微分方程式の離散化による連立一次方程式の直接高速解法*

(分割階層化法を用いた N 層構造物の振動解析)

郡 安 憲 三^{*1}, 平 本 経 幸^{*2}
谷 本 充 司^{*3}, 小 佐 野 峰 忠^{*4}

A New Efficient Analytical Method for a System of Vibration (Structural Analysis Using a New Technique of Partially Solving Method)

Kenzo GUNYASU^{*5}, Tsuneyuki HIRAMOTO,
Mitsumori TANIMOTO and Minetada OSANO

^{*5} Analysis Technology Department, b-Solution Division, Toshiba IT-Solutions Corporation,
1-2-4 Isago, Kawasaki-ku, Kawasaki-shi, Kanagawa, 210-0006 Japan

We describe a new method for solving large-scale system of linear equations resulting from discretization of ordinary differential equation and partial differential equation directly. This new method effectively reduces the memory capacity requirements and computing time problems for analyses using finite difference method and finite element method. In this paper we have tried to solve one-million linear equations directly for the case that initial displacement and boundary displacement are known about the finite difference scheme of second order inhomogeneous differential equation for vibration of a 10-story structure. Excellent results were got.

Key Words: Finite Difference Method, Partially Solving Method, Vibration Analysis, Fast Computing Method, Inverse Matrix, Linear Equation

1. はじめに

原子力プラントのように大規模な構造物やシステム等の現象解析技術として、差分法や有限要素法は非常に有効で、その適用先も益々拡大している。

この差分法や有限要素法の応用として、土木・建築機械・物理分野等の線形または非線形システム系の解析に幅広く扱うことができる。

解析面でこれらの解析法を見ると、解析するシステムをいくつかの節点による多くの要素から構成されていると仮定し、この要素に対しての離散化された連立方程式を作成し、その解を求める。この連立方程式は、分割要素数の増大に伴い、計算時間や計算容量が増大する。この容量・時間削減の努力が多くの研究者により行われてきたのであるが、その努力にもかかわらず計算機の容量増大、計算時間の増大は免れない。

本手法は、系全体の微分方程式を有限時間差分化し、境界条件を時間軸上の任意の点に設定し、これを行列

の階層化処理法により階層化部分の連立差分方程式の部分解を求め、これを用いて階層化された部分解を統合して解いていく手法（以降、PSM と称す）である。

本論文では、時間軸中心差分で展開した 3 重ブロック対角行列への適用例を示すが、本手法は、n 重ブロック対角行列にも適用でき、係数行列を分割階層化し、座標軸を含む時間軸上で式を展開し、一つの係数行列として表した連立一次方程式の新解法を提案する。しかし、本解法は一般的な連立一次方程式の高速解法を提案するものではない。

本論文では、振動解析における N 次元行列に PSM の階層化処理法により直接計算を可能とさせ、100 万次元行列の解析を実現させた。例題として、外力を受ける 10 層構造物の微分方程式を差分化し、その差分方程式に PSM の階層化処理法を用いて解く事を試みる。初期条件、例えば初期変位と初期速度が既知ならばこの差分方程式は、繰り返し計算により容易に解く事ができる。初期変位とある時間後の変位が既知の場合には簡単に解けない。10 層構造物は二階の線形微分方程式 10 個からなる連立方程式で、初期変位と 100,001 時間刻み後の変位を既知とすると差分方程式 100 万からなる連立一次方程式を解かなければならない。この非常に大きな連立一次方程式に PSM の階層化処理法を用いて解き大変良好な結果を得たので報告する。この PSM は、著者の一人小佐野^[1]が考案した方法である。

* 原稿受付 2001 年 10 月 5 日。

^{*1} 正員、東芝 IT ソリューション(株)解析技術部(☎ 245-0006 川崎市川崎区砂子 1-2-4)。

^{*2} 東芝 IT ソリューション(株)解析技術部。

^{*3} 産業技術総合研究所(☎ 305-0006 つくば市梅園 1-1-1)。

^{*4} 会津大学コンピュータ学部(☎ 965-8580 会津若松市一箕町鶴賀)。

E-mail: gunyasu.kenzou@toshiba-it.co.jp

本論文の第二節では N 層構造物の微分方程式の差分化を行い、第三節では N 層構造物の微分方程式の初期条件と境界条件が与えられた場合の差分化による大きな連立方程式の解法を記述し、第四節では PSM の階層化に付いて記述する。第五節では 10 層構造物の振動解析における 100 万の連立一次方程式を Personal Computer を用いて解析した結果を示す。

2. N 層構造物の微分方程式の差分化

外力を受ける N 層構造物の微分方程式は次の式で与えられる。

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F \quad (1)$$

但し M は質量マトリックス、 C は減衰マトリックス、 K は剛性マトリックスで、 u は構造物の変位を示す。また F は構造物の受ける外力で、行列または列ベクトルである。 τ を時間刻み幅

$$t^{(v)} = v\tau \quad (2)$$

とし、中心差分を用いて(1)を離散化すると

$$M \frac{(u^{(v+1)} - 2u^{(v)} + u^{(v-1)}))}{\tau^2} + C \frac{(u^{(v+1)} - u^{(v-1)}))}{2\tau} + Ku^{(v)} = F^{(v)} \quad (3)$$

