擬規準座標変換法による回転軸と基礎架台の連成振動解析*

(第2報, 不つりあい応答解析)

吉田 豊美^{*1}, 高木 亨之^{*1}
岡部 明^{*2}, 松下 修己^{*3}

Coupled Vibration Analysis of Rotor and Foundation Using Quasi-Modal Transformation (2nd Report, Unbalance Response Analysis)

Toyomi YOSHIDA^{*4}, Michiyuki TAKAGI,
Akira OKABE and Osami MATSUSHITA

^{**} Mechanical Engineering Research Laboratory, Hitachi, Ltd.,
502 Kandatsu, Tsuchiura-shi, Ibaraki, 300-0013 Japan

To estimate the vibration of rotating shafts like turbine-generator sets, the rotor vibration analysis must include the vibration characteristics of the foundation. In this paper we propose a method of analyzing the vibration of a coupled rotor-foundation system. Called a quasi-modal technique, it is based on the same concept as the well known modal synthesis method. It provides a reduced model of an actual system using a combination of eigen modes of an inner system restricted at the bearings plus deflection modes created when inputting the load at the boundary points. A rotor system and a foundation system are each reduced separately by this technique, and the reduced models are then coupled at the bearing boundary points. According to this procedure, we developed computer code for performing vibration analysis of an entire system. In our previous paper, we proved the effectiveness of complex eigen value analysis code. In this paper we propose code for the response analysis of rotor imbalance. We show calculation examples for a coupled turbine-generator-foundation system.

Key Words: Coupled Vibration, Quasi-Modal Transformation, Rotor Vibration, Foundation

1. 緒 論

タービン発電機や遠心圧縮機などの回転機械では工期短縮や建設費節減などの観点から、基礎や架台など支持構造系の柔構造化が図られている。このような回転機械の振動特性を高精度に予測するためには、支持構造系の振動特性を含めた連成振動解析が必須となる。回転軸系と基礎架台系との連成を考慮した振動解析を行なうためには、回転機械特有のジャイロ効果および軸受部などの減衰の影響を考慮しなければならず、不つりあい応答解析においても全回転数域での複素固有値解析が必要になる。ところが、タービン発電機などの多軸受・多スパン軸系では、梁要素でメッシュ分割しても数百節点となるため、基礎架台などの構造物

と併せると解析データが膨大となる。そのため、回転軸と構造系を含む回転機械全体の振動解析では、計算機の記憶容量が大きくなり演算速度も速くなった現在でさえ、大次元での複素固有値解析は容易ではない。

このような系の解析は、架台や基礎の剛性を実測や変形解析などからばね定数を求め、軸受油膜ばねと直列結合したモデルで軸系の振動解析するのが一般的である^{(1)~(3)}。また、構造系の大規模振動解析ではいわゆる部分構造合成法⁽⁴⁾の考えを適用して、軸系の特性マトリックスと構造系の固有ベクトルを合成する連成振動解析法^{(5)~(6)}が報告されている。さらに、部分構造法の考え方に加振試験等の結果を反映させて物理振動モデルを作成する方法も報告されている⁽⁷⁾。

一方、著者らはこれまで、変形モードと拘束モードを用いた擬規準座標変換法(減衰も考慮できることが特徴)にて座標変換し、縮小モデルによる回転軸系の複素固有値解析や時刻歴応答解析および不つりあい応答解析を報告し、その有効性を示した^{(8)~(10)}。

* 原稿受付 2002年4月12日。

^{*1} 正員, (株)日立製作所機械研究所(☎300-0013 土浦市神立町502)。

^{*2} 正員, (株)日立製作所火力・水力事業部(☎317-8511 日立市幸町3-1-1)。

^{*3} 正員, 防衛大学校機械工学教室(☎239-8686 横須賀市走水1-10-20)。

E-mail: toyomi@merl.hitachi.co.jp

前報⁽¹⁾では、擬規準座標変換法を回転軸系と構造系の連成固有値解析に適用し、固有値解析における本縮小モデル化手法の有効性を示した。本報では、回転軸・基礎架台系の不つりあい応答解析に適用し、その定式化と解析手順の概要を述べ、簡易モデルを用いて本手法の有効性を示す。さらに、より複雑な回転軸・基礎架台系へ適用し、本手法の実用性を示す。

