不規則雑音をうける計測データからのオンラインパラメータ同定と その応用：オンライン・ソフトセンサの構築*

高 津 知 司^{*1,*2}, 大 住 晃^{*3}

On-line Parameter Identification from Noisy Measurement Data and Its Application : Construction of an On-line Soft Sensor

Tomoji TAKATSU^{*4,*5} and Akira OHSUMI^{*4}

^{*4} Department of Mechanical and System Engineering, Graduate School of Science and Technology,
Kyoto Institute of Technology, Matsugasaki, Sakyo, Kyoto, 606-8585 Japan

^{*5} Japan Construction Information Center Foundation

An on-line identification problem is investigated, as one of the inverse problems, for estimating unknown model parameters which should be determined to establish a valid mathematical model. The system considered in this paper is the linear dynamical system which is subjected to random disturbance. The on-line identification is realized by splitting the procedure into state estimation and parameter identification. The former is carried out by the Kalman filter, and the latter is accomplished by modifying the conventional Gauss-Newton-based algorithm. The basic idea of the identification is to introduce the principle of contraction mappings in order to guarantee the stability of the algorithm. The resulting algorithm consists of the two procedures which are processed on-line alternately. In order to show the efficacy of the proposed algorithm, simulation studies and experiments are shown by applying the theory to an inverse problem of determining physical parameters of the cantilevered beam model.

Key Words: On-line Parameter Identification, Gauss-Newton Algorithm, Random Data, Kalman Filter, Flexible Structure, Non-destructive Test, Inverse Problem, Soft Sensor

1. 緒 言

近年、機械工学をはじめ航空・宇宙工学や建築・土木工学など多くの分野で用いられている柔軟構造物は軽量かつコンパクトである反面、構造上振動が発生しやすく減衰し難いという欠点があるので、その制振は重要な問題となっている。さらに、制振のみならず設計・施工、維持管理等においても、その各種物理パラメータの値を正確に把握することが求められている。

著者のひとり、構造物として片持はりを想定し、その物理パラメータであるヤング率と空気および内部減衰係数の3つのパラメータを、レーザ・センサにより得られたはりの振動データから同時に同定するアルゴリズムをすでに提案している^{(1)~(3)}。

ところで、長大橋のような社会資本の維持管理にお

いては、何らかの異常をいち早く検知し速やかな対応をとることが重要である。そのためには、観測データを一旦蓄積して処理するオフライン処理では、結果を得るまでに時間を要し、対応が遅れる恐れがある。そこで、計測(観測)データをオンラインで情報処理することが求められる。実際に、瀬戸大橋においては動態観測として、103箇所の観測点で24時間オンラインで変位や加速度のデータを収集し、橋梁の状態を時々刻々把握して維持管理を行っている⁽⁴⁾。

一方、実際の計測においては、必要とする物理パラメータの値が非破壊的に直接得られるとは限らない。例えば、上記の例でいえば、ヤング率は引張り試験でその値が得られるが、供用中の構造物を常時リアルタイムで引張り試験を施すことは不可能である。さらに、空気および内部減衰係数にいたっては、その試験方法が定まっていないので、オフラインでもその値を得ることはできない。直接的に計測できない物理パラメータを、そのパラメータに関して間接的に得たデータから推定する問題はひとつの逆問題として位置づけられ、

* 原稿受付 2002年4月22日。

^{*1} 正員、京都工芸繊維大学大学院工芸科学研究科
(〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

^{*2} (財)日本建設情報総合センター
(元：本州四国連絡橋公団、国土交通省)。

^{*3} 京都工芸繊維大学大学院工芸科学研究科。

E-mail: ohsumi@ipc.kit.ac.jp

それを実現する同定アルゴリズムをソフトセンサと呼んでいる⁽³⁾。

本論文では時々刻々取得される不規則データからオンラインで物理パラメータを同定するアルゴリズム—オンライン・ソフトセンサ (on-line soft sensor)—の構築について述べ、ついでそれを柔軟構造物の物理パラメータのオンライン同定に応用する。

2. 問題の定式化

対象とするシステムおよび観測 (計測) 過程はそれぞれつぎのように与えられるものとする：

$$\dot{z}(t) = A(t; \theta)z(t) + G(t)\gamma_s(t) \quad (1)$$

$$y(t) = C(t)z(t) + R(t)\gamma_o(t) \quad (2)$$

ここで、 $z(t) \in \mathcal{R}^n$ 、 $y(t) \in \mathcal{R}^m$ はそれぞれシステム状態量および観測量ベクトルであり、 $\gamma_s(t)$ 、 $\gamma_o(t)$ は互いに独立な正規性白色雑音である。 $\theta \in \mathcal{R}^q$ はシステムの動特性に含まれる未知のパラメータからなるベクトルであり、マトリクス $A(\cdot; \theta)$ 、 $G(\cdot)$ 、 $C(\cdot)$ および $R(\cdot)$ は適切な次元を持つものとする。(1) 式の解過程は当然未知パラメータ θ に依存するので、以降 $z(t; \theta)$ と表記する。

さて、本論文では、取得されたデータに基づいて未知パラメータ θ を同定するアルゴリズムを構築するのが目的である。このような問題に対しては、著者のひとは既に Gauss-Newton 法に基づく同定アルゴリズムを提案している^{(1)~(3)}。しかし、それらのアルゴリズムでは、準正定マトリクスの逆マトリクス演算を必要とするので、その安定性については必ずしも保証されていない。本論文では、既存の Gauss-Newton 法に修正を加えることによってアルゴリズムの安定化を計り、さらに時々刻々取得されるデータに対処して同定を実行するためのオンラインアルゴリズムの開発を行う。