となる。但し $v = 1, 2, \dots, n$ である。(3)を書き直すと、

$$(M + \frac{\tau}{2}C)u^{(v+1)} - (2M - \tau^2 K)u^{(v)} + (M - \frac{\tau}{2}C)u^{(v-1)} = \tau^2 F^{(v)} \quad (4)$$

を得る。(4)は $u^{(v-1)}, u^{(v)}$ が既知であれば $u^{(v+1)}$ が求まる再帰式である。すなわち $u^{(0)}, u^{(1)}$ が既知であるかあるいはすべての N 層の連続した時間変位が既知であれば(4)を繰り返し用いる事によりすべての $u^{(v)}$ を求めることができる。しかしすべての N 層の連続した時間変位が既知でないときは(4)を用いてすべての $u^{(v)}$ を再帰的に求めることができない。このとき(3)は未知数 $u^{(v)}$ に関する大きな連立一次方程式とみなさなければならない。この大きな連立一次方程式の解法について述べるのがこの論文の主目的である。いま時刻 $t^{(0)}$ での変位 $u^{(0)}$ が決まってい、時刻 $t^{(n+1)}$ での変位をある変位 $u^{(n+1)}$ に設定したいような場合を考える。この時 $u^{(0)}$ と $u^{(n+1)}$ が既知となる。ここで、

$$A_1 = M - \frac{\tau}{2}C$$

$$A_2 = -(2M - \tau^2 K)$$

$$A_3 = M + \frac{\tau}{2}C \quad (5)$$

とし(4)の連立方程式を行列表示すると次式となる。

$$\begin{pmatrix} A_2 & A_3 & & \\ A_1 & A_2 & A_3 & \\ & A_1 & A_2 & A_3 \\ & & & A_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \\ \vdots \\ u^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^{(1)} \\ F^{(2)} \\ F^{(3)} \\ \vdots \\ F^{(n)} \end{pmatrix} \tau^2 + \begin{pmatrix} -A_1 u^{(0)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -A_3 u^{(n+1)} \end{pmatrix} \quad (6)$$

(6)の左辺の係数行列は $n \times N$ 行 $n \times N$ 列である。直接解法はこの係数行列の逆行列を求めることによりなされる。逆行列が求まれば容易にすべての $u^{(i)}$ を求めることができる。この論文では係数行列の逆行列を求めるのに非常に時間がかかるかコンピュータの記憶容量を超えて逆行列を求められない場合の直接解法を論ずるのが目的である。

3. 任意の境界条件での解法

境界条件として時刻 0 と最終時刻での変位が既知の場合を考える。(6)の左辺の行列は $N \times n$ 行

$N \times n$ 列で非常に大きいので逆行列を直接求める事はできないか、できても大変時間がかかる。しかしこの行列の $1/k_1$ すなわち $(N \times n)/k_1$ 行 $(N \times n)/k_1$ 列の係数行列ならば容易に逆行列を求めることができるものとする。但し n/k_1 は整数にとる。このとき

(6)を次のように k_1 個のグループに分ける。すなわち

$$M_0 \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ \vdots \\ u^{(n/k_1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^{(1)} \\ F^{(2)} \\ \vdots \\ F^{(n/k_1)} \end{pmatrix} \tau^2 + \begin{pmatrix} -A_1 u^{(0)} \\ 0 \\ \vdots \\ -A_3 u^{(n/k_1+1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
M_0 \begin{pmatrix} u^{(n/k_1+1)} \\ u^{(n/k_1+2)} \\ \vdots \\ u^{(2n/k_1)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F^{(n/k_1+1)} \\ F^{(n/k_1+2)} \\ \vdots \\ F^{(2n/k_1)} \end{pmatrix} \tau^2 + \begin{pmatrix} -A_1 u^{(n/k_1)} \\ 0 \\ \vdots \\ -A_3 u^{(2n/k_1+1)} \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
M_0 \begin{pmatrix} u^{((k_1-1)n/k_1+1)} \\ u^{((k_1-1)n/k_1+2)} \\ u^{((k_1-1)n/k_1+3)} \\ \vdots \\ u^{(n)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F^{((k_1-1)n/k_1+1)} \\ F^{((k_1-1)n/k_1+2)} \\ F^{((k_1-1)n/k_1+3)} \\ \vdots \\ F^{(n)} \end{pmatrix} \tau^2 \\
&+ \begin{pmatrix} -A_1 u^{((k_1-1)n/k_1)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -A_3 u^{(n+1)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(7)