2. おもな記号

$[B_f], [B_b], [B_{cf}], [B_{cb}]$: 擬規準座標変換後の行列
 $[A_{11f}], [A_{11b}], [A_{c11f}], [A_{c11b}]$

: 擬規準座標変換後の行列

添字 c : 基礎架台を意味する

添字 f, b : f は前向き振動成分, b は後向き振動成分を意味する

$[M], [M_c]$: 質量行列

$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$: 軸剛性行列 ($K'_{21} = K_{12}$)

$[K_f(\Omega)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_f(\Omega) \end{bmatrix}, [K_b(\Omega)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_b(\Omega) \end{bmatrix}$
 : 軸受剛性行列(回転数依存型)

$[C_f(\Omega)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_f(\Omega) \end{bmatrix}, [C_b(\Omega)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_b(\Omega) \end{bmatrix}$
 : 軸受減衰行列(回転数依存型)

$\{U\}$: 不つりあい力ベクトル $= \{U_1, U_2\}$

$[C_g]$: ジャイロ作用行列

$k_2^*, k_{c2f}^*, k_{c2b}^*$: 境界点での等価なばね定数

$[K_c]$: 架台の剛性行列

$\{s\}, \{s_c\}$: 擬規準座標ベクトル

$\{s\} = \{s_1, s_2\}^t, \{s_c\} = \{s_{c1}, s_{c2}\}^t$

s_1, s_{c1} : 拘束モード(ϕ)に対する重み値

s_2, s_{c2} : 変形モード(δ)に対する重み値 $= z_2, z_{c2}$

$\{\ddot{z}\}, \{\ddot{z}_c\}, \{\ddot{u}\}$: 加速度ベクトル

$\{\dot{z}\}$: 速度ベクトル

$\{z\}, \{z_c\}$: 複素変位ベクトル $= \{z_1, z_2\}^t, \{z_{c1}, z_{c2}\}^t$

z_1, z_{c1} : 内部座標の変位ベクトル

z_2, z_{c2} : 境界座標の変位

$\delta, \delta_c, \delta_f, \delta_{cb}$: 強制変位時の変形モード

$\phi_f, \phi_b, \phi_{cf}, \phi_{cb}$: 内部座標系の固有ベクトル

$*$: * の共役

Ω : 回転速度

$\{f_c\}, \{f_{c2}\}$: 強制力 $= \{f_{c1}, Q_{c2}\}^t, \{f_{c2}, Q_{c2}\}^t$

Q_2, Q_{c2}, Q_{c2} : 節点反力

i : 虚数単位 $= \sqrt{-1}$

Fig.1 Multi-disk multi-bearing rotor-Foundation system

3. 回転軸系の運動方程式

図1に示すような多軸受多円板回転軸・基礎架台系を解析の対象とする。空間固定座標系 $O-XYE$ (E は軸方向座標を示す) からみた回転軸系の変位を, $O-XY$ を複素平面として変位ベクトル $\{z\}$ と記す。このとき回転軸系の運動方程式は, 軸受の動特性が異方性を持つ場合に次のように表わされる。

$$[M] \ddot{z} + i\Omega [C_g] \dot{z} + [K] z + [K_f(\Omega)] z + [K_b(\Omega)] z + [C_f(\Omega)] \dot{z} + [C_b(\Omega)] \dot{z} = \Omega^2 \{U\} e^{i\Omega t} \quad (1)$$

動特性が種々に変化する軸受部を境界座標とし, その変位ベクトルを $\{z_2\}$ とする。それ以外は内部座標で変位ベクトル $\{z_1\}$ と記す。式(1)を内部と境界のそれぞれの座標系に分解すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} + i\Omega \begin{bmatrix} C_{g1} & 0 \\ 0 & C_{g2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_f(\Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_b(\Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_f(\Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_b(\Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \Omega^2 e^{i\Omega t} \quad (2)$$

