円筒形構造物に対する定常波離散化による新しい実験的
モード特性同定法およびタイヤのモデル化への適用*松岡久祥^{*1}, 大熊政明^{*2}, 安藤正登^{*3}A New Experimental Modal Parameter Estimation Method
for Cylindrical Structures by Standing Wave Decomposition
and Application to Tire ModellingHisayoshi MATSUOKA^{*4}, Masaaki OKUMA and Masato ANDO^{**} Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology,
2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8550 Japan

This paper presents a new experimental modal parameter estimation method to be applied to point symmetric structures, and shows an application to modeling of tires for passenger-cars. The method decomposes frequency response functions into the components of individual natural modes based upon Fourier transform algorithm in the circumferential direction of spatial domain at first, and then determines the modal parameters using the components of each natural mode. In this paper, we explain the theory of the method, and present a challenging application of the method to an actual tire for passenger-cars. The tire is experimentally identified about its dynamic characteristics under the free-free boundary condition, and the result of the identification is expressed as a set of spatial matrices. The number of degrees of freedom of the identified spatial matrices is 152. Finally, in order to demonstrate the validity of this model, we carry out a prediction analysis of the tire under a clamping boundary condition, and compare the result with experiment.

Key Words: Identification, Experimental Modeling, Fourier Transformation, Vibration, Tire, Modal Analysis

1. はじめに

タイヤの特性は、車両の運動挙動、振動および騒音に大きな影響を及ぼすために、タイヤの設計および車両の設計でのコンピュータ援用設計技術において高精度のモデル化が要求される。しかし、車両用タイヤはゴム、繊維、ワイヤ等により複合構成されているために有限要素法に代表される理論的モデル化手法によって精度良いモデルを得ることは難しい。仮に満足できる精度で固有振動数とモード形が求まったとしても、理論的には減衰は求められないためにタイヤのように減衰の大きな対象については設計支援解析用モデルとして妥当でない場合がある。また、加振実験による実験的モード解析¹⁾も試みられてはいるが、形状の対称性による重根、大きな減衰等の理由によりモデル構築は容易ではない。これらとは別に、タイヤを比較的少

ない自由度のバネ質量モデルとして、1次から数次までの固有振動数が一致するように剛性・質量・ダンパーを設定することでモデル化を行う手法も提案されており、車両の挙動解析等に成果をあげている²⁾。しかし、これらのモデルの大半は解析可能周波数領域があまり高くないために、騒音振動解析を行うには適していない。

そこで本研究では、はじめに、タイヤのような円筒形構造物はその中心軸に対して対称であることを利用した新しい実験的モード特性同定法を提案する。この新しく提案する実験的モード特性同定法は、物理空間座標におけるフーリエ変換を用いることにより、実験で得られた点から点への伝達関数を点からモード形への伝達関数に変換して解析を行う。これにより、モード抜けもなく実験ノイズを除去したモード特性が得られる。さらに、本手法では最終的には特性行列の形で結果を出力する。

本提案の実験的モデル化同定手法を車両用タイヤに適用すれば、トレッド面の曲げ、ねじり振動だけでなく、内部空洞における空気の共鳴振動をも適切に表現することが出来る。また、モデルが特性行列

* 原稿受付 2002年1月15日。

^{*1} 准員, 東京工業大学大学院理工学研究科(〒152-8552 東京都目黒区大岡山2-12-1)。^{*2} 正員, 東京工業大学工学部。^{*3} マツダ(株)車両開発本部(〒730-8670 広島市安芸郡府中町新地3-1)。

E-mail: h-matsu@h7.dion.ne.jp

の形であるために容易に境界条件の変更, サスペンションとの結合, 路面からの力, 変位入力を表現することが可能である。

本論文では, 提案手法の有効性を検証するために, 周辺自由状態での加振実験を基に乗用車用タイヤを同定・モデル化し, その算出されたモデルを利用して接地およびハブ固定の境界条件におけるタイヤの動特性予測解析を実施し, 実用的精度で予測が行えることを示す。