そこで、現在時刻 t においてつぎの同定規範を設定する。

$$J(t; \theta) = \mathcal{E} \left\{ \int_{t-L}^t \|y(s) - C(s)z(s; \theta)\|^2 ds \right\} \quad (3)$$

ここで、 L は適当な値に設定される時間間隔であり、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルム、また、 $\mathcal{E}\{\cdot\}$ は期待値演算を表す。

以後、数学的厳密性を保つために、(1)、(2) 式の白色雑音によるモデルを伊藤型確率微分方程式⁽⁵⁾

$$dz(t; \theta) = A(t; \theta)z(t; \theta)dt + G(t)dw_s(t) \quad (4)$$

$$dy_o(t) = C(t)z(t; \theta)dt + R(t)dw_o(t) \quad (5)$$

に改めて議論を行う。ただし、 $w_s(t)$ 、 $w_o(t)$ は $\gamma_s(t)$ および $\gamma_o(t)$ に対応して導入されるウィーナ過程 ($w_s(t) = \int_0^t \gamma_s(\tau)d\tau$) であり、 $y_o(t)$ は $dy_o(t) = y(t)dt$ (あるいは形式的に $\dot{y}_o(t) = y(t)$) によって導入される (観測) 過程である。

3. パラメータ同定と状態推定との分離

$\mathcal{Y}_s$ を観測データ $\mathcal{Y}_s = \{y(\tau), 0 \leq \tau \leq s\}$ によって生成される σ -代数とすると、(3) 式は条件付き期待値演算の性質 $\mathcal{E}\{\cdot\} = \mathcal{E}\{\mathcal{E}\{\cdot | \mathcal{Y}_s\}\}$ によりつぎのように変形される。

$$\begin{aligned} J(t; \theta) &= \mathcal{E} \left\{ \int_{t-L}^t \mathcal{E} \{ \|y(s) - C(s)z(s; \theta)\|^2 | \mathcal{Y}_s \} ds \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ \int_{t-L}^t \mathcal{E} \{ \| [y(s) - C(s)\hat{z}(s; \theta)] \right. \\ &\quad \left. + [C(s)\hat{z}(s; \theta) - C(s)z(s; \theta)] \|^2 | \mathcal{Y}_s \} ds \right\} \\ &\leq \mathcal{E} \left\{ \int_{t-L}^t \|y(s) - C(s)\hat{z}(s; \theta)\|^2 ds \right\} \\ &\quad + c_0 \mathcal{E} \left\{ \int_{t-L}^t \|\hat{z}(s; \theta) - z(s; \theta)\|^2 ds \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

ここで、 $\hat{z}(s; \cdot) = \mathcal{E}\{z(s; \cdot) | \mathcal{Y}_s\}$ は θ を固定したときの状態量 $z(s; \cdot)$ の $\mathcal{Y}_s$ に関する条件付き期待値であり、 $c_0 = \max_s \|C(s)\|^2$ である。

(6) 式をみると、評価汎関数 $J(t; \theta)$ を時々刻々最小にする問題は、その最右辺の二つの積分を同時に最小にする問題とみなせることがわかる。その第2項は、 $\hat{z}(\cdot; \theta)$ を最適に求める状態推定規範を表し、また第1項の積分は、 $(\hat{z}(\cdot; \theta))$ が何らかの方法で求められたときの未知パラメータ θ を決定する最小自乗規範になっている。したがって、このことから本論文で考察する未知パラメータ同定問題は、(i) まずパラメータ θ を適当に固定して最適状態推定問題を解き、(ii) ついで、その推定値を用いて (6) 式最右辺第1項を θ に関して最小化する。この (i)、(ii) を交互に繰り返すことによって最適なパラメータ θ を求めることができる。

ここでの状態推定問題は、パラメータ θ を固定すればカルマンフィルタにより容易に解決できる⁽⁵⁾。

4. 同定アルゴリズム—修正 Gauss-Newton 法の提案

本節では、現在時刻 t において状態量の推定値 $\hat{z}(t; \theta)$ が与えられたとして、未知パラメータ θ を同定するアルゴリズムを、従来より提案されている Gauss-Newton アルゴリズムに修正を加えることによって導出する。

さて、一旦観測値 $y(t)$ および状態量の推定値 $\hat{z}(t; \cdot)$ が得られるとこれらは (確率過程の) 実現値であるか

ら、(6) 式の最右辺第 1 項の期待値演算は不要になる。その規範を θ に関して最小にする Gauss-Newton アルゴリズムは次式で与えられる⁽⁶⁾：

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \hat{\theta}^{(k)} + \Phi^{-1}(\hat{\theta}^{(k)})\beta(\hat{\theta}^{(k)}) \quad (7)$$

$\hat{\theta}^{(k)}$ ($= \hat{\theta}^{(k)}(t)$) は時刻 t における繰返し計算の第 k 番目の同定値であり、

$$\Phi(\hat{\theta}^{(k)}) = \int_{t-L}^t \Psi(s; \hat{\theta}^{(k)}) \Psi^T(s; \hat{\theta}^{(k)}) ds \quad (8)$$

$$\beta(\hat{\theta}^{(k)}) = \int_{t-L}^t \Psi(s; \hat{\theta}^{(k)}) [y(s) - C(s)\hat{z}(s; \hat{\theta}^{(k)})] ds \quad (9)$$

$$\Psi(\cdot; \hat{\theta}^{(k)}) = \frac{\partial \hat{z}^T(\cdot; \theta)}{\partial \theta} \bigg|_{\theta=\hat{\theta}^{(k)}} C^T(\cdot) \quad (10)$$