である。ただし係数行列 M_0 は $(N \times n) / k_1$ 行 $(N \times n) / k_1$ 列で

$$M_0 = \begin{pmatrix} A_2 & A_3 & & & \\ A_1 & A_2 & A_3 & & \\ & A_1 & A_2 & A_3 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_1 & A_2 \end{pmatrix}$$

(8)

である。係数行列 M_0 の逆行列を $(M_0)^{-1}$ とすると (7) は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ \vdots \\ u^{(n/k_1)} \end{pmatrix} &= (M_0)^{-1} \begin{pmatrix} F^{(1)} \\ F^{(2)} \\ \vdots \\ F^{(n/k_1)} \end{pmatrix} \tau^2 \\
&+ (M_0)^{-1} \begin{pmatrix} -A_1 u^{(0)} \\ 0 \\ \vdots \\ -A_3 u^{(n/k_1+1)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u^{(n/k_1+1)} \\ u^{(n/k_1+2)} \\ \vdots \\ u^{(2n/k_1)} \end{pmatrix} &= (M_0)^{-1} \begin{pmatrix} F^{(n/k_1+1)} \\ F^{(n/k_1+2)} \\ \vdots \\ F^{(2n/k_1)} \end{pmatrix} \tau^2 \\
&+ (M_0)^{-1} \begin{pmatrix} -A_1 u^{(n/k_1)} \\ 0 \\ \vdots \\ -A_3 u^{(2n/k_1+1)} \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
\begin{pmatrix} u^{((k_1-1)n/k_1+1)} \\ u^{((k_1-1)n/k_1+2)} \\ \vdots \\ u^{(n)} \end{pmatrix} &= (M_0)^{-1} \begin{pmatrix} F^{((k_1-1)n/k_1+1)} \\ F^{((k_1-1)n/k_1+2)} \\ \vdots \\ F^{(n)} \end{pmatrix} \tau^2 \\
&+ (M_0)^{-1} \begin{pmatrix} -A_1 u^{((k_1-1)n/k_1)} \\ 0 \\ \vdots \\ -A_3 u^{(n+1)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(9)

ここで (9) の右辺にまず注目する。(9) の右辺にある未知数は $u^{(n/k_1)}$, $u^{(n/k_1+1)}$, $u^{(2n/k_1)}$, ..., $u^{((k_1-1)n/k_1+1)}$ である。このことより左辺にある未知数 $u^{(n/k_1)}$, $u^{(n/k_1+1)}$, $u^{(2n/k_1)}$, ..., $u^{((k_1-1)n/k_1+1)}$ に注目する。これを仮に注目未知数と呼ぶ。この注目未知数だけの連立方程式を作る。例えば(9)の第一番目の行列表示式に着目すると左辺にある注目未知数は $u^{(n/k_1)}$ のみである。 $u^{(n/k_1)}$ の j 層部分を $u_j^{(n/k_1)}$ とする。

ここで $(N \times n) / k_1$ 個の成分からなるベクトル $f_1(j)$ を

$$f_1(j) = \tau^2 (F^{(j \times n/k_1+1)}, F^{(j \times n/k_1+2)}, \dots, F^{((j+1)n/k_1)})^T$$

$$j = 0, \dots, k_1 - 1$$

(10)

と定義する。この定義を用いると(9)の第一番目の行列表示式の最後の行より

$$\begin{aligned}
u_j^{(n/k_1)} &= \sum_{i=1}^{N \times n / k_1} ((M_0)^{-1})_{N(n/k_1-1)+j,i} (f_1(0))_i \\
&- \sum_{i=1}^N ((M_0)^{-1})_{N(n/k_1-1)+j, N(n/k_1-1)+i} (A_3 u^{(n/k_1+1)})_i \\
&- \sum_{i=1}^N ((M_0)^{-1})_{N(n/k_1-1)+j,i} (A_1 u^{(0)})_i
\end{aligned}$$

$$j = 1, \dots, N$$

(11)

なる式を得ることができる。次に(9)の第二番目の行列表示式に着目すると左辺にある注目未知数は $u^{(n/k_1+1)}$ と $u^{(2n/k_1)}$ である。このとき $u^{(n/k_1+1)}$ の j 層部分 $u_j^{(n/k_1+1)}$ と $u^{(2n/k_1)}$ の j 層部分 $u_j^{(2n/k_1)}$ はそれぞれ次のように書ける。

$$\begin{aligned} u_j^{(n/k_1+1)} &= \sum_{i=1}^{N \times n/k_1} ((M_0)^{-1})_{j,i} (f_1(1))_i \\ &- \sum_{i=1}^N ((M_0)^{-1})_{j,i} (A_1 u^{(n/k_1)})_i \\ &- \sum_{i=1}^N ((M_0)^{-1})_{j, N(n/k_1-1)+i} (A_3 u^{(2n/k_1+1)})_i \\ j &= 1, \dots, N \\ u_j^{(2n/k_1)} &= \sum_{i=1}^{N \times n/k_1} ((M_0)^{-1})_{N(n/k_1-1)+j,i} (f_1(1))_i \\ &- \sum_{i=1}^N ((M_0)^{-1})_{N(n/k_1-1)+j, N(n/k_1-1)+i} (A_3 u^{(2n/k_1+1)})_i \\ &- \sum_{i=1}^N ((M_0)^{-1})_{N(n/k_1-1)+j,i} (A_1 u^{(n/k_1)})_i \\ j &= 1, \dots, N \end{aligned} \quad (12)$$

