分数階微分オペレータで記述される 粘弾性体の有限要素定式化の実験的検証*

那須野 洋^{*1}, 清水 信行^{*2}

Experimental Verification of Finite Element Formulation for Viscoelastic Body Described by Fractional Differential Operator

Hiroshi NASUNO and Nobuyuki SHIMIZU^{*3}

^{*3} Department of Mechanical Engineering, Iwaki Meisei University,
5-5-1 Chuodai Iino, Iwaki-shi, Fukushima, 970-8551 Japan

The finite element (FE) equations of motion with fractional differential operator term has been developed by Shimizu and Zhang for analysing the dynamic behavior of viscoelastic structures. In this formulation the authors derived the new "viscoelastic damping matrix (VDM)" which evaluates the damping character for the viscoelastic structures. The present paper investigates the validity of the FE equations with "VDM" by comparing with the results of the experiment conducted for evaluating the viscoelastic seismic damper.

Key Words: Finite Element, Fractional Differential Operator, Viscoelastic Structures, Viscoelastic Damping Matrix, Viscoelastic Seismic Damper

1. 緒言

近年, 分数階微分オペレータを用いて粘弾性材料の構成方程式を記述することが広く行なわれるようになってきた^{(1),(2)}. 分数階微分オペレータを用いる利点は, 整数階の微分オペレータで記述される古典的な粘弾性構成方程式と比べて, 少ないパラメータで広い周波数範囲に亘って実験値を精度良く表現することである. この分数階微分オペレータを基礎に分数階微分計算法⁽³⁾が発展してきた^{(1),(2),(4)}.

通常, 構造物の減衰特性は近似的に求めるか, 現場あわせ的に求める方法が一般的であり, その減衰性能を統一的に精度良く把握することはなされてこなかった. そのような背景の中で, 著者らは線形範囲における減衰性能の一貫した評価を目指し, 分数階微分を含む有限要素運動方程式の定式化⁽⁴⁾およびこの運動方程式の数値積分法⁽⁵⁾を提案した. この定式化法によれば, 分数階微分オペレータによりモデル化された粘弾性構造物の“粘弾性減衰行列”を材料パラメータを用いて理論的に導出できる.

本論文では, 提案された粘弾性有限要素定式化法の妥当性および解析性能を実験値と比較して検証した.

2. 粘弾性構造物の有限要素解析理論

ここでは, 粘弾性構造物の体積変形がHooke則, 偏差変形が分数階微分Voigt則に従う場合に注目して“粘弾性減衰行列”を導出する過程を簡単に述べる. この説明は既に文献(4)で述べられているが, 読者の便と論文の完結性を考えて最小限, ここにまとめた.

粘弾性構造物の偏差変形が分数階三要素固体則に従う場合や, より詳しい式の展開については文献(4)を参照されたい.

2.1 線形粘弾性材料の構成方程式 線形遺伝応力-ひずみ則⁽⁶⁾によって表される等温・等方性を満たす粘弾性材料の構成方程式は

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij} \lambda(t) * d\epsilon_{kk}(t) + 2G(t) * d\epsilon_{ij}(t) \quad (1)$$

と書くことができる⁽⁷⁾. ここで $\sigma_{ij}(t)$ は応力テンソル, $\epsilon_{ij}(t)$ はひずみテンソルであり, アスタリスク(*)はStieltjes積分⁽⁶⁾である. さらに δ_{ij} はKronekerのデルタ, $\lambda(t) = K(t) - \frac{2}{3}G(t)$ は一般化Lameの定数, $K(t)$ は体積変形に対する緩和関数, $G(t)$ は偏差変形に対する緩和関数である.

応力テンソルおよびひずみテンソルの各成分を工学的な応力ベクトル

$$\begin{aligned} \sigma(t) &\equiv [\sigma_{11}(t), \sigma_{22}(t), \sigma_{33}(t), \sigma_{12}(t), \sigma_{13}(t), \sigma_{23}(t)] \\ &= [\sigma_x(t), \sigma_y(t), \sigma_z(t), \sigma_{xy}(t), \sigma_{xz}(t), \sigma_{yz}(t)] \quad (2) \end{aligned}$$

* 原稿受付 2002年10月8日.

^{*1} 正員, いわき明星大学理工学研究科(☎970-8035 いわき市中央台飯野5-5-1).