また, 不つりあい振動応答を

$$\{z\} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{1f} \\ z_{2f} \end{bmatrix} e^{i\Omega t} + \begin{bmatrix} \bar{z}_{1b} \\ \bar{z}_{2b} \end{bmatrix} e^{-i\Omega t} \quad (3)$$

とおき, 式(3)を式(2)へ代入すると前向きおよび後向き成分の振幅を求める次式を得る。

$$-\Omega^2 \begin{bmatrix} M_1 + C_{g1} & 0 \\ 0 & M_2 + C_{g2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1f} \\ z_{2f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1f} \\ z_{2f} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_f(\Omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{1f} \\ z_{2f} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_b(\Omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{1b} \\ z_{2b} \end{Bmatrix} \\
& + i\Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_f(\Omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{1f} \\ z_{2f} \end{Bmatrix} + i\Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_b(\Omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{1b} \\ z_{2b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \Omega^2 \\
& - \Omega^2 \begin{bmatrix} M_1 - C_{g1} & 0 \\ 0 & M_2 - C_{g2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{1b} \\ z_{2b} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{1b} \\ z_{2b} \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}_b(\Omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{1f} \\ z_{2f} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}_f(\Omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{1b} \\ z_{2b} \end{Bmatrix} \\
& + i\Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}_b(\Omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{1f} \\ z_{2f} \end{Bmatrix} + i\Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}_f(\Omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{1b} \\ z_{2b} \end{Bmatrix} = \{0\}
\end{aligned} \quad (4)$$

前向き成分については、境界座標を拘束した内部系の前向き不減衰危険速度を求める実固有値問題

$$\Omega^2 [M_1 + C_{g1}] \{\phi_f\} = [K_{11}] \{\phi_f\} \quad (5)$$

から不減衰危険速度モード $\{\phi_f\}$ を求め、後向き成分については、境界座標を拘束した内部系の後向き不減衰危険速度を求める実固有値問題

$$\Omega^2 [M_1 - C_{g1}] \{\phi_b\} = [K_{11}] \{\phi_b\} \quad (6)$$

から不減衰危険速度モード $\{\phi_b\}$ を求める。変形モードは、境界点を静的に単位だけ強制変位させたときのモード $\{\delta\}$ を用いる。このときの等価ばね定数を k_2^* とすると次式が成立する。I は単位行列を表す。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ k_2^* \end{Bmatrix} \quad (7)$$

これらのモードを用いて前向き・後向き成分の応答は

$$z_f = \begin{Bmatrix} z_{1f} \\ z_{2f} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_f & \delta \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{1f} \\ s_{2f} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$z_b = \begin{Bmatrix} z_{1b} \\ z_{2b} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_b & \delta \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{1b} \\ s_{2b} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

の擬規準座標変換によって定義される。式(8)と式(9)の変換を式(4)へ代入し、合同変換を施すとつりあい応答は次のようになる。

$$\begin{aligned}
& -\Omega^2 [B_f] \{s_f\} + \begin{bmatrix} A_{11f} & 0 \\ 0 & k_2^* + k_f + i\Omega c_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{1f} \\ s_{2f} \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_b + i\Omega c_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{1b} \\ s_{2b} \end{Bmatrix} = \Omega^2 \begin{Bmatrix} \phi_f' U_1 \\ \delta' U_1 + U_2 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Omega^2 [B_b] \{s_b\} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}_b + i\Omega \bar{c}_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{1f} \\ s_{2f} \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} A_{11b} & 0 \\ 0 & k_2^* + \bar{k}_f + i\Omega \bar{c}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{1b} \\ s_{2b} \end{Bmatrix} = \{0\}
\end{aligned} \quad (10)$$