同様に(9)式より

$$\begin{aligned} u_j^{(2n/k_1+1)} &= \sum_{i=1}^{N \times n/k_1} ((M_0)^{-1})_{j,i} (f_1(2))_i \\ &- \sum_{i=1}^N ((M_0)^{-1})_{j,i} (A_1 u^{(2n/k_1)})_i \\ &- \sum_{i=1}^N ((M_0)^{-1})_{j, N(n/k_1-1)+i} (A_3 u^{(3n/k_1+1)})_i \\ j &= 1, \dots, N \\ &: \\ &: \\ u_j^{((k_1-1)n/k_1+1)} &= \sum_{i=1}^{N \times n/k_1} ((M_0)^{-1})_{j,i} (f_1(k_1-1))_i \\ &- \sum_{i=1}^N ((M_0)^{-1})_{j,i} (A_1 u^{((k_1-1)n/k_1)})_i \\ &- \sum_{i=1}^N ((M_0)^{-1})_{j, N(n/k_1-1)+i} (A_3 u^{(n+1)})_i \\ j &= 1, \dots, N \end{aligned} \quad (13)$$

を得る。(11),(12),(13)は方程式数が $(2k_1-2) \times N$ 個の連立方程式を形成する。この方程式における未知数は $(2k_1-2) \times N$ 個なので解くことができる。この連立方程式の解 $u^{(n/k_1)}$ 、 $u^{(n/k_1+1)}$ 、 $u^{(2n/k_1)}$ 、 $u^{(2n/k_1+1)}$ 、 $\dots$ 、 $u^{((k_1-1)n/k_1+1)}$ を求め、その解を(9)に代入するとすべての $u^{(i)}$ を求めることができる。この注目未知数に関する連立方程式を簡潔な形で表現するために次の記号を導入する。

$$\sum_{i=1}^N ((M_0)^{-1})_{j, N(n/k_1-1)+i} (A_3)_i = P_1(1)_{j,l}$$

$$\sum_{i=1}^N ((M_0)^{-1})_{N(n/k_1-1)+j, N(n/k_1-1)+i} (A_3)_i = P_1(2)_{j,l}$$

$$\sum_{i=1}^N ((M_0)^{-1})_{j,i} (A_1)_i = Q_1(1)_{j,l}$$

$$\sum_{i=1}^N ((M_0)^{-1})_{N(n/k_1-1)+j,i} (A_1)_i = Q_1(2)_{j,l}$$

(14)

勿論 $P_1(1), P_1(2), Q_1(1), Q_1(2)$ は N 行 N 列の行列である。また

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N \times n/k_1} ((M_0)^{-1})_{j,i} (f_1(r))_i &= (g_1(1, r))_j \\ \sum_{i=1}^{N \times n/k_1} ((M_0)^{-1})_{N(n/k_1-1)+j,i} (f_1(r))_i &= (g_1(2, r))_j \\ r &= 0, \dots, k_1 - 1 \end{aligned}$$

(15)

とする。 $g_1(1, r)$ 及び $g_1(2, r)$ は長さ N のベクトルである。

(14) 及び (15) を用いると(11),(12),(13)の連立方程式は次式のような行列形式であらわされる。

$$M_1 \begin{pmatrix} u^{(n/k_1)} \\ u^{(n/k_1+1)} \\ : \\ : \\ u^{((k_1-1)n/k_1+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(2,0) - Q_1(2)u^{(0)} \\ g_1(1,1) \\ : \\ : \\ g_1(1, k_1-1) - P_1(1)u^{(n+1)} \end{pmatrix} \quad (16)$$

但し

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & P_1(2) & 0 & 0 \\ Q_1(1) & 1 & 0 & P_1(1) & 0 \\ Q_1(2) & 0 & 1 & P_1(2) & 0 \\ & Q_1(1) & 1 & 0 & P_1(1) & 0 \\ & Q_1(2) & 0 & 1 & P_1(2) & 0 \\ & & & & : \\ & & & & : \\ & & & & & Q_1(1) & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

ここで M_1 は $(2k_1-2) \times N$ 行 $(2k_1-2) \times N$ 列の行列である。 M_1 の逆行列を $(M_1)^{-1}$ とすると(16)より

$$\begin{pmatrix} u^{(n/k_1)} \\ u^{(n/k_1+1)} \\ : \\ : \\ u^{((k_1-1)n/k_1+1)} \end{pmatrix} = (M_1)^{-1} \begin{pmatrix} g_1(2,0) - Q_1(2)u^{(0)} \\ g_1(1,1) \\ : \\ : \\ g_1(1, k_1-1) - P_1(1)u^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