2. 理 論

タイヤのような軸対称均一な円筒形状の対象物に関して, 図1のようにその表面に伝わる波動を考える。この波動が定常波となるためには, 波長の整数倍が円周の長さになる必要がある。この表面上に発生する波数 n の定常波の固有角速度を Ω_n とすると, この定常波の位置 θ における変位 y は次式のように表現できる。

Fig.1 The standing wave on a rotund structure

$$y_n(\theta, t) = (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \sin(\Omega_n t + \phi) \quad \dots(1)$$

この式(1)は固有モードそのものである。この中には $n=0$ のときの観測点全体が一様に半径方向に広がるモードと振れるモードも含まれる。

対象物の剛体運動については, 剛体運動には並進と回転の計6自由度があるので, 円周上で観測される剛体運動は, 極座標で表すと次のように表現できる。

$$C(\theta, t) = (c_0 + c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta) \cdot t \quad \dots(2)$$

ここで, c_0, c_1, c_2 は剛体運動の速さと向きによって定まる定数である。

次にこの円周上に等間隔に $2N$ 個所の観測点を設定するとする。このとき, 観測点 k 番の位置を

$\theta = \pi(k-1)/N$ と表すと, 式(1)は次のように変形できる。

$$y_n(k, t) = \frac{1}{2} \left[(a_n + jb_n) e^{\frac{jn(k-1)}{N}} + (a_n - jb_n) e^{\frac{j(2N-n)(k-1)}{N}} \right] \sin(\Omega_n t + \phi) \quad \dots(3)$$

この式(3)によって表すことのできる定常波は $n \leq N$ までのものである。

今, 観測点 i を加振したときの円周上の応答を考える。この応答は式(1)の固有モードを重ね合わせた形で表されるので, 応答位置 θ におけるコンプライアンスは次のように表される。

$$G_{i,\theta}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{i,n} \cos n\theta + b_{i,n} \sin n\theta}{\Omega_n^2 - \omega^2 + 2j\zeta_n \Omega_n \omega} + \frac{c_{i,0} + c_{i,1} \cos \theta + c_{i,2} \sin \theta}{\omega^2} \quad \dots(4)$$

ここで, ζ_n はモード減衰比である。

式(4)と式(3)より, 観測点 i と観測点 k の間のコンプライアンスは次式となる。

$$G_{i,k}(\omega) = \frac{A_{i,0}}{\Omega_0^2 - \omega^2 + 2j\zeta_0 \Omega_0 \omega} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{A_{i,n} e^{\frac{jn(k-1)}{N}} - \bar{A}_{i,n} e^{\frac{j(2N-n)(k-1)}{N}}}{\Omega_n^2 - \omega^2 + 2j\zeta_n \Omega_n \omega} + \frac{A_{i,N} e^{\frac{jN(k-1)}{N}}}{\Omega_N^2 - \omega^2 + 2j\zeta_N \Omega_N \omega} + \frac{C_{i,0} + C_{i,1} e^{\frac{j(k-1)}{N}} + \bar{C}_{i,1} e^{\frac{j(2N-1)(k-1)}{N}}}{\omega^2} + d_{i,k} \quad \dots(5)$$

ここで, $A_{i,n}, C_{i,1}, d_{i,k}$ は複素数で与えられ, $\bar{A}_{i,n}, \bar{C}_{i,1}$ はそれぞれ $A_{i,n}, C_{i,1}$ の共役複素数である。また, モード形が N 次までしか表現できないために, 剰余剛性 $d_{i,k}$ の項を新たに導入する。