以上の内容は文献(10)に詳しい。

4. 基礎架台系の運動方程式

基礎架台系を有限要素でモデル化すると運動方程式は一般的に次のように表わされる。

$$[M_c] \{\ddot{u}\} + [K_c] \{u\} = \{f_c\} \quad (11)$$

ここでは、減衰が小さいと考え一旦無視して以下の議論を進めることとし、連成系の定式化の段階で構造系のモード減衰比または外部減衰を設定する。変位ベクトル $\{u\}$ は X 方向変位 x_c と Y 方向変位 y_c を縦に並べたベクトルである。式(11)を回転軸系と同様に空間固定座標系 $O-XY\Xi$ (Ξ は軸方向座標を示す) からみた運動方程式の形で表す。基礎架台系の変位も $O-XY$ を複素平面として変位ベクトル $\{z_c\} = \{x_c\} + i\{y_c\}$ と記す。このとき運動方程式は次のようになる。

$$[M_{cf}] \{\ddot{z}_c\} + [M_{cb}] \{\ddot{\bar{z}}_c\} + [K_{cf}] \{z_c\} + [K_{cb}] \{\bar{z}_c\} = \{f_{cz}\} \quad (12)$$

動特性が種々に変化する回転軸との結合部(軸受部)を境界座標とし、その変位ベクトルを $\{z_{c2}\}$ とする。

それ以外は内部座標で変位ベクトル $\{z_{c1}\}$ と記す。式

(12) を内部と境界のそれぞれの座標系に分解すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} M_{c11f} & M_{c12f} \\ M_{c21f} & M_{c22f} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_{c1} \\ \ddot{z}_{c2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{c11b} & M_{c12b} \\ M_{c21b} & M_{c22b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{z}}_{c1} \\ \ddot{\bar{z}}_{c2} \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} K_{c11f} & K_{c12f} \\ K_{c21f} & K_{c22f} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{c1} \\ z_{c2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{c11b} & K_{c12b} \\ K_{c21b} & K_{c22b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{z}_{c1} \\ \bar{z}_{c2} \end{Bmatrix} \\
& = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_{cz2} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \quad (13)$$

つりあい力は回転軸系に働き、基礎架台系は軸受ジャーナル振動を介して加振されるため、式(13)では境界点の反力 $\{Q_{cz2}\}$ が加振力として定義される。また、回転軸によって励起される振動応答を

$$\{z_c\} = \begin{Bmatrix} z_{c1} \\ z_{c2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_{c1f} \\ z_{c2f} \end{Bmatrix} e^{i\Omega t} + \begin{Bmatrix} \bar{z}_{c1b} \\ \bar{z}_{c2b} \end{Bmatrix} e^{-i\Omega t} \quad (14)$$

とおき、式(14)を式(13)へ代入すると前向きおよび後向き成分の振幅を求める次式を得る。

$$\begin{aligned}
 & -\Omega^2 \begin{bmatrix} M_{C11f} & M_{C12f} \\ M_{C21f} & M_{C22f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{C1f} \\ z_{C2f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{C11f} & K_{C12f} \\ K_{C21f} & K_{C22f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{C1f} \\ z_{C2f} \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_{C2f} \end{bmatrix} \\
 & -\Omega^2 \begin{bmatrix} M_{C11b} & M_{C12b} \\ M_{C21b} & M_{C22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{C1b} \\ z_{C2b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{C11b} & K_{C12b} \\ K_{C21b} & K_{C22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{C1b} \\ z_{C2b} \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_{C2b} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (15)$$

前向き成分については、境界座標を拘束した内部系の前向き固有値を求める固有値問題

$$\omega^2 [M_{C11f}] \{\phi_{Cf}\} = [K_{C11f}] \{\phi_{Cf}\} \quad (16)$$

から固有振動モード $\{\phi_{Cf}\}$ を求め、後向き成分については、境界座標を拘束した内部系の後向き固有値を求める固有値問題

$$\omega^2 [M_{C11b}] \{\phi_{Cb}\} = [K_{C11b}] \{\phi_{Cb}\} \quad (17)$$

から固有振動モード $\{\phi_{Cb}\}$ を求める。変形モードは、境界点を静的に単位だけ強制変位させたときのモード $\{\delta_c\}$ を用いる。このときの等価ばね定数を k^*_{c2} とすると次式が成立する。

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} K_{C11f} & K_{C12f} \\ K_{C21f} & K_{C22f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{Cf} \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k^*_{c2f} \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} K_{C11b} & K_{C12b} \\ K_{C21b} & K_{C22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{Cb} \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k^*_{c2b} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (18)$$

