組合せることにより系全体の状態方程式を得る。

$$\dot{x} = Ax + Be \quad (20)$$

$$y = Cx \quad (21)$$

ただし、 $x = [\xi \ \theta \ \dot{\xi} \ \dot{\theta} \ i]^T$ である。

2.5 LPV モデルの導出 MATLAB LMI Control Toolbox によりゲインスケジュール(以下、 $\mathcal{G}$. S.) $\mathcal{H}_\infty$ コントローラを求めるために線形パラメータ依存モデル(以下、LPV モデル)を作成する。

実際の A 行列と C 行列は以下のようにになっており P_n の箇所が変動する。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 & P_2 \\ 0 & P_3 & 0 & C_1 & C_2 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 & C_4 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ P_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

回転角 α と β とが独立なパラメータとなる線形モデルを作成する必要があるが得られた設計モデルは α, β による複雑な関数となっているためなんらかの近似により表現する必要がある。そこで変動箇所 $P_{1, \dots, 4}$ を α および β の変動に応じて三次元プロットしそれを近似することにより LPV モデルを得る。今回はパラメータ近似の精度により旋回範囲は α, β とともに $0^\circ \sim 60^\circ$ とする。また、近似化による誤差が α, β が 45 deg 付近で大きくなることから、その影響を検証する必要がある。

また、 $\mathcal{G}$. S. コントローラを設計する際には解法上の制約から状態方程式の B, C, D 行列は時変パラメータ p_a, p_b に対して独立でなければならない。今回得られた LPV モデルは C 行列の一部が変動する。そこで、制約を満たすためにプラントの出力端に十分広い帯域幅を持つローパスフィルタを付加し⁽⁵⁾、それを設計モデルとする。設計モデルは式(24)で表すことが

できる。

$$\dot{x} = (A_0 + p_\alpha A_\alpha + p_\beta A_\beta)x + Be \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここに、 A_α, A_β はそれぞれ p_α, p_β のみに依存する項を集めた行列で、 A_0 は定数項のみを集めた行列である。図 3 は回転角 α, β がそれぞれ 0 deg, 60 deg におけるゲイン線図である。

3. 制御系設計

2・5 節で得られた LPV モデルに対し $\mathcal{G}.S.\mathcal{H}_\infty$ コントローラを設計する。一般化プラントは図 4 のように構成し、 W_T により高周波数域の誤差を覆いロバスト安定性を評価し、 W_S により低周波数域の外乱抑圧性能を評価する。 W_d は定数重みとしている。

$$W_S = \text{diag}(W_{S1}, W_{S2}, W_{S3}, W_{S4}, W_{S5}, W_{S6})$$

$$W_T = \text{diag}(W_{T1}, W_{T2})$$

重み関数のゲイン線図を図 5 に示す。

$\mathcal{H}_\infty$ 制御理論の 2 次 $\mathcal{H}_\infty$ 性能への拡張、ポリティックシステムの凸性、そして LMI を用いることで、二つの変動パラメータそれぞれの最大・最小値における四つの線形時不変(以下、LTI)コントローラ $K_{1,\dots,4}$ (状態空間表現)を設計することで、変動範囲内での大域

Fig. 3 Gain plot of plant

Fig. 4 Generalized plant

的安定性を保証できる⁽⁵⁾。 $\mathcal{G}.S.$ コントローラ K_{GS} (状態空間表現) は $K_{1,\dots,4}$ を式(25)のように p_α, p_β で凸補間することにより得られる。

$$\begin{aligned} K_{GS} = & (p_{\alpha \max} - p_\alpha)(p_{\beta \max} - p_\beta)/p \cdot K_1 \\ & + (p_\alpha - p_{\alpha \min})(p_{\beta \max} - p_\beta)/p \cdot K_2 \\ & + (p_{\alpha \max} - p_\alpha)(p_\beta - p_{\beta \min})/p \cdot K_3 \\ & + (p_\alpha - p_{\alpha \min})(p_\beta - p_{\beta \min})/p \cdot K_4 \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

ただし、 $p = (p_{\alpha \max} - p_{\alpha \min})(p_{\beta \max} - p_{\beta \min})$ である。回転角 α, β がそれぞれ 0 deg, 60 deg におけるコントローラのボード線図を図 6 に示す。

4. 実験

得られた $\mathcal{G}.S.\mathcal{H}_\infty$ コントローラと比較のために LTI $\mathcal{H}_\infty$ コントローラを用いて実験を行った。なお、 $\mathcal{G}.S.$ コントローラは制御対象の変動に応じて常に変化するため実時間で離散化する必要がある。離散化にはいくつかの手法があるが、演算時間の問題もあり計算量の多い手法は適用し難い。そこで計算量の比較的少ない Padé 近似による手法を用いる。サンプリングタイム Δt ごとに、姿勢変動に応じて式(25)のように

Fig. 5 Weighting Function

Fig. 6 Gain plot of $\mathcal{G}.S.\mathcal{H}_\infty$ controller

補間した後,

$$A_{K_{GS}^d} = (I + \Delta t \cdot A_{K_{GS}}) \left(I - \frac{\Delta t}{2} A_{K_{GS}} \right)^{-1} \dots\dots (26)$$

$$B_{K_{GS}^d} = \left(I - \frac{\Delta t}{2} A_{K_{GS}} \right)^{-1} (\Delta t \cdot B_{K_{GS}})^{-1} \dots\dots (27)$$

によりできる限り厳密な実時間での $\mathcal{G}.S.$ コントローラの離散化を実現している⁽⁶⁾.