^{*2} 正員, フェロー, いわき明星大学理工学部.
E-mail: nshim@iwakimu.ac.jp

および工学的なひずみベクトル

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &\equiv [\varepsilon_{11}(t), \varepsilon_{22}(t), \varepsilon_{33}(t), 2\varepsilon_{12}(t), 2\varepsilon_{13}(t), 2\varepsilon_{23}(t)] \\ &= [\varepsilon_x(t), \varepsilon_y(t), \varepsilon_z(t), \gamma_{xy}(t), \gamma_{xz}(t), \gamma_{yz}(t)] \quad (3)\end{aligned}$$

とで表せば、式(1)は行列形式で

$$\sigma(t) = \mathbf{D}(t) * d\varepsilon(t) \quad (4)$$

と書ける⁽⁴⁾。ここで $[\cdot]$ は列ベクトルを表しており、 $\mathbf{D}(t)$ は緩和関数行列である。この行列は

$$\mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} K(t) + \frac{4}{3}G(t) & K(t) - \frac{2}{3}G(t) & K(t) - \frac{2}{3}G(t) & 0 & 0 & 0 \\ & K(t) + \frac{4}{3}G(t) & K(t) - \frac{2}{3}G(t) & 0 & 0 & 0 \\ & & K(t) + \frac{4}{3}G(t) & 0 & 0 & 0 \\ & & & G(t) & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & G(t) & 0 \\ & & & & & G(t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

と書ける。

式(4)は、等温・等方性を満たす線形粘弾性材料に対して一般的に成り立つ三次元の構成方程式である。

2.2 分数階微分粘弾性モデル 粘弾性材料の応力 - ひずみ関係を表す機械モデルとして分数階微分 Voigt モデル

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + E\tau^q D_t^q \varepsilon(t) \quad (6)$$

を考える。ここで E は断弾性率、 $\tau = \sqrt[3]{c/E}$ は一般化緩和時間、 c は“粘弾性率”である。 $D_t^q \equiv d^q/dt^q$ は q 階の Liemann-Riouville の分数階微分であり

$$D_t^q f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-q)} D_t \int_0^t (t-\psi)^{-q} f(\psi) d\psi \quad (7)$$

により定義される。ここで $\Gamma(q)$ はガンマ関数、 $D_t \equiv d/dt$ は時間に対する一階の微分演算子である。

一般に、分数階微分 Voigt モデルは図1のように示される⁽⁸⁾。式(6)の右辺第二項は、粘弾性減衰効果を表す項であり、分数階数を $q=1$ とすれば粘性減衰項を含む古典的な Voigt モデルに帰着できる。

式(7)は合成則⁽³⁾および Riesz の超関数

$$R_q(t) = \begin{cases} 0 & ; t \in (-\infty, 0] \\ \frac{t^{-q}}{\Gamma(1-q)} & ; t \in (0, \infty) \end{cases} \quad (8)$$

を用いて

$$D_t^q f(t) = R_q(t) * df(t) \quad (9)$$

と書くことができる⁽⁶⁾。

Fig. 1 Fractional Calculus Voigt Model

2.3 粘弾性構造物の構成方程式 ここでは、任意の大きさに成形された粘弾性材料を粘弾性構造物と呼ぶ。粘弾性構造物の体積変形が Hooke 則、偏差変形が分数階 Voigt 則によって近似できる場合(文献(4)ではタイプ1)、緩和関数 $K(t)$ および $G(t)$ は

$$K(t) = K \quad (10)$$

$$G(t) = G \left\{ 1 + \frac{t^{-q}}{\Gamma(1+q)} \tau^q \right\}, \quad t > 0 \quad (11)$$

と書くことができる⁽⁹⁾。ただし $-\infty \leq t \leq 0$ の範囲では $K(t) = 0$, $G(t) = 0$ である。ここで K は体積弾性率である。

式(10), (11)を式(5)に代入すると、式(4)は

$$\sigma(t) = \mathbf{D}_0 \varepsilon(t) + \mathbf{D}_1 D_t^q \varepsilon(t) \quad (12)$$

となる。ここで $\mathbf{D}_0$, $\mathbf{D}_1$ は、それぞれ次式で表される。

$$\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{D}_1 = \tau^q \begin{bmatrix} \frac{4}{3}G & -\frac{2}{3}G & -\frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{4}{3}G & -\frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix} \quad (14)$$

2.4 粘弾性有限要素運動方程式 有限要素モデルの各要素に対して成り立つ運動方程式は、一般に

$$\mathbf{M} D_t^2 \mathbf{d}(t) + \mathbf{F}(t) = \mathbf{P}(t) \quad (15)$$

とける。ここで $\mathbf{M}$ は質量行列、 $\mathbf{d}(t)$ は有限要素節点変位、 $\mathbf{F}(t)$ は減衰力ベクトル、 $\mathbf{P}(t)$ は等価節点力ベクトルである。特に $\sigma(t)$ が式(12)で与えられる場合、 $\mathbf{F}(t)$ は粘弾性構造物の粘弾性減衰ベクトルとして

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t) &= \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{L}^T \sigma(t) dV \\ &= \mathbf{K} \mathbf{d}(t) + \mathbf{C} D_t^q \mathbf{d}(t) \end{aligned} \quad (16)$$