これらのモードを用いて前向き・後向き成分の応答は

$$z_{Cf} = \begin{bmatrix} z_{C1f} \\ z_{C2f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{Cf} & \delta_{Cf} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{C1f} \\ s_{C2f} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$z_{Cb} = \begin{bmatrix} z_{C1b} \\ z_{C2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{Cb} & \delta_{Cb} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{C1b} \\ s_{C2b} \end{bmatrix} \quad (20)$$

の擬規準座標変換によって定義される。式(19)と式(20)の変換を式(15)へ代入し、合同変換を施すと振動応答は次のようになる。

$$-\Omega^2 [B_{Cf}] \begin{bmatrix} s_{Cf} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{C11f} & 0 \\ 0 & k^*_{c2f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{C1f} \\ s_{C2f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_{C2f} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$-\Omega^2 [B_{Cb}] \begin{bmatrix} s_{Cb} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{C11b} & 0 \\ 0 & k^*_{c2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{C1b} \\ s_{C2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_{C2b} \end{bmatrix} \quad (22)$$

5. 連成系の運動方程式

回転軸系と基礎架台系を結合したとき、前向き応答および後向き応答に対する i 番目の回転軸境界点の反力 Q_{2if} および Q_{2ib} は複素形式で

$$\begin{aligned}
 -Q_{2if} &= (k_f + i\Omega c_f)_i (s_{2if} - s_{C2if}) + (k_b + i\Omega c_b)_i (s_{2ib} - s_{C2ib}) \\
 -Q_{2ib} &= (\bar{k}_b + i\Omega \bar{c}_b)_i (s_{2if} - s_{C2if}) + (\bar{k}_f + i\Omega \bar{c}_f)_i (s_{2ib} - s_{C2ib})
 \end{aligned} \quad (23)$$

と与えられる。基礎架台系についても同様に前向き応答および後向き応答に対する i 番目の架台境界点の反力 Q_{C2if} および Q_{C2ib} が複素形式で

$$\begin{aligned}
 -Q_{C2if} &= (k_f + i\Omega c_f)_i (s_{C2if} - s_{2if}) + (k_b + i\Omega c_b)_i (s_{C2ib} - s_{2ib}) \\
 -Q_{C2ib} &= (\bar{k}_b + i\Omega \bar{c}_b)_i (s_{C2if} - s_{2if}) + (\bar{k}_f + i\Omega \bar{c}_f)_i (s_{C2ib} - s_{2ib})
 \end{aligned} \quad (24)$$

と与えられる。よって、擬規準変換後の回転軸系と基礎架台系を結合した不つりあい応答は、図2に示すような形の行列構造となる。

各回転軸毎に境界点の反力を定義し、図2の運動方程式を解くことによって、回転軸系に不つりあいがあるときの基礎架台との連成振動応答を求めることができる。求めた擬規準座標系のベクトル s_f, s_b, s_{cf} および s_{cb} は、式(8)、式(9)、式(19)および式(20)を使って回転軸系および基礎架台系の元の物理座標系での解に変換する。

Fig. 2 Structure of quasi-modal equation

Table 1 Program specifications

Rotor System	Element	Beam
	Rotating Inertia	Considered
	Damping	Considered
	Number of Restriction Modes	Select so as to cover considered critical speeds
Foundation System	Element	Shell, Solid, Beam
	Rotating Inertia	—
	Damping	Input
	Coordinates of System (for Coupled)	X & Y [Mass, Stiffness]
	Number of Restriction Modes	Select so as to cover considered critical speeds
Boundary Condition	Element	Spring & Damping
	Number of Boundaries	Not limited

Fig. 3 Flow of coupled unbalance response analysis program

また次元数は固有ベクトルの数と境界座標の和であるから、連成系の振動解析は相対的に低次元の問題に移っている。

6. プログラム概要

基礎架台系は、予め構造振動解析プログラムを利用して、軸受などの境界点を拘束した固有値解析および変形解析を行っておく。これらの結果をもとに前向きと後ろ向きの振れ回りの表現の擬規準縮小系に変換す