また, $\mathcal{G}.S.$ コントローラには2.5節で述べたローパスフィルタの極が存在しており, Padé 近似を用いての離散化では高周波数領域でハイゲインとなりスピルオーバを引き起こすため, 折れ点周波数 300 rad/s を持つローパスフィルタを出力端に付加する. コントローラの次数は 26 次, サンプルングタイム Δt は 1.5 ms である.

4.1 インパルス外乱応答 アーム先端にインパ

Fig. 7 Result of impulse disturbance response

Fig. 8 Rotational reference

Fig. 9 Results of reference response ($\mathcal{G}.S.$ $\mathcal{H}_\infty$ Controller)

ルス外乱を加えたときの応答を図 7 に示す. 点線が非制御時, 実線が $\mathcal{G}.S.$ コントローラによる制御結果である. 即応性も良く, 良好な制振性能を有していることから, $\mathcal{H}_\infty$ 制御による周波数整形が十分できていることを確認できる.

4.2 旋回目標値応答 I 図 8 に示すような目標値を与え旋回動作を行う.

リンク 1, 2 ともに $2/9\pi$ [rad/s] の等速度指令値を与え, 1.5 秒間で $1/3\pi$ [rad] (60 deg) 旋回する. このときの目標値応答の結果を示す. 図 9 が $\mathcal{G}.S.$ コントローラを用いた結果で, 図 10 が肩・肘ともに $1/3\pi$ [rad] (60 deg) のモデルに対し設計された LTI $\mathcal{H}_\infty$ コ

Fig. 10 Results of reference response (LTI $\mathcal{H}_\infty$ Controller)

Fig. 11 Results of reference response ($\mathcal{G}.S.$ $\mathcal{H}_\infty$ Controller)

(a) Rotational angle

(b) Angular velocity

(c) Tip acceleration

(d) Control input

Fig. 12 Results of reference response (LTI H_∞ Controller <Shoulder : 45 deg, Elbow : 45 deg>)

ントローラを用いた結果である。結果より過渡特性において性能の向上, 定常状態においては LTI コントローラと同程度の性能が確認できたことから $G.S.$ コントローラが有効に働いていることが確認できる。

4.3 旋回目標値応答 II リンク 1, 2 とともに 1.5 秒間等速度 ($1/6\pi$ [rad/s]) 指令値を与え, 最終的に近似化誤差の大きい $1/4\pi$ [rad] となる動作をさせた結果を示す。図 11 は $G.S.$ コントローラ, 図 12 は肩・肘ともに $1/4\pi$ [rad] (45 deg), 図 13 は肩・肘ともに 0 rad のモデルに対して設計された LTI コントローラを用いた。 $G.S.$ コントローラでは旋回動作中もコントローラをスケジュールリングすることにより良好な過渡特性が得られている。しかし, 定常状態では二次モードの影響により若干制御性能の低下が見られ, 近似化誤差の影響と考えられる。

また, すべての実験結果において制御入力安定していない。これはモータに存在する摩擦トルクとアーム先端の振動である相対加速度の検出精度が原因であると考えられる。

5. 結 言

新たに製作した実験装置である 2 リンクフレキシブルアームに有限要素法を適用し運動方程式を導出した。変動する要素を回転角 α, β に関する LPV シス

(a) Rotational angle

(b) Angular velocity

(c) Tip acceleration

(d) Control input

Fig. 13 Results of reference response (LTI H_∞ Controller <Shoulder : 0 deg, Elbow : 0 deg>)

テムに変換し, $G.S.H_\infty$ コントローラを設計した。結果よりアームの姿勢変動に応じてコントローラを時变的にスケジュールリングすることにより, 動作範囲内で制御性能を悪化させることなく任意の角度へ旋回可能であることを実験により示した。しかし定常状態での入力や変動するパラメータの近似, そして重み関数の選定に関しては改善の余地があると思われる。今後はこれらの点について考察する必要がある。

文 献

- (1) 坂本弘道・野波健蔵・小林信之, 凸最適化超平面を有する 2 リンクロボットアームの VSS 制御, 電気学会情報システム部門大会講演論文集, (1999-8), 311-312.
- (2) Kobayashi, N. and Inoue, K., Vibration Suppression Control Of Flexible Robot Arm With CMS Modeling And Out-put Feed Back Sliding Mode Controller, *Proc. 1999 IEEE Int. CCA*, (1999), 297-302.
- (3) Wang, J.-Q. and Wend, H.-D., Robust Trajectory Tracking Control of a Two-Link Flexible Manipulator, *14th IFAC World Congress 1999*, (1999), 71-76.
- (4) Banerjee, A. K. and Shinghose, W. E., Command Shaping in Tracking Control of a Two-Link Flexible Robot, *J. Guidance, Control, Dynamics*, **21**-6(1998), 311-312.
- (5) Gahinet, P., Nemmirovski, A., Laub, A. J. and Chilali, M., *LMI Control Toolbox, For Use with MATLAB*, (1995), The MATH WORKS Inc.
- (6) Takagi, K. and Nishimura, H., Gain-scheduled Controll of a Tower Crane Considering Varying Load-Rope Length, *JSME Int. J., Ser. C*, **42**-4(1999), 914-921.