である。右肩記号 T は転置を表す。

(8) 式で与えられるマトリクスは、一般には $\Phi(\cdot) \geq 0$ であるので、その逆マトリクス $\Phi^{-1}(\cdot)$ の存在は必ずしも保証されない。したがって、(7) 式によって同定値列 $\{\hat{\theta}^{(k)}\}$ が安定して得られるという保証はない。そこで、(7)～(10) 式に修正を加えることによって、同定アルゴリズムの安定化を計る。

さて、 $\delta\hat{\theta}^{(k)} = \hat{\theta}^{(k+1)} - \hat{\theta}^{(k)}$ とすると、(7) 式はつぎのように表現される。

$$\Phi(\hat{\theta}^{(k)})\delta\hat{\theta}^{(k)} = \beta(\hat{\theta}^{(k)}) \quad (11)$$

ここで、 α を任意の (スカラ) 正定数とし、(11) 式をつぎのように変形する (I は単位マトリクス)。

$$\begin{aligned} \beta(\hat{\theta}^{(k)}) &= [\Phi(\hat{\theta}^{(k)}) + \alpha I - \alpha I]\delta\hat{\theta}^{(k)} \\ &= [\Phi(\hat{\theta}^{(k)}) + \alpha I \\ &\quad - \alpha\{\Phi(\hat{\theta}^{(k)}) + \alpha I\}\{\Phi(\hat{\theta}^{(k)}) + \alpha I\}^{-1}]\delta\hat{\theta}^{(k)} \\ &= [\Phi(\hat{\theta}^{(k)}) + \alpha I][I - \alpha\{\Phi(\hat{\theta}^{(k)}) + \alpha I\}^{-1}]\delta\hat{\theta}^{(k)} \end{aligned}$$

この両辺に左から $[\Phi(\hat{\theta}^{(k)}) + \alpha I]^{-1}$ をかけて整理すると、

$$\begin{aligned} \delta\hat{\theta}^{(k)} &= \alpha[\Phi(\hat{\theta}^{(k)}) + \alpha I]^{-1}\delta\hat{\theta}^{(k)} \\ &\quad + [\Phi(\hat{\theta}^{(k)}) + \alpha I]^{-1}\beta(\hat{\theta}^{(k)}) \quad (12) \end{aligned}$$

を得る。上式に現れる逆マトリクスは、 $\Phi(\cdot) + \alpha I > 0$ であることから、その存在は保証される。しかし、この表現では、両辺に求めるべき変数 $\delta\hat{\theta}^{(k)}$ が含まれていて、このままでは $\delta\hat{\theta}^{(k)}$ は求まらない。

さて、ここで作用素 $\mathcal{F} : \mathcal{R}^q \rightarrow \mathcal{R}^q$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) &= \alpha[\Phi(\hat{\theta}^{(k)}) + \alpha I]^{-1}x \\ &\quad + [\Phi(\hat{\theta}^{(k)}) + \alpha I]^{-1}\beta(\hat{\theta}^{(k)}) \quad (13) \end{aligned}$$

によって定義する。このとき、(12) 式は

$$\delta\hat{\theta}^{(k)} = \mathcal{F}(\delta\hat{\theta}^{(k)}) \quad (14)$$

と表現できるので、 $\mathcal{F}$ が縮小写像であるならば、 $\delta\hat{\theta}^{(k)}$ はその不動点として一意に存在して求められる。しかし、 $\mathcal{F}$ は $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{R}^q$ ($x_1 \neq x_2$) に対して

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(x_1) - \mathcal{F}(x_2)\| &= \|\alpha[\Phi(\hat{\theta}^{(k)}) + \alpha I]^{-1}x_1 \\ &\quad - \alpha[\Phi(\hat{\theta}^{(k)}) + \alpha I]^{-1}x_2\| \\ &\leq \alpha\|[\Phi(\hat{\theta}^{(k)}) + \alpha I]^{-1}\|\|x_1 - x_2\| \\ &\leq \|x_1 - x_2\| \quad (15) \end{aligned}$$

となり、必ずしも縮小写像とはならないので、 $\delta\hat{\theta}^{(k)}$ が一意に存在するという保証はされない。このことは、(12) 式によって $\delta\hat{\theta}^{(k)}$ を一意に求めることができないことを意味する。

そこで、微小な正のパラメータ ε を用いて $\mathcal{F}$ に摂動を加え、新たに作用素 $\mathcal{F}_\varepsilon : \mathcal{R}^q \rightarrow \mathcal{R}^q$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\varepsilon(x) &= \alpha[\Phi(\hat{\theta}^{(k)}) + (\alpha + \varepsilon)I]^{-1}x \\ &\quad + [\Phi(\hat{\theta}^{(k)}) + \alpha I]^{-1}\beta(\hat{\theta}^{(k)}) \quad (16) \end{aligned}$$