る。回転軸系は、本プログラムにより不減衰危険速度解析および変形解析を行ない、基礎架台系と同様の縮小系に変換する。その後、基礎架台系の縮小データを取り込んで回転軸系縮小データと結合する。境界点の結合定数のみを回転速度毎に逐次定義し直し、連成系の不つりあい応答解析を行なう。概略仕様を表1に、一連の解析の流れを図3に示す。構造系との連成は水平および垂直方向であり、軸方向は無視している。

7. 数値計算例

(1) 三円板回転軸系

本解析法の妥当性の検証のための計算モデルを図4に示す。回転軸系モデルは全長1062mm、軸径40mmの軸に直径200mm、厚さ20mmの円板を3個、等間隔に取り付けてある。この軸系諸元は文献(12)に詳しく、軸受動特性は無限小幅近似理論(軸受幅比: $L/D=0.6$, 軸受すきま比: $C/R=0.01$)で求めたものを使用した。基礎架台系は両端を単純支持した全長1062mmで40mm角の一樣梁モデルとした。回転軸系および基礎架台系は軸方向を19分割している。回転軸系および基礎架台系を結合する点がそれぞれの境界点であり、図中、すべり軸受位置となる。

Fig. 4 3-disk rotor-foundation system

本計算例では、回転軸系は軸受点を拘束した不減衰危険速度モード4本(83.4Hz, 324.7Hz, 684.3Hz, 1027.5Hz) + 軸受点に順に単位変形を与えた変形モード2本、基礎架台系は軸受点を拘束した固有モード4本(272.2Hz, 272.2Hz, 756.9Hz, 756.9Hz) + 軸受点に順に単位変形を与えた変形モード2本を用いて自由度を縮小したモデルとなっている。このとき、基礎架台系は軸方向の自由度を拘束している。架台構造系の減衰は外部減衰とし、回転軸系との結合点の軸受減衰係数が定義される。

回転軸系の中央円板に不つりあい(質量 10^{-3} kg, うでの長さ80mm, 位相 45° および質量 1.4×10^{-3} kg, うでの長さ80mm, 位相 -140°)を付加し、回転軸系中央円板部(図5(a)矢印部)および架台構造系中央部

(図5(c) 矢印部)のつくりあい応答曲線を求めた結果を図5に示す。図5(a)は回転軸系単独の場合の結果で、架台構造系が非常に剛な場合に相当する。軸受動特性の異方性のために水平Y方向(破線)と垂直X方向(実線)に1次(図中①, ②)および2次(図中③, ④)のピークが現われている。図5(b)は本手法により架台構造系を縮小して回転軸系と結合した連成系の結果で、図5(a)と同じセンサー位置で回転軸系の応答振幅を絶対変位で見ている。回転軸単独系に比べて1次のピーク周波数が低下している。また、新たなピーク(※)も見られる。これらは、架台構造系の振動特性との相互作用によるものである。特に、新たなピーク(※)は架台の固有値(272.2Hz:境界点拘束のとき→82.1Hz:境界点非拘束のとき)であることが、図5(c)に示した連成系の架台構造系中央部の応答振幅からも確認できる。2次のピークは架台構造系には見られないことから回転軸系のみが振動しているピークであると考えられる。

Fig. 5 Unbalance response curve of 3-disk rotor-foundation system

以上の結果を確認するためにこれらピーク時の回転軸系と架台構造系の振動モードを図6に示す。図6は垂直X方向振動モード(実線)と水平Y方向振動モード(破線)を同一平面上に重ねて表示したものである。上部は回転軸系の振動モードを示し、下部は架台構造

系の振動モードを示している。①~④と※は図5のピーク番号に対応している。1次のピーク(①, ②)と※のピークは回転軸と架台構造系共に振動している様子が確認できる。特に、※のピークは架台構造系が1次の曲げモードで振動しているために回転軸系の振動が励起されたことがわかる。また、2次のピーク(③, ④)は回転軸系のみが1次の曲げモードで振動しており、回転軸系だけにピークが現われていることと一致する。