式(5)を利便的に変形するために次のような式の置き換えを行う。

$$T_N = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & e^{\frac{j}{N}} & e^{\frac{2j}{N}} & & e^{\frac{j(2N-1)}{N}} \\ & & e^{\frac{2j}{N}} & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{\frac{j(2N-1)}{N}} & \dots & & e^{\frac{j(2N-1)(2N-1)}{N}} \end{array} \right] \quad \dots(6)$$

$$F_n(\omega) = \frac{1}{\Omega_n^2 - \omega^2 + 2j\zeta_n \Omega_n \omega}$$

これにより, 観測点 i を加振したときの各点の伝達関数は次のように表される。

$$\begin{pmatrix} G_{1,1}(\omega) \\ \vdots \\ G_{1,N}(\omega) \\ \vdots \\ G_{i,2N}(\omega) \end{pmatrix} = T_N \begin{pmatrix} A_{1,0}F_0(\omega) + C_{1,0}/\omega^2 + D_{1,0} \\ A_{1,1}F_1(\omega) + C_{1,1}/\omega^2 + D_{1,1} \\ A_{1,2}F_2(\omega) + D_{1,2} \\ \vdots \\ A_{i,N}F_N(\omega) + D_{i,N} \\ \bar{A}_{i,N-1}F_{N-1}(\omega) + D_{i,N+1} \\ \vdots \\ \bar{A}_{i,1}F_1(\omega) + \bar{C}_{i,1}/\omega^2 + D_{i,2N-1} \end{pmatrix} = T_N \begin{pmatrix} H_{1,0}(\omega) \\ \vdots \\ H_{i,2N-1}(\omega) \end{pmatrix} \quad \dots(7)$$

$$\text{ただし, } \begin{pmatrix} D_{1,0} \\ \vdots \\ D_{i,2N-1} \end{pmatrix} = T_N^{-1} \begin{pmatrix} d_{1,0} \\ \vdots \\ d_{i,2N-1} \end{pmatrix}$$

この式(7)は、伝達関数を角速度毎に実空間上でフーリエ変換したものに他ならない。このことから、実験によって得られた伝達関数を空間座標上でフーリエ変換することにより、点から点への伝達関数が、点からモード形への伝達関数に変換できることになる。この変換されたあとの伝達関数 $H_{i,n}(\omega)$ において、式(7)中で登場する $A_{i,n}, C_{i,n}, D_{i,n}$ の値を同定すればモデル化ができる。このモード解析は、モードが分離されているために1自由度のカーブフィットで行うことができる。実際には発生する波動は曲げ、捻り、圧縮等が同時に存在する場合が多いため、1自由度とまではいかないものの、モード解析時の自由度を大幅に下げることが可能である。

3. タイヤのモデル化への適用

ここでは提案した手法をタイヤに適用し、そのモデル化を行う。提案した手法によって実験で得られた伝達関数に対してモード同定を行い、特性行列としてモデルを算出する⁽⁴⁾⁽⁵⁾。特性行列としてモデル化を行うためには、解析周波数帯域においてモードを漏れなく正確に同定する必要がある。本手法はモードを次数ごとに分離して同定しているため、モード抜けが発生しにくく精度良い妥当な同定が可能となっている。

3.1 実験

実験対象のタイヤを図2に示す。タイヤサイズは185/65R14、ホイールはアルミ製であり、空気圧はゲージ圧で $2.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ とした。この実験対象をタイヤチューブの上に置き、ほぼ周辺自由状態とみなせる状態を実現して加振実験を行い、伝達関数を測定する。観測点は図3で示すようにトレッド面上に3列、16分割で48点、ホイール上に5点、計53箇所を選び、加振は観測点1001番と1002番の中間点に加振するためのアルミブロックを接着しておこなう。この加振点

を10000番とする。このとき得られた伝達関数の一例を図4に示す。

Fig.2 The tested tire

Fig.3 The measurement points

Fig.4 FRF between the radial directions of observing points
No.1001 and No.10000

3.2 提案した理論の適用

この実験によって得られた伝達関数に対して、式(7)に基づいてフーリエ変換を行う。式(9)によって表されるモードの次数は、円周方向への観測点分割数の半分の値までである。今回の実験では円周方向に16分割しているために $N=8$ までのモードを表すことができる。フーリエ変換は1001~1016番, 2001~2016番, 3001~3016番の3列の観測点列に対し、それぞれ円周方向、車軸方向、半径方向の応答をそれぞれ別に分けてから行う。ここで、例として10000番を半径方向に加振した際の1001~1016番の半径方向応答についてのモード別伝達関数の絶対値を図5に示す。