と定義する。このとき、 $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{R}^q$ に対して

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_\varepsilon(x_1) - \mathcal{F}_\varepsilon(x_2)\| &= \|\alpha[\Phi(\hat{\theta}^{(k)}) + (\alpha + \varepsilon)I]^{-1}x_1 \\ &\quad - \alpha[\Phi(\hat{\theta}^{(k)}) + (\alpha + \varepsilon)I]^{-1}x_2\| \\ &\leq \alpha\|[\Phi(\hat{\theta}^{(k)}) + (\alpha + \varepsilon)I]^{-1}\|\|x_1 - x_2\| \\ &\leq \frac{\alpha}{\alpha + \varepsilon}\|x_1 - x_2\| \quad (x_1 \neq x_2) \quad (17) \end{aligned}$$

となり、 $\alpha/(\alpha + \varepsilon) < 1$ であるので $\mathcal{F}_\varepsilon$ は縮小写像を与える。

(15)、(17) 式の不等式評価には、つぎの補助定理を用いた。

【補助定理】実正方マトリクス Φ およびスカラ μ が $\Phi \geq 0$ および $\mu > 0$ と仮定すると、次式が成り立つ。

$$\|(\Phi + \mu I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu} \quad (18)$$

証明は付録参照。

したがって、 $\mathcal{F}_\varepsilon$ の不動点 $\delta\hat{\theta}_F^{(k)}$ ：

$$\delta\hat{\theta}_F^{(k)} = \mathcal{F}_\varepsilon(\delta\hat{\theta}_F^{(k)}) \quad (19)$$

は一意に存在する。さらに、 $\mathcal{F}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{F}$ ($\varepsilon \rightarrow 0$)、すなわち、 $\delta\hat{\theta}_F^{(k)} \rightarrow \delta\hat{\theta}^{(k)}$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) であるので、(19) 式を

満たす $\delta\hat{\theta}_F^{(k)}$ を用いて $\hat{\theta}^{(k+1)}$ を次式によって計算することができる。

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \hat{\theta}^{(k)} + \delta\hat{\theta}_F^{(k)} \quad (20)$$

(19) 式で与えられる $\delta\hat{\theta}_F^{(k)}$ は

$$\left\| \frac{\partial \delta\hat{\theta}_F^{(k)}}{\partial \alpha} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha(\alpha + \varepsilon)} \|\delta\hat{\theta}_F^{(k)}\| \quad (21)$$

という性質があるので⁽⁷⁾, ε を小さくすることによって $\delta\hat{\theta}_F^{(k)}$ の α に対する鋭敏性を小さくすることができる。すなわち, $\varepsilon \ll 1$ と設定することによって, α を比較的自由に設定することができる。

5. オンライン同定の手順

前節で提案した修正 Gauss-Newton 法によるオンライン同定は以下のような手順で実行される。

- (i) [パラメータおよび初期値の設定] α および $\varepsilon (\ll 1)$ を適切に選び, 初期値 $\hat{\theta}_0$ は各パラメータに対する何らかの先験的情報により定める。
- (ii) [オンライン同定] $\{T_j, j = 0, 1, 2, \dots\}$ を離散時間系列 ($T_j = j\Delta t$) とし, 同定に使用する観測データの区間 L を適切に設定する。したがって, (8), (9) 式の積分区間 $[t-L, t]$ は $[T_j-L, T_j]$ で置き換える。 T_j を計算時刻とし, それと同定値 $\hat{\theta}^{(k)}(t)$ の繰返し回数 k をつぎのように同期させることにする。すなわち, j を k と同一視し, $\hat{\theta}^{[j]} := \hat{\theta}^{(j)}(t)|_{t=T_j}$ とする。これによって, (20) 式よりオンライン同定アルゴリズムとして次式を得る。

$$\hat{\theta}^{[j]} = \hat{\theta}^{[j-1]} + \delta\hat{\theta}_F^{[j-1]} \quad (22)$$

ここで, $\{\delta\hat{\theta}_F^{[j]}\}$ は作用素

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\varepsilon(\cdot) = & \alpha \left[\Phi(\hat{\theta}^{[j]}) + (\alpha + \varepsilon)I \right]^{-1} (\cdot) \\ & + \left[\Phi(\hat{\theta}^{[j]}) + \alpha I \right]^{-1} \beta(\hat{\theta}^{[j]}) \end{aligned} \quad (23)$$

に対する不動点として, 逐次近似法⁽⁸⁾によって求める。

- (iii) [状態量の推定] ステップ (ii) の計算において必要な推定値 $\{\hat{z}(s; \cdot)\}$ ($T_j - L \leq s \leq T_j$) は, (4), (5) 式によって構成されるカルマンフィルタによって得る。(詳細は, 6. の具体例で示す。)

- (iv) [観測データの取得と繰返し] 新しい観測データを取得し, それに伴い積分区間を新たに $T_{j+1} \rightarrow T_j$ としてステップ (ii), (iii) を繰り返す。

同定値が予め定めた収束判定条件を満たした時点で同定を終了し, その時点で得られた $\hat{\theta}^{[j]}$ を最終的な同定値とする。

6. 片持ちはりの物理パラメータ同定への適用

6.1 有限次元モデル

文献 (3) において著者のひとりが考察した片持ちはりの物理パラメータを同定する問題を, 前章までに述べた修正 Gauss-Newton 法に基づくオンライン同定アルゴリズムによって実行する。