(18)

を得る。 $n+1$ 以後の時間刻み毎の変位は $u^{(n+1)}$ と $u^{(n)}$ が既知となるので (9) を用いてすべての時刻での変位を求めることができる。

以上のように、比較的小さな行列の逆行列を 2 回求める事が主となるので計算時間が大幅に短縮されることが期待できる。

4. PSM の階層化

(17) の逆行列を求めるのに計算時間が膨大にかかる場合、あるいはメモリの制約上計算できない場合(16)を更に分割することを考える。すなわち PSM の階層化を行う。

(16) で議論を進めても良いが $u^{(1)}$ の関係式と $u^{(n)}$ の関係式を(16)に付け加える。すなわち

$$M_1 \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(n/k_1)} \\ u^{(n/k_1+1)} \\ \vdots \\ u^{((k_1-1)n/k_1+1)} \\ u^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(1,0) - Q_1(1)u^{(0)} \\ g_1(2,0) - Q_1(2)u^{(0)} \\ g_1(1,1) \\ \vdots \\ g_1(1,k_1-1) - P_1(1)u^{(n+1)} \\ g_1(2,k_1-1) - P_1(2)u^{(n+1)} \end{pmatrix} \quad (19)$$

である。(19)は(16)よりも対称性がよく分割しやすいものである。但し、ここでの M_1 は(17)とは異なり、

$2k_1 \times N$ 行 $2k_1 \times N$ 列の行列で次式であたえられる。

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & P_1(1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & P_1(2) & 0 & 0 \\ & Q_1(1) & 1 & 0 & P_1(1) & 0 \\ & Q_1(2) & 0 & 1 & P_1(2) & 0 \\ & & Q_1(1) & 1 & 0 & P_1(1) & 0 \\ & & Q_1(2) & 0 & 1 & P_1(2) & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & Q_1(1) & 1 & 0 \\ & & & & & Q_1(2) & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

これ以後 M_1 はすべて(17)ではなく(20)を意味するものとする。また行列形式での表示も(16)ではなく(19)を指すものとする。ここで便宜的に次の様に記号を書き換える。

$$\begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ \vdots \\ v^{(2k_1-1)} \\ v^{(2k_1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(n/k_1)} \\ \vdots \\ u^{((k_1-1)n/k_1+1)} \\ u^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_1^{(2)} \\ \vdots \\ F_1^{(2k_1-1)} \\ F_1^{(2k_1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(1,0) \\ g_1(2,0) \\ \vdots \\ g_1(1,k_1-1) \\ g_1(2,k_1-1) \end{pmatrix} \quad (21)$$

(21)を用いると(19)は

$$M_1 \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ \vdots \\ v^{(2k_1-1)} \\ v^{(2k_1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} - Q_1(1)u^{(0)} \\ F_1^{(2)} - Q_1(2)u^{(0)} \\ \vdots \\ F_1^{(2k_1-1)} - P_1(1)u^{(n+1)} \\ F_1^{(2k_1)} - P_1(2)u^{(n+1)} \end{pmatrix} \quad (22)$$

となる。(22)を k_2 等分すると

$$M_2 \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ \vdots \\ v^{(2k_1/k_2-1)} \\ v^{(2k_1/k_2)} \\ \vdots \\ v^{(2k_1(k_2-1)/k_2+1)} \\ v^{(2k_1(k_2-1)/k_2+2)} \\ \vdots \\ v^{(2k_1-1)} \\ v^{(2k_1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} - Q_1(1)u^{(0)} \\ F_1^{(2)} - Q_1(2)u^{(0)} \\ \vdots \\ F_1^{(2k_1/k_2-1)} - P_1(1)v^{(2k_1/k_2+1)} \\ F_1^{(2k_1/k_2)} - P_1(2)v^{(2k_1/k_2+1)} \\ \vdots \\ F_1^{(2k_1(k_2-1)/k_2+1)} - Q_1(1)v^{(2k_1/k_2)} \\ F_1^{(2k_1(k_2-1)/k_2+2)} - Q_1(2)v^{(2k_1/k_2)} \\ \vdots \\ F_1^{(4k_1/k_2-1)} - P_1(1)v^{(4k_1/k_2+1)} \\ F_1^{(4k_1/k_2)} - P_1(2)v^{(4k_1/k_2+1)} \\ \vdots \\ F_1^{(2k_1(k_2-1)/k_2+1)} \\ F_1^{(2k_1(k_2-1)/k_2+2)} \\ \vdots \\ F_1^{(2k_1-1)} \\ F_1^{(2k_1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Q_1(1)v^{(2k_1(k_2-1)/k_2)} \\ -Q_1(2)v^{(2k_1(k_2-1)/k_2)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -P_1(1)u^{(n+1)} \\ -P_1(2)u^{(n+1)} \end{pmatrix} \quad (23)$$