Fig.5 The decomposed FRFs in the radial direction of the grouped measurement points No.1000-1016

図5をみると、モードの分離ができていることがわかる。今回実験対象としたタイヤでは、300Hz以下の周波数帯域に存在するトレッド面の振動モードは、半径方向の曲げと半径方向への捻りを伴う車軸方向への曲げの2つがある。図5で各次数に現れている大きなピークは半径方向の曲げのモードであり、それよりも小さめに現れているピークが半径方向の捻りを伴う車軸方向への曲げのモードである。これらのピークに対してカーブフィットを行うことによりモード特性を同定する。

3.3 得られるモード特性

まず、対称性のある構造で発生する問題である固有値の重根について考える。タイヤのような円筒形の構造の場合、軸を含む平面に対して対称であるという幾何学的な特徴をもっている。構造が、ある平面に対して対称であり、その構造が持つモード形がその平面に対して対称でない場合、固有値が同一で、平面に対して対称移動したモード形をもつ重根のモードが存在する。しかし、加振実験によって同定されるモードは、

重解のうちの加振点を腹とするモード形の方だけである。そのためモデル化にあたり、重根のモードを生成する必要がある。本手法においては、トレッド面上に発生する定常波としてモードを同定するので、重根のモードを定常波の物理座標上における位相を $\pi/2$ ずらすことにより生成する。3次の半径方向曲げのモードにおける例を図6に示す。

Fig.6 The 3rd bending mode in radius direction and its symmetrical mode

次に解析可能な周波数帯域について考える。観測点の個数の制約により、今回表すことのできるモードの次数は8次までである。図7に示す半径方向曲げ8次のモードは固有振動数が264Hzである。これより高次の半径方向曲げのモード形を表すことはできない。よって、今回の適用例における解析周波数帯域は1~300Hzとする。また、この周波数帯域内ではホイール自身の振動モードは存在しないため、ここではホイールを剛体として取り扱う。

Fig.7 The 8th bending mode in radius direction at 264Hz

ホイールの応答について考える。図8は実験によって得られたホイール上の観測点1番の車軸方向自己応答である。120Hz以上の周波数帯域に複数ある「トレッド面の変位が2次以上のモード」が図8では表れていない。この解析においてはタイヤが十分に軸に対して対称であると考えられる。そのためトレッド面の変位が2次以上のモードはその対称性により、ホイールセンターにおける動きを引き起こさない。よって、

ホイール上の観測点におけるモード解析はホイールの動きのある数個のモードについてのみ行えばよい。

Fig.8 Auto-FRF of measurement point No. 1 in the radial direction

3.4 特性行列によるモデル化

300Hz までの周波数帯域において同定されたモードは、剛体モードが6個、ホイールの動きがある弾性振動モードが6個、半径方向曲げのモードが重根もあわせて13個、半径方向への捻りを伴う車軸方向への曲げのモード13個、内部空洞の空気による共振モード2個の合計40個であった。今回算出する特性行列の自由度は、ホイールセンター6自由度、トレッド面上 $48 \times 3 = 144$ 自由度、内部空気の2自由度の計152自由度とした。112個の剰余モードには軸対称であり、モード質量が同定されているホイールの動きのないモードにおけるモード質量の平均値となり、かつ互いに直交するモードを与え、特性行列を算出する。これは、著者らの既提案手法の理論³⁶⁾に基づいている。これにより算出される質量行列、粘性減衰行列、剛性行列の各成分は車軸に対して対称となる。実験によって得られた伝達関数を基に特性行列の算出する過程は自動化されたプログラムによって行っている。

4. 検証

4.1 周辺自由状態での比較

今回算出した特性行列は、周辺自由とみなせる状態で対象を支持した際の実験結果を基にモデル化を行っている。そこで、算出された特性行列が正しく実験値を表す事ができているかどうかを検証するために、特性行列から伝達関数を計算し、実験で求めた伝達関数と比較する。