同定対象となる片持ちはりは, 長さ ℓ , 密度 ρ , 断面積 S , 断面二次モーメント I の一様はりとし, 同定する物理パラメータは, 空気および内部減衰係数 C_A , C_D およびヤング率 E (物理パラメータはいずれも定数とする) である。はり (風などの) 不規則外乱を受けるものとする, その動特性はつぎの偏微分方程式によって記述される⁽⁹⁾:

$$\begin{aligned} \rho S \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} + C_A \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + C_D I \frac{\partial^5 v(t, x)}{\partial x^4 \partial t} \\ + EI \frac{\partial^4 v(t, x)}{\partial x^4} = g \gamma_M(t, x) \quad (0 < x < \ell) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{B.C.: } \left. \begin{aligned} v(t, 0) = \frac{\partial v(t, 0)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} \Big|_{x=\ell} = \frac{\partial^3 v(t, x)}{\partial x^3} \Big|_{x=\ell} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここで, $v(t, x)$ は位置 x における平衡状態からのはりの変位, また $\gamma_M(s, x)$ は不規則外乱であり, その平均値は零で, 共分散が $\mathcal{E}\{\gamma_M(t, x)\gamma_M(s, y)\} = q(x, y)\delta(t-s)$ ($\delta(\cdot)$ はディラックのデルタ関数) の正規性白色雑音であるとする。 $q(x, y)$ は滑らかな関数, g は既知定数である。 はりの変位は, 非接触方式により H 箇所 $\{x_h, h = 1, 2, \dots, H\}$ で計測するものとし, それらは

$$y_h(t) = v(t, x_h) + \eta_h(t) \quad (h = 1, 2, \dots, H) \quad (26)$$

のように計測時の不規則雑音を含んで観測データとして得られるものとする。ただし, $\eta_h(t)$ は分散 1 の正規性白色雑音である。

さらに, 未知パラメータベクトル $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$ を

$$\theta = \left[\frac{1}{\rho S} C_A, \frac{1}{\rho S} C_D I, \frac{1}{\rho S} EI \right]^T \quad (27)$$

とする。

システム (24) は無限次元モデルであるので, これを前章までの議論に適合させるために有限次元化 (近似) を行う。

文献 (3) と同様にして, 微分演算子 $\mathcal{A} = d^4/dx^4$ に対する固有関数 $\{\phi_\nu(x), \nu = 1, 2, \dots\}$ を用いて (24) 式の解 $v(t, x)$ ($= v(t, x; \theta)$) を展開して第 N 項で打ち切れば, すなわち $v(t, x; \theta) \cong \sum_{\nu=1}^N v_\nu(t; \theta) \phi_\nu(x)$ とす

れば、 N 個のモード $\{v_\nu(t; \theta)\}$ に対する方程式と (有限次元化) 観測方程式を得る:

$$dz_N(t; \theta) = A_N(\theta)z_N(t; \theta)dt + G_Ndw_N(t) \quad (28)$$

$$dy_0(t) = C_H z_N(t; \theta)dt + R_H dw_H(t) \quad (29)$$

ここで、 $z_N(t; \theta) = [v_1(t; \theta), \dots, v_N(t; \theta), \dot{v}_1(t; \theta), \dots, \dot{v}_N(t; \theta)]^T$ は状態量ベクトル、 $dy_0(t)$ は $y_h(t)dt$ を要素にもつ H 次元ベクトル観測過程であり、さらに

$$A_N(\theta) = \begin{bmatrix} O_N & I_N \\ -\theta_3 \Lambda_N & -\theta_1 I_N - \theta_2 \Lambda_N \end{bmatrix}, \quad G_N = \begin{bmatrix} O_N \\ \frac{g}{\rho S} I_N \end{bmatrix}$$

$$C_H = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \dots & \phi_N(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1(x_H) & \dots & \phi_N(x_H) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

である。 $w_N(t)$ および $w_H(t)$ はそれぞれ $\gamma_M(t, x)$ と $\eta_h(t)$ に関連して生成されるウィーナ過程であり、 O_N 、 I_N は $N \times N$ 次元の零および単位マトリクス、また $\Lambda_N = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ 、 $R_H = \text{diag}\{r_1, \dots, r_H\}$ である。

6.2 同定アルゴリズム (28)、(29) 式を (4)、(5) 式に対応させることにより同定アルゴリズムが得られる:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\theta}^{[j]} &= \hat{\theta}^{[j-1]} + \delta \hat{\theta}_F^{[j-1]} \\ \delta \hat{\theta}_F^{[j-1]} &= \mathcal{F}_\varepsilon^N(\delta \hat{\theta}_F^{[j-1]}) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

ここで、 $\delta \hat{\theta}_F^{[j-1]}$ は縮小作用素 $\mathcal{F}_\varepsilon^N$:

$$\mathcal{F}_\varepsilon^N(x) = \alpha \left[\Phi_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) + (\alpha + \varepsilon)I \right]^{-1} x + \left[\Phi_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) + \alpha I \right]^{-1} \beta_N(\hat{\theta}^{[j-1]})$$

の不動点であり、

$$\Phi_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) = \int_{T_j-L}^{T_j} \Psi_N(s; \hat{\theta}^{[j-1]}) \Psi_N^T(s; \hat{\theta}^{[j-1]}) ds$$

$$\beta_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) = \int_{T_j-L}^{T_j} \Psi_N(s; \hat{\theta}^{[j-1]}) \cdot [y^N(s) - C_H \hat{z}_N(s; \hat{\theta}^{[j-1]})] ds$$

$$\Psi_N(\cdot; \hat{\theta}^{[j-1]}) = \left. \frac{\partial \hat{z}_N^T(\cdot; \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}^{[j-1]}} C_H^T$$