となる。但し M_2 は M_1 と同じ形で大きさが $(2k_1 \times N) / k_2$ 行 $(2k_1 \times N) / k_2$ 列の行列である。

また k_1 / k_2 を整数になるようにとる。ここで
 $(2k_1 \times N) / k_2$ 個の成分からなるベクトル $f_2(j)$ を

$$f_2(j) = (F_1^{(2k_1 \times j / k_2 + 1)}, F_1^{(2k_1 \times j / k_2 + 2)}, \dots, F_1^{(2k_1(j+1) / k_2)})^T$$

$$j = 1, \dots, N \quad (24)$$

と定義すると三節と同じ議論により境界部の方程式として次式を得る。

$$v_j^{(2k_1 / k_2)} = \sum_{i=1}^{2N \times k_1 / k_2} ((M_2)^{-1})_{N(2k_1 / k_2 - 1) + j, i} (f_2(0))_i$$

$$- \sum_{i=1}^N ((M_2)^{-1})_{N(2k_1 / k_2 - 1) + j, N(2k_1 / k_2 - 2) + i} (P_1(1)) v^{(2k_1 / k_2 + 1)}_i$$

$$- \sum_{i=1}^N ((M_2)^{-1})_{N(2k_1 / k_2 - 1) + j, N(2k_1 / k_2 - 1) + i} (P_1(2)) v^{(2k_1 / k_2 + 1)}_i$$

$$- \sum_{i=1}^N ((M_2)^{-1})_{N(2k_1 / k_2 - 1) + j, i} (Q_1(1)) u^{(0)}_i$$

$$- \sum_{i=1}^N ((M_2)^{-1})_{N(2k_1 / k_2 - 1) + j, N+i} (Q_1(2)) u^{(0)}_i$$

$$j = 1, \dots, N$$

$$v_j^{(2k_1 / k_2 + 1)} = \sum_{i=1}^{2N \times k_1 / k_2} ((M_2)^{-1})_{j, i} (f_2(1))_i$$

$$- \sum_{i=1}^N ((M_2)^{-1})_{j, i} (Q_1(1)) v^{(2k_1 / k_2 + 1)}_i$$

$$- \sum_{i=1}^N ((M_2)^{-1})_{j, N+i} (Q_1(2)) v^{(2k_1 / k_2 + 1)}_i$$

$$- \sum_{i=1}^N ((M_2)^{-1})_{j, N(2k_1 / k_2 - 1) + i} (P_1(1)) v^{(4k_1 / k_2 + 1)}_i$$

$$- \sum_{i=1}^N ((M_2)^{-1})_{j, N(2k_1 / k_2 - 1) + i} (P_2(2)) v^{(4k_1 / k_2 + 1)}_i$$

$$j = 1, \dots, N$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$v_j^{(2k_1(k_2-1) / k_2 + 1)} = \sum_{i=1}^{2N \times k_1 / k_2} ((M_2)^{-1})_{j, i} (f_2(k_2 - 1))_i$$

$$- \sum_{i=1}^N ((M_2)^{-1})_{j, i} (Q_1(1)) v^{(2k_1(k_2-1) / k_2)}_i$$

$$- \sum_{i=1}^N ((M_2)^{-1})_{j, N+i} (Q_1(2)) v^{(2k_1(k_2-1) / k_2)}_i$$

$$- \sum_{i=1}^N ((M_2)^{-1})_{j, N(2k_1 / k_2 - 2) + i} (P_1(1)) u^{(n+1)}_i$$

$$- \sum_{i=1}^N ((M_2)^{-1})_{j, N(2k_1 / k_2 - 1) + i} (P_1(2)) u^{(n+1)}_i$$

$$j = 1, \dots, N$$

(25)

(25)は方程式数が $N \times (2k_2 - 2)$ 個の連立方程式を形成する。この方程式における未知数は $N \times (2k_2 - 2)$

個なので解くことができる。この連立方程式の解 $v^{(2k_1 / k_2)}, v^{(2k_1 / k_2 + 1)}, \dots, v^{(2k_1(k_2-1) / k_2 + 1)}$ を求め (23) に代入するとすべての $v^{(i)}$ を求めることができる。(21)の v と u の関係式より $u^{(n / k_1)}, u^{(n / k_1 + 1)}, u^{(2n / k_1)}, u^{(2n / k_1 + 1)}, \dots, u^{((k_1-1)n / k_1 + 1)}$ が求められたことになり、これらを (9) に代入するとすべての $u^{(i)}$ が求められる。(25)の連立方程式を簡潔な形で表現するために次の記号を導入する。

$$P_2(1)_{j,l} = \sum_{i=1}^N ((M_2)^{-1})_{j, N(2k_1 / k_2 - 2) + i} (P_1(1))_{i,l}$$