図9は、実験値が10000番半径方向加振時の3009番半径方向応答、特性行列から算出した伝達関数は1001番加振時の3009番半径方向を表している。加振

点10000番と観測点1001番は円周方向に5cmほど離れているだけなので比較対象とした。この図を見ると、半径方向曲げ8次のモードがある270Hz付近まではよく適合していることがわかる。他の伝達関数も全般的に高い一致を見せており、この結果は通常困難を伴うタイヤのモード解析が正確に行われ、正しくモデル化できていることを示している。

また、同定結果が特性行列の形式で得られるので、固有値解析を行うことによって求まる固有振動数、モード減衰比を表1に示す。

Fig.9 FRF between points No.1001 and No.3009 in the radial direction under the free-free B.C.

Table 1 Natural frequencies and modal damping ratios obtained from identified matrices

Order	Frequency [Hz]	Damping
1	60.0	0.0214
2	98.7	0.0213
3	98.7	0.0213
4	103.3	0.0339
5	103.3	0.0339
6	111.6	0.0249
7	111.6	0.0249
8	118.9	0.0408
9	118.9	0.0408
10	125.9	0.0518
11	134.6	0.0228
12	134.6	0.0228
13	157.4	0.0307
14	157.4	0.0307
15	158.0	0.0231
16	158.0	0.0231
17	183.4	0.0223
18	183.4	0.0223
19	194.3	0.0347
20	194.3	0.0347
21	209.8	0.0226
22	209.8	0.0226
23	221.2	0.041
24	221.2	0.041
25	237.1	0.0243
26	237.1	0.0243
27	245.5	0.0351
28	245.5	0.0351
29	248.8	0.0054
30	248.8	0.0054
31	262.5	0.0351
32	262.5	0.0351
33	264.4	0.0233
34	289.0	0.0351

4.2 境界条件を変更した際の予測解析

算出された特性行列が振動解析を行うモデルとして妥当であるかを検討するために、境界条件を変更した際の予測解析を行い、実用的精度で予測が行えるかどうかを検証する。ここでは、ホイールセンターを固定し、かつ、接地状態の予測解析を周辺自由状態で同定したタイヤの特性行列から行う。このホイールセンター固定かつ接地状態の境界条件を特性行列中で表現するために、剛性行列にばねを付加する。ばねの強さはホイールセンター並進方向に $1.0 \times 10^6 \text{ N/m}$ 、回転方向に $1.0 \times 10^6 \text{ Nm}$ 、トレッド面上の観測点 1009, 2009 および 3009 番に均一にかつ総合剛性値が円周および車軸方向に共に $1.0 \times 10^7 \text{ N/m}$ 、半径方向に $5.0 \times 10^6 \text{ N/m}$ とした。このばねの付加された境界条件変更後の特性行列から伝達関数、モード特性を算出して境界条件変更後の動特性を予測する。

また、予測解析が妥当であるかを検証するための実験を行う。図 10 に示すように、ホイールセンターを固定して、観測点 1009, 2009, 3009 番が接地するように定盤に 300kgf の荷重で押し付けた状態で加振試験を行い、予測解析と比較を行う。

Fig.10 The tire under clamping boundary condition

予測された伝達関数と実験によって観測した伝達関数の比較を図 11 に示す。ここで、実験においての加振点は 10000 番であるが、特性行列上には 10000 番はないので、1001 番を加振点として代用する。図 11 a では観測点を 1001 番の半径方向、図 11 b は観測点を 1005 番の半径方向としている。

また、境界条件変更後の特性行列を固有値解析することにより予測したモード特性の一部と、それに対応する実験において同定された境界条件変更後の固有振動数とモード減衰比を図 12 に示す。実験における加振位置、方向の問題により励起されないモードや同定が困難であったモードがあり、対応が取れていない