Fig. 6 Deflection mode of 3-disk rotor-foundation system

次に、本縮小法の計算精度を表2に示す。計算精度は、有限要素でモデル化し縮小せずにそのままつくりあい応答曲線を求めた結果に対する本縮小法の一致度を誤差として表示している。回転軸系と架台構造系のピーク時の振幅、位相および周波数の比較を行なった。

回転軸系が主に振動するピークについては、非常によく一致している。架台構造系が主に振動するモードのピークは、回転軸系に比べてやや誤差が大きくなるが、最大でも6%以内であり応答解析の精度としては十分と考える。さらに精度を上げるには、採用する固有モードの数を増やすかメッシュ分割を細かくすれば良い。

Table2 Precision of quasi-modal model

	No.	Quasi-Model	FEM Model	Error (%)
Rotor	①	9.91 μm $\angle$ -352° (48.5Hz)	9.9 μm $\angle$ -351° (48.5Hz)	0.1 $\angle$ 0.3 (0.0)
	②	25.2 μm $\angle$ -288° (59.6Hz)	25.2 μm $\angle$ -282° (59.8Hz)	0.0 $\angle$ 2.1 (-0.3)
	※	23.1 μm $\angle$ -296° (99.1Hz)	24.1 μm $\angle$ -297° (102Hz)	-4.1 $\angle$ -0.3(-2.8)
	③	7.79 μm $\angle$ -121° (135Hz)	8.01 μm $\angle$ -121° (135Hz)	-2.7 $\angle$ 0.0 (0.0)
	④	13.3 μm $\angle$ -44.2° (155Hz)	13.3 μm $\angle$ -44.2° (155Hz)	0.0 $\angle$ 0.0 (0.0)
Foundation	①	5.08 μm $\angle$ -350° (49.0Hz)	4.84 μm $\angle$ -343° (48.5Hz)	5.0 $\angle$ 2.0 (1.0)
	②	26.0 μm $\angle$ -281° (59.4Hz)	23.7 μm $\angle$ -298° (60.1Hz)	4.3 $\angle$ -5.7(-1.2)
	※	33.4 μm $\angle$ -108° (98.8Hz)	34.6 μm $\angle$ -109° (101Hz)	-3.5 $\angle$ -0.9(-2.2)

Fig. 8 Foundation model

(2) タービン軸系

回転軸系としてロードカップリング(L/C)を介して減速機と一体となった全長約5.6mのタービン軸系を対象とする。回転軸系単体を梁要素でメッシュ分割した計算モデルを図7に示す。軸受位置は全部で5ヶ所で左から#1～#5の表示の位置である。減速機が3

ヶ所、タービンが2ヶ所を軸受で支持されている。それぞれ油膜のばね、ダンパとサポート部のばね、ダンパ(破線部)が直列に結合された2段軸受のモデル化となっている。メッシュ分割後の総節点数は115である。境界点は軸受部となるため、回転軸系は油膜軸受の上下の節点が物理座標のまま残る。回転軸系はこれら10点の境界点を同時に拘束した不減衰危険速度モード10本と各境界点に順に単位変形を加えた変形モード10本を用いて縮小される。

タービン軸系が図8に示すような柔軟な架台構造系の上に設置されている場合の連成系の振動特性を考える。架台構造系はI型梁要素でメッシュ分割している。総節点数は397である。回転軸系との結合点は図中#1～#5で示した部分である。縮小モデルは、これら5点の境界点を同時に拘束した固有モード120本と各境

Fig.9 Unbalance response curve of turbine-foundation system

界点に順に単位変形を加えた変形モード5本を用いて作成される。本計算例では、減衰は外部減衰とし、結合要素であるサポート部で定義(減衰係数=1.0)した。

回転軸系につりあいを付加(図7の節点番号70と103の位置)してつりあい応答曲線を求めた結果を

図9に示す。図9は#5軸受の応答振幅値である。図9(a)は回転軸系単体の結果である。架台構造系が非常に剛な場合に相当する。軸受油膜特性に異方性があるため水平Y方向と垂直X方向にそれぞれピークが現われている。図9(c)に連成系の#5軸受の架台構造系側の振幅を示す。水平Y方向と垂直X方向がともに同じ振幅であるため実線と破線が重なっている。図9(b)は連成系の応答振幅値で#5軸受の回転軸側の振幅を架台側境界点から見た相対値で表わしてある。架台構造系の影響で 3000min^{-1} 付近のピークが低下し、 3700min^{-1} と 4600min^{-1} 付近に新たにピークが見られる。 7000min^{-1} 付近の振幅の変化は回転軸側と架台構造側が逆相で振れているためである。