$$+ \sum_{i=1}^N ((M_2)^{-1})_{j, N(2k_1 / k_2 - 1) + i} (P_1(2))_{i,l}$$

$$P_2(2)_{j,l} = \sum_{i=1}^N ((M_2)^{-1})_{N(2k_1 / k_2 - 1) + j, N(2k_1 / k_2 - 2) + i} (P_1(1))_{i,l}$$

$$+ \sum_{i=1}^N ((M_2)^{-1})_{N(2k_1 / k_2 - 1) + j, N(2k_1 / k_2 - 1) + i} (P_1(2))_{i,l}$$

$$Q_2(1)_{j,l} = \sum_{i=1}^N ((M_2)^{-1})_{j, i} (Q_1(1))_{i,l}$$

$$+ \sum_{i=1}^N ((M_2)^{-1})_{j, N+i} (Q_1(2))_{i,l}$$

$$Q_2(2)_{j,l} = \sum_{i=1}^N ((M_2)^{-1})_{N(2k_1 / k_2 - 1) + j, i} (Q_1(1))_{i,l}$$

$$+ \sum_{i=1}^N ((M_2)^{-1})_{N(2k_1 / k_2 - 1) + j, N+i} (Q_1(2))_{i,l}$$

$$(26)$$

勿論 $P_2(1), P_2(2), Q_2(1), Q_2(2)$ は N 行 N 列の行列である。また

$$\sum_{i=1}^{2N \times k_1 / k_2} ((M_2)^{-1})_{j, i} (f_2(r))_i = (g_2(1, r))_j$$

$$\sum_{i=1}^{2N \times k_1 / k_2} ((M_2)^{-1})_{N(2k_1 / k_2 - 1) + j, i} (f_2(r))_i = (g_2(2, r))_j$$

$$r = 0, \dots, k_2 - 1 \quad (27)$$

とする。 $g_2(1, r)$ 及び $g_2(2, r)$ は長さ N のベクトルである。

(26) 及び (27) を用いると(25)の連立方程式は次式のような行列形式であらわされる。

$$M_3 \begin{pmatrix} v^{(2k_1 / k_2)} \\ v^{(2k_1 / k_2 + 1)} \\ \vdots \\ v^{(2k_1(k_2-1) / k_2 + 1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_2(2, 0) - Q_2(2)u^{(0)} \\ g_2(1, 1) \\ \vdots \\ g_2(1, k_2 - 1) - P_2(1)u^{(n+1)} \end{pmatrix} \quad (28)$$

となる。但し

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & P_2(2) & 0 & 0 \\ Q_2(1) & 1 & 0 & P_2(1) & 0 \\ Q_2(2) & 0 & 1 & P_2(2) & 0 \\ & Q_2(1) & 1 & 0 & P_2(1) & 0 \\ & Q_2(2) & 0 & 1 & P_2(2) & 0 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & Q_2(1) & 1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

である。ここで M_3 は $N(2k_2 - 2)$ 行 $N(2k_2 - 2)$ 列の行列である。 M_3 の逆行列を $(M_3)^{-1}$ とすると(28)より

$$\begin{pmatrix} v^{(2k_1/k_2)} \\ v^{(2k_1/k_2+1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ v^{(2k_1(k_2-1)/k_2+1)} \end{pmatrix} = (M_3)^{-1} \begin{pmatrix} g_2(2,0) - Q_2(2)u^{(0)} \\ g_2(1,1) \\ \vdots \\ \vdots \\ g_2(1,k_2-1) - P_2(1)u^{(n+1)} \end{pmatrix} \quad (30)$$

を得る。(30)の右辺はすべて既知量であるから左辺の未知数を求めることができる。

係数行列 M_3 が大きく M_3 の逆行列が容易に計算できない場合、この節で述べた方法により更に(28)を分割すれば良い。すなわち PSM の階層をさらに深くするというのである。

5. 十層構造物の応答解析

本計算手法の計算時間短縮の効果を見る為に、Fig.1 に示す十層構造物の応答解析を行ってみる。ここで全ての質点の質量は、下記とする。

$$m_i = m = 9.18 \times 10^5 \text{ [kg sec}^2/\text{m}] \quad i = 1, 2, \dots, 10 \quad (31)$$

Fig. 1 Mathematical Model

また^[2]より、各質点間の剛性は下記を用いる。

$$k_1 = 1.58 \times 10^8, k_2 = 1.73 \times 10^8, k_3 = 1.65 \times 10^8, k_4 = 1.54 \times 10^8, k_5 = 1.42 \times 10^8 \\ k_6 = 1.27 \times 10^8, k_7 = 1.11 \times 10^8, k_8 = 9.14 \times 10^7, k_9 = 6.93 \times 10^7, k_{10} = 4.30 \times 10^7 \quad [\text{kg/m}] \quad (32)$$