である。

6.3 状態推定 同定値 $\hat{\theta}^{[j]}$ を求める際に必要な状態推定値 $\{\hat{z}_N(s; \cdot)\}$ の計算にあたっては、1 ステッ

プ前に得られた同定値 $\hat{\theta}^{[j-1]}$ を用いて、つぎの (定常) カルマン・フィルタを用いる⁽⁵⁾:

$$d\hat{z}_N(s; \hat{\theta}^{[j-1]}) = A_N(\hat{\theta}^{[j-1]})\hat{z}_N(s; \hat{\theta}^{[j-1]})ds + K_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) \{ dy_0(s) - C_H \hat{z}_N(s; \hat{\theta}^{[j-1]}) ds \} \quad (31)$$

$$K_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) = P_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) C_H^T \{ R_H R_H^T \}^{-1} \quad (32)$$

$$A_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) P_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) + P_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) A_N^T(\hat{\theta}^{[j-1]}) - P_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) C_H^T \{ R_H R_H^T \}^{-1} C_H P_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) + G_N Q G_N^T = 0 \quad (T_j - L \leq s \leq T_j) \quad (33)$$

ここで、マトリクス Q の (i, j) 要素は $[Q]_{ij} = \int_0^t \int_0^t q(x, y) \phi_i(x) \phi_j(y) dx dy$ である。

状態推定量 $\hat{z}_N(s; \hat{\theta}^{[j-1]})$ に対する初期条件は、1 ステップ前の同定値 $\hat{\theta}^{[j-2]}$ を用いて求めた推定値 $\hat{z}_N(s; \hat{\theta}^{[j-2]})$ の $s = T_j - L$ における値、すなわち $\hat{z}_N(T_j - L; \hat{\theta}^{[j-1]}) = \hat{z}_N(s; \hat{\theta}^{[j-2]})|_{s=T_j-L}$ とする。また、初期値 $z_N(0; \theta)$ に関する情報は $y_h(0)$ に反映されていることに留意すると、これは $[y_1(0), y_2(0), \dots, y_H(0)]^T = C_H \hat{z}_N(0; \cdot)$ が近似的に成り立つと仮定することによってその最小自乗解として得ることができる。しかし、それは一意には存在しないが、 $C_H^T C_H \hat{z}_N(0; \cdot) = C_H^T [y_1(0), y_2(0), \dots, y_H(0)]^T$ のひとつの解として求められる。 $C_H^T C_H \geq 0$ であるので、 $\hat{z}_N(0; \cdot)$ が安定して得られるという保証は必ずしもないが、それは (11) 式と同じ形をしているので、修正 Gauss-Newton 法を応用して得ることができる。

さらに、同定アルゴリズムでは状態量のパラメータ θ_i ($i = 1, 2, 3$) に関する偏微分値 $\partial \hat{z}_N(\cdot; \theta) / \partial \theta_i|_{\theta=\hat{\theta}^{[j-1]}}$ が必要であるが、これらは、 $\partial_i(\cdot) := \partial(\cdot) / \partial \theta_i$ という表記を用いると、(31)~(33) 式より次式によって求められる:

$$d(\partial_i \hat{z}_N(s; \hat{\theta}^{[j-1]})) = \partial_i A_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) \hat{z}_N(s; \hat{\theta}^{[j-1]}) ds + [A_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) - K_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) C_H] \partial_i \hat{z}_N(s; \hat{\theta}^{[j-1]}) ds + \partial_i K_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) \{ dy_0(s) - C_H \hat{z}_N(s; \hat{\theta}^{[j-1]}) ds \} \quad (34)$$

$$\partial_i K_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) = \partial_i P_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) C_H^T (R_H R_H^T)^{-1} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & [A_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) - K_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) C_H] \partial_i P_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) \\ & + \partial_i P_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) [A_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) - K_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) C_H]^T \\ & = -\partial_i A_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) P_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) \\ & - P_N(\hat{\theta}^{[j-1]}) \partial_i A_N^T(\hat{\theta}^{[j-1]}) \end{aligned} \quad (36)$$

ここで、 $\partial_i \hat{z}_N(s; \hat{\theta}^{[j-1]})$ ($T_j - L \leq s \leq T_j$) に対する初期条件は、状態推定量と同様に、1 ステップ前の

同定値 $\hat{\theta}^{[j-2]}$ を用いて求めた $\partial_i \hat{z}_N(s; \hat{\theta}^{[j-2]})$ の $s = T_j - L$ における値、すなわち $\partial_i \hat{z}_N(T_j - L; \hat{\theta}^{[j-1]}) = \partial_i \hat{z}_N(s; \hat{\theta}^{[j-2]}) \Big|_{s=T_j-L}$ を用いる。初期条件 $\partial_i \hat{z}_N(0; \cdot)$ については、0 とする。

(31)~(36) 式を連立して解くことによって、同定値 $\hat{\theta}^{[j]}$ を計算するアルゴリズムに必要な情報を得る。

7. 実験

6 章で述べた片持ちはりに対して物理パラメータの同定実験を実施した。実験で用いるはりの諸元は、 $\ell = 0.5$ [m], $\rho = 7.860 \times 10^3$ [kg · m⁻³], $S = (4.0388 \times 10^{-2}) \times (5.03 \times 10^{-4})$ [m²] および $I = 4.2824 \times 10^{-13}$ [m⁴] である。