また、軸の回転速度を一定として、架台構造系の剛性を変化させたときの連成系の複素固有値の変化を図10に示す。このとき、サポート部の減衰係数を定義せずに、架台構造系のモード減衰比を一律0.01とした。同図には回転軸系が主に振動するモードの固有値を載せてある。架台剛性比1が通常材料定数で計算したときの値である。架台剛性比を1000程度に設定すると回転軸系単体の固有値に一致する。減速機のサポート部のばね定数が大きい場合、架台剛性比が小さくなくても減速機が主体として振れるモードの低下は見られない。架台剛性比を小さくしていくと▲印で示したような架台剛性の影響を受けた固有値が増えたと共にタービン部の剛体モードの固有値の低下が見られる。これらの固有値の変化が不釣り合い応答計算結果にも表れているものと考えられる。

Fig.10 Complex eigen value of quasi-modal model

8. 結 論

以上をまとめると次のようになる。

(1) 基礎架台系を含めた回転軸系の不釣り合い応答解析を効率よく行なうために、擬規準座標変換法を基礎

架台系に拡張し、定式化と解析の手順を明らかにした。
(2) 簡易モデルを用いて不釣り合い応答計算を実施し、有限要素法による一体モデルとの比較を行なった結果、回転軸・基礎架台系の4次の危険速度までについてピーク値の誤差が6%以下であり、本手法の有効性を確認した。

(3) 実際の回転軸・基礎架台系に本手法を適用した。回転軸の振動特性に及ぼす架台構造系の影響を十分表現できており、実用性についても確認できた。

参考文献

- (1) 白木万博, 他6名, 回転機械の柔構造基礎架台の設計・据付技術, 三菱重工技報, Vol.20 No.6, (1983-11), 632-643.
- (2) Gasch, R. Vibration of large turbo-rotors in fluid-film bearings on an elastic foundation. Journal of Sound and Vibration. 1976, Vol.47 No.1, 53-73.
- (3) E Kramer, L Eckert, Comparison between computed and measured vibrations of turbomachines. International Conf. Vibration in Rotating Machinery, IMechE, C262/88, Edinburgh, UK, 1988.
- (4) 長松昭男, モード解析, 培風館, (1985).
- (5) 郭士傑, 他2名, 部分構造合成法による回転機械のロータとケーシングの連成振動解析, 機論, 96-5, B(1996), 273-276.
- (6) A D Garrad, A finite element approach to the aeroelastic analysis of flexible rotors attached to flexible supports. International Conf. Vibration in Rotating Machinery, IMechE, C298/88, Edinburgh, UK, 1988.
- (7) 松佐彰一, 他3名, 単純振動物理モデルによる多自由度軸振動解析, 機論, 67-654, C(2001-2), 291-299.
- (8) 松下修己, 他2名, 擬規準座標変換法による回転軸系の振動解析, 機論, 48-431, C(1982), 925-934.
- (9) Matsushita, Osami, Okabe, Akira, Computer Aided Engineering for Rotordynamics Quasi-modal Model Based Rotor Vibration Analysis. Proc. Asia-Pacific Vibration Conference, 1991.
- (10) 松下修己, 他1名, 弾性ロータの回転時数比応答解析, 機論, 50-452, C(1984), 626-634.
- (11) 吉田豊美, 他3名, 擬規準座標変換法による回転軸と基礎架台の連成振動解析(第1報 複素固有値解析), 機論, 68-668, C(2002).
- (12) 菊地勝昭, 多軸受多円板回転軸系の不釣り合い振動の解析, 機論, 72-610(昭44-11), 1556-1563