さらに各部材の減衰比として下記を用いる。

$$h_j = 0.02 \quad j = 1, 2, \dots, 10 \quad (33)$$

この値から^[4]に示す方法により減衰行列 C を作成し、この C を用いて (1) を解いた。境界条件は初期変位と最終変位 (時間刻み数 100001) を質点 1 から質点 10 共、既知として次の値を用いた。

$$u^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad (34)$$

$$u^{(100001)} = (-0.00146651, -0.00335281, -0.00586686, -0.00902743, -0.0128331, -0.0172499, -0.0222006, -0.0275278, -0.032947, -0.0378609) \quad (35)$$

また外力は下記とした。

$$F^{(i)} = f \cos \alpha t_i = \cos(10 t_i) \quad (36)$$

時間刻み幅を 0.00005 とし $n = 100000$ $N = 10$ の場合の計算を言語 Mathematica (逆行列計算ルーチンを所有) を用いて Personal Computer で行った。この場合の係数行列は 100 万行 100 万列の大きさとなるので直接、係数行列の逆行列を求めることは不可能である。PSM を用いて計算を行った結果を Table 1 に示す。

Table 1 Computational time of the system of linear equations having the number of one million variables

第一分割数	第二分割数	第三分割数	所要時間(s)
250	2	—	1703
500	4	—	285
500	25	—	166
1000	25	—	63
1000	100	10	55
1000	50	2	57
2500	100	5	33

Table 1 の二行目を説明するとまず 100 万元連立方程式

を第一分割数で 250 等分する。その時生じる注目未知数を集めた方程式は 5 千円連立方程式となる。第二分割数の 2 はここで生じた 5 千円連立方程式を更に 2 等分することを意味する。この様にして直接解法により 100 万個のすべての $u^{(i)}$ を求める迄にかかった時間が Table 1 の一番右の欄に示されている所要時間 (秒) である。更に分割数、階層化の深さを変えて計算時間を求めた。これらの計算時間は、Table 1 の通りである。この計算結果により、一概には言えないが PSM の階層化の深さが深いほど計算時間がより短縮される傾向にあることがわかる。

特に Table 1 の最終行で第一分割数 2,500、第二分割数 100、第三分割数 5 の場合驚くべき事にわずか 30 数秒で 100 万円連立方程式を解くことができる。

また、第一分割数が 500 における本 PSM で求めた質点 1 と質点 10 の変位時刻歴図を Fig. 1, Fig. 2 に示す。Table 1 に示すどの分割数のケースでも同じ変位時刻歴図になり、本手法の妥当性を確認することができた。

また、本計算に用いた Personal Computer の性能は Pentium III の 850MHz でメモリ容量は 384MB である。

Fig. 2 Displacement Time History of First Point

Fig. 3 Displacement Time History of 10th Point

6. まとめ

本論文で提案した手法は、解析手順が従来の方法とまったく異なる新しい疎な係数行列表示式での連立一次方程式の解法である。すなわち、線形微分方程式を差分化し、その差分化方程式に PSM を用いて解く方法について提案した。差分化以降何ら近似がなされていない解法である。

初期条件、例えば初期変位と初期速度が既知ならば差分方程式は小さな行列を用いた繰り返し計算の方が速い。しかし任意の位置、任意の時刻での条件が与えられた時は繰り返し計算はできない。このとき小佐野が開発した PSM を用いて更に階層化処理法を用いることで、大規模行列の直接解法を可能とし、座標空間軸と時間軸上で展開された連立差分方程式を一つの係数行列として表すことにより、任意のところで境界条件や初期値を与えることを可能としたまったく新しい手法を提案するものである。

例題として、外力を受ける N 層構造物の微分方程式を差分化し、その巨大な差分方程式に PSM の階層化処理法を用いて解く事を試みた。この非常に大きな連立一次方程式に PSM の階層化処理法を用いて解き大変良好な結果を得た。

PSM の主要計算量は、小さい逆行列をいくつか求める事と解を求めるために必要ないくつかの比較的小さな行列とベクトルとの積を計算することである。この計算量をガウスの消去法より小さくする主要条件は時間刻み数が多く、かつ構造物の自由度 (バンド幅) が大きい場合である。

本論文で示した手法は、解析手順が従来の方法と異なる差分法の新しい解法である。解析対象物の節点変位 (座標空間軸) を分割するのではなく、時系列変位を分割する新しい方法を導いた。更に分割法に加え、階層化処理法を用いることにより、複雑な構造物についても従来の方法では解くことが困難な任意時刻の変位が既知の境界条件でも容易に解くことができること、従来に較べると非常に小容量で高速に計算処理を行うことが出来ることを示した。

参考文献

- (1) M. Osano, et al : Method and apparatus for system characterization and analysis using finite element methods, 米国特許第 5442569 号公報
- (2) あべ木 紀男 他 : 地震工学・振動学入門、吉井書店
- (3) 田治見 宏 : 建築振動学、コロナ社
- (4) 電気技術基準調査委員会 : 原子力発電所耐震設計技術指針 (JEAG4601-1987) 日本電気協会