7.1 シミュレーション実験 実験に先だって、提案したオンライン同定アルゴリズムが十分に機能するかを検証するためにコンピュータによるシミュレーション実験を行った。

物理パラメータの真値をそれぞれ、 $C_A = 2.0 \times 10^{-2}$ [N · s · m⁻²], $C_D = 5.0 \times 10^8$ [N · s · m²], $E = 2.0 \times 10^{11}$ [N · m⁻²] と仮定した。したがって、未知パラメータの真値は、 $\theta_1^* (= C_A/(\rho S)) = 1.2525 \times 10^3$ [s⁻¹], $\theta_2^* (= C_D I/(\rho S)) = 1.3411 \times 10$ [s⁻² · m⁸], $\theta_3^* (= EI/(\rho S)) = 5.3637 \times 10^3$ [s⁻² · m⁴] である。はりの振動データは、(24) 式を時間および空間幅をそれぞれ $1/7200$ ($\cong 1.39 \times 10^{-4}$) [s], $\ell/100 = 5.0 \times 10^{-3}$ [m] として差分法で解くことによって創成した。そのとき、初期条件として、 $v(0, x) = (0.05/2\ell^3)x^2(3\ell - x)$, $\dot{v}(0, x) = 0$ を与えた。観測雑音の分散の設定については、実物実験で与えられるデータの誤差が最大 ± 0.3 [mm] として $R_H = \text{diag}\{0.0001, \dots, 0.0001\}$ とした。はりに作用する外乱については、事前評価は困難であるので、観測雑音と同程度であると仮定して $g = 1.0 \times 10^{-4}$ とした。図 1 に示すように、実データと比較しても、このように仮定しても支障はないと思われる。また $q(\cdot, \cdot) = 1$, すなわち $Q = I$ とした。

同定アルゴリズムでは、使用するデータ区間を $L = 0.5$ ($= 18\Delta t$) [s], $\alpha = 1$, $\varepsilon = 0.0001$ と設定し、サンプリング周期は $\Delta t = 1/36$ [s] とした。固有関数 $\{\phi_i(x)\}$ は著者のひとりがすでに文献 (3), (9) で記載している関数形を用い、モード数は $N = 3$ とした。同定アルゴリズムのパラメータに対する初期値は、それらに対する先験的情報が何も得られていない場合を想定して、ここでは $\theta^{[0]} = 0$ と設定した。

7.2 シミュレーション結果 同定結果を図 2 および 3 に示す (ただし、 E , C_A , C_D の図として示している)。同定は $t = 0.5$ [s] より行い、いずれも安定し

て行われていることがわかる。はりの振動周期を決定するパラメータであるヤング率についてながめると、その同定値として $\hat{E} = 2.0038 \times 10^{11}$ [N · m⁻²] が得られ、その誤差は 0.2% 以下であり、同定開始後 1 [s] で 1% 以下になっていることから良好に同定が行われていることがわかる。比較のため、同じ条件で、従来の (オンライン) Gauss-Newton アルゴリズムを用いて同定した結果も図 2 および 3 に示しているが、アルゴリズムは安定しなかった。

これらのシミュレーション結果より、提案手法による物理パラメータのオンライン同定は良好に行えることが示せた。

Fig. 1 Observation data of the tip displacement $v(t, \ell)$ (the upper is the real data, while the other the created one).

Fig. 2 Convergence feature of the estimate of E by the proposed on-line algorithm (solid line). The dashed line illustrates the result by conventional (on-line) Gauss-Newton algorithm (dotted line depicts the true value).

Fig. 3 Convergence features of the estimates of C_A and C_D using the proposed algorithm (each dotted line depicts true value). Each dashed line illustrates the result obtained by the conventional algorithm.

提案したオンラインアルゴリズムは、緩やかに変化する時変パラメータの同定に対しても有効であることを示したのが図4である。シミュレーションでは、 C_D が10[s]間で1/2に直線的に減少するものと想定とした。 C_D の同定が良く追隨して行われていることがわかる。なお、シミュレーションではMATLABソフトウェアとC++コンパイラを用いて高速化し、Pentium III (750MHz) 搭載のパーソナルコンピュータを用いた。

7.3 実物実験 はりの変位データ(振動データ)を得るために非接触式のレーザ変位計(キーエンス社製 LB-300)とアンプユニット(同社製 LB-1200)を用いた。これらで変位を計測し、そのデータをパーソナル・コンピュータに入力してA/D変換を行ない測定データとして用いた。はりには何ら人為的な外乱は加えず、実験室内の空気の揺れ(空気の自然対流や空調による影響)のみと考えた。実験に使用したはりの諸元および測定箇所は前節のシミュレーションで用いたものと同じとした。はりには外乱が作用していないと仮定するので $Q \equiv 0$ (あるいは $g \equiv 0$ としてもよい)と置いた(このような設定でもカルマン・フィルタは適用可能)。また、はりの先端を約0.05[m]変位させて振動を発生させ、サンプリング周期 $\Delta t = 1/36$ [s]でデータを取得した。

同定は、実験で得た測定データ以外は前章で述べたのと全く同じ方法で実施した。それぞれの同定の推移過程を図5に示す。この結果より、提案した同定アルゴリズムは実データに対しても発散せずうまく機能していることがわかる。

Fig. 4 Convergence features of the estimates of E , C_A and C_D using the proposed on-line identification algorithm with time-varying C_D (dotted lines depict each true value). Dashed lines illustrate the results by the conventional algorithm.