モードも存在する。しかし、実験同定可能であったモードの固有振動数、モード減衰比を比較すると、予測結果と高い一致を示している。

図 11 a の自己応答だけではなく、図 11 b の様に加振点と観測点が離れており、加振方向と観測方向が垂直になっている伝達関数においても、ピークの位置と位相の予測は、200Hz 以下の周波数帯域で比較的精度良く予測解析が行われていることがわかる。若干、予測解析の減衰比が少なくなっているが、これは接地を表すためのばねに減衰を入れなかったことが一つの原因であると考えられる。

Fig.11-a The experimental and predicted FRFs to response point No.1001 in radial direction

Fig.11-b The experimental and predicted FRFs to response point No.1005 in radial direction

200Hz 以上の周波数帯域において予測値と実験値の一致度が低い原因の一つとしては、加振点が予測値では 1001 番、実験値では 10000 番を用いているために、トレッド面上を伝わる波動の波長が短くなる高次のモードでは、この加振点位置の違いによる励起されるモードの違いが際立ってくると考えられる。また、モデル同定の際に用いた伝達関数の周波数領域は 300Hz であるので、周辺自由状態での 300Hz 以上の

1st		2nd

Prediction	Experiment	Prediction	Experiment
54.57Hz	48.85Hz	69.62Hz	Not available
1.51%	1.67%	1.55%	
3rd		4th

Prediction	Experiment	Prediction	Experiment
84.76Hz	91.04Hz	86.92Hz	Not available
2.23%	3.19%	3.20%	
5th		6th

Prediction	Experiment	Prediction	Experiment
92.71Hz	88.74Hz	107.5Hz	Not available
2.68%	2.50%	2.60%	
7th		8th

Prediction	Experiment	Prediction	Experiment
121.5Hz	120.6Hz	124.8Hz	Not available
2.39%	2.55%	2.80%	
9th		10th

Prediction	Experiment	Prediction	Experiment
133.3Hz	Not available	147.1Hz	146.1Hz
2.31%		2.29%	2.16%
11th		12th

Prediction	Experiment	Prediction	Experiment
156.6Hz	149.5Hz	157.7%	Not available
2.87%	3.77%	2.32%	

Fig. 12 The first twelve predicted modes under a clamping
boundary condition

周波数帯域にあるモードが、境界条件の変化により 300Hz 以下に影響を与えている可能性もある。よって、解析可能周波数を上げるためには、観測点の円周方向分割数を増やすことにより、より高次のモード形で表現できるようにする必要がある。

5. 結 論

円形および円筒形構造物における新しい実験モード解析のモード特性同定法を提案し、特性行列同定法と結合することで新しい実験的モデル化手法を開発した。その手法を用い、周辺自由状態における乗用車用タイヤの加振試験データをもとにタイヤの動特性を特性行列としてモデル化した。実用的に十分な精度かつ各種予測解析に利用可能であるモデル化が行われているかを検証するために、同定された特性行列による境界条件変更時の予測解析を行い、モデルとしての有効性を示した。

文 献

- (1) モード解析ハンドブック編集委員会「モード解析ハンドブック」, コロナ社, 2000
- (2) M.V. Blundell, "The modeling and simulation of vehicle handling Part 3: tyre modelling", Proc Instn Mech Engrs Vol 214 Part K, 2000,
- (3) S.C. Huang, "The vibration of rolling tyres in ground contact", Int. J. of Vehicle Design, vol. 13, no. 1, 1992, pp.78-95.
- (4) Okuma M., W. Heylen, Matsuoka H., P. Sas, "Identification and Prediction of Frame Structure Dynamics by Spatial Matrix Identification Method", ASME J. Vibr. Acoust., Vol.123, July 2001, pp.390-394.
- (5) 松岡久祥, 大熊政明「モード解析による特性行列算出の手法」, 日本機械学会論文集(C編)67巻 655号(2001-3), pp.648-652.
- (6) 松岡久祥, 大熊政明「モード解析による特性行列算出とその有効性」, 日本機械学会論文集(C編)67巻 664号(2001-12), pp.3765-3770.