Fig. 5 Convergence features of the estimates for real data (dotted line depicts the value E given by JIS test). Each dashed line illustrates the result obtained by the conventional algorithm.

7.4 引張り試験

提案したアルゴリズムで求めた3種類のパラメータのうち、2種類の減衰係数(空気減衰 C_A および内部減衰係数 C_D) は現在までのところ厳密な測定法(試験法)が定められていないので、ここで得た値が正確かどうかを判定するのは難しいが、ヤング率については工学便覧などに値が掲載されており、また JIS で試験法が確立されている。ここでははりで用いたものと同一の材料(SS400)で JIS Z2201 5号試験片を作り、その引張り試験を行って(正確な)ヤング率を測定した。引張試験機は島津製作所社製のサーボパルサーを用い、 $E = 1.9569 \times 10^{11}$ [N・m⁻²]を得た。同定値 2.0336×10^{11} [N・m⁻²] とこの値との誤差は 3.9 % であり、ヤング率の同定値は実験値とほぼ合致することがわかった。

8. 結 言

本論文では、時々刻々取得される観測データを用いて、システムモデルに含まれるパラメータの同定を行うオンラインアルゴリズムを提案した。オンラインシステム同定問題は、システムと観測過程に不規則雑音が介入する場合にも、最適状態推定とパラメータ同定とに分離して時々刻々コンピュータにより実行が可能であることを示した。ここで確立した同定アルゴリズムは基本的には Gauss-Newton 法に基づくが、本論文ではその安定性を保証するために、理論的側面から工夫を行った。この点で、従来より提案されている Marquardt 法とは異なる。

提案したアルゴリズムをはりの物理パラメータのオンライン同定に適用し、シミュレーションおよび実物実験によりアルゴリズムの安定性と、更に(緩やかに変化する)時変パラメータ同定への適用可能性を示した。

数学モデル中に含まれるパラメータの同定問題は、当該パラメータに関して間接的に得られるデータから推定しなければならないことから、逆問題として非常に重要であり、これらの同定アルゴリズムを総称して、著者らはソフトセンサと呼んでいるが、本論文で新しく安定性の保証されたオンライン・ソフトセンサを構築することができた。

最後に、本研究を行うにあたり筆頭著者は、長大橋の維持管理に関して有用な助言をいただいた本州四国連絡橋公団設備課長 坂本光重博士、数学的な観点から有用な助言をいただいた京都工芸繊維大学 米谷文男教授ならびに澤田祐一助手に、また、振動実験と引張り試験において助力をいただいた同大学研究員 中野統英博士および同大学博士前期課程学生 中川敦史氏(現、シャープ(株))に感謝の意を表わす。

文 献

- (1) N. Nakano, A. Ohsumi, and A. Shintani, Algorithms for the Identification of Spatially Varying/invariant Stiffness and Dampings in Flexible Beams, *Inverse Problems and Related Topics* (Eds: G. Nakamura, et. al.), Chapman & Hall/CRC Press, London, (2000), pp.97-113.
- (2) 中野統英, 新谷篤彦, 大住晃, 振動計測データを用いた片持ちはりの物理パラメータ同定, 機論, C66-643 (2000), pp.944-952.
- (3) 中野統英, 大住晃, 芳田勝史, 雑音の影響を受けた振動計測データを用いた片持ちはりの物理パラメータ同定, 機論, C67-653 (2001), pp.43-50.
- (4) <http://www.hsba.go.jp/gijutu/seto-izikanri/doutai/doutai.html>
- (5) 大住晃, “確率システム入門,” 朝倉書店 (2002).
- (6) 片山徹, “システム同定入門,” 朝倉書店 (1994).
- (7) T. Takatsu, A. Ohsumi, and A. Nakagawa, On the Modified Gauss-Newton Algorithm and its Application to Parameter Identification of Distributed Parameter Systems, 2001 年度計測自動制御学会関西支部シンポジウム講演論文集 (2001), 109-112.
- (8) A. Kolmogorov and S. Fomin, “Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis,” Graylock Press, N. Y. (1957).
- (9) A. Ohsumi, and Y. Sawada, Active Control of Flexible Structures Subject to Distributed and Seismic Disturbances, *Trans. ASME, J. Dynamic System, Measurements and Control*, 115 (1993), pp.649-657.

付 録: 補助定理の証明

マトリクスノルムの定義より,

$$\|(\Phi + \mu I)^{-1}\|^{-1} = \frac{1}{\max_{x \neq 0} \frac{\|(\Phi + \mu I)^{-1}x\|}{\|x\|}} = \min_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|(\Phi + \mu I)^{-1}x\|}$$

を得る。ここで、 $x = (\Phi + \mu I)\xi$ を代入し、Schwarz の不等式を適用すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \|(\Phi + \mu I)^{-1}\|^{-1} &= \min_{\xi \neq 0} \frac{\|(\Phi + \mu I)\xi\|}{\|\xi\|} \\ &\geq \min_{\xi \neq 0} \frac{\xi'(\Phi + \mu I)\xi}{\|\xi\|^2} = \min_{\xi \neq 0} \frac{\xi'\Phi\xi}{\|\xi\|^2} + \mu \geq \mu \end{aligned}$$

(Q.E.D.)