となる．ここで V は体積， $\mathbf{N}$ は形状関数行列， $\mathbf{L}$ はひずみ-変位行列である． $\mathbf{K}$ および $\mathbf{C}$ は，剛性行列および“粘弾性減衰行列”であり

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B} dV \quad (17)$$

$$\mathbf{C} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_1 \mathbf{B} dV \quad (18)$$

と書ける．ここで $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}$ であり，連続体内部に生じるひずみベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$ は有限要素モデルの節点変位ベクトル $\mathbf{d}$ によって

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (19)$$

と近似できる． $\mathbf{u}$ は連続体内部の変位ベクトルである．

粘弾性減衰特性を有する構造物の有限要素運動方程式は，式 (15) に式 (16) を代入して

$$\mathbf{M}\mathbf{D}_t^2 \mathbf{d}(t) + \mathbf{C}\mathbf{D}_t^q \mathbf{d}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{P}(t) \quad (20)$$

と求められる⁽⁴⁾．

行列 $\mathbf{C}$ は粘弾性材料の減衰特性を反映した“減衰行列”として新たに導出された行列である．この行列は，式 (18) の被積分関数に含まれる式 (14) の行列 $\mathbf{D}_1$ の性質から明らかなように，せん断弾性率 G ，一般化緩和時間 τ ，分数階数 q などのパラメータに依存した行列であり，材料定数のみにより与えられていることに注目すべきである．

3. 粘弾性有限要素解析プログラム

粘弾性構造物の有限要素定式化法の妥当性を確認するために，式 (20) に対する粘弾性解析プログラムを作成した．ここでは，解析プログラムで使用している有限要素モデルについて簡単に述べる．

3.1 軸対称問題 軸対称回転体の軸対称荷重問題を解析する．この問題では，回転方向に垂直で回転軸を含む任意断面が，回転方向に 1rad 回転して作られる体積要素の状態が解析できれば，軸対称回転体の全体積における挙動が把握できる．

図 2 は，円筒座標系に置かれた軸対称回転体と微小扇形体積要素である．軸対称問題を仮定した場合，円筒座標系 (r, z, θ) において変位ベクトルは $\mathbf{u} = [u_r, u_z]$ ，荷重ベクトルは $\mathbf{p} = [p_r, p_z]$ と定義できる．さらに，微小体積要素に生じるひずみベクトルは $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_\theta, \gamma_{rz}]$ ，応力ベクトルは $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta, \sigma_{rz}]$ と定義できる．円筒座標系におけるひずみベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$ と変位ベクトル $\mathbf{d}$ との関係は式 (19) のように書ける．軸対称円筒座標系を考え

Fig. 2 Axisymmetric Body and Axisymmetric Element in Cylindrical Coordinates

(a) Isoparametric Element (b) Real Element

Fig. 3 Mapping with Four Noded Isoparametric Element (●: Gauss points)

た場合，行列 $\mathbf{L}$ は

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & \frac{1}{r} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix}^T \quad (21)$$

と表される．

3.2 有限要素モデル 図 3 (b) に示す軸対称要素内の変位 $\mathbf{u}$ を，要素の各節点における変位 $\mathbf{d} = [d_{r1}, d_{z1}, d_{r2}, d_{z2}, d_{r3}, d_{z3}, d_{r4}, d_{z4}]$ (r および z は座標，数字は節点番号) で近似すると

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (22)$$

と書ける．ここで $\mathbf{N}$ は形状関数行列であり

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (23)$$

と書くことができる．この行列の各要素 N_i ($i = 1, 2, 3, 4$) は，図 3 (a) に示したアイソパラメトリック四節点要素に適合した形状関数である．この形状関数は，無次元座標軸 ξ, η に対して

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), & N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), & N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{cases} \quad (24)$$

と与えられる写像関数である．

式 (22) に示される関係から, 式 (19) 最右辺の行列 $\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N}$ (4×8) は具体的に

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} & 0 & \frac{N_4}{r} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial z} & \frac{\partial N_4}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (25)$$

と書くことができる.

一方, 無次元座標系 ($O-\xi\eta$) と円筒座標系 ($O-rz$) との間に成り立つ変換関数が連続で微分可能であれば

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

と書ける. ここで, 右辺第一項の行列は一般に $\mathbf{J}$ と書かれる Jacobian 行列である. 式 (26) より, 右辺の $\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$ は $\mathbf{J}$ の逆行列 $\mathbf{J}^{-1}$ を用いて $\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}$ により表現できる.

実座標系 ($O-rz$) 内に置かれた四辺形要素の要素内変位 $\mathbf{r} = [r, z]$ を, この要素の各節点変位 $\mathbf{r}_i = [r_1, z_1, r_2, z_2, r_3, z_3, r_4, z_4]$ で近似すれば

$$\mathbf{r} = \mathbf{N} \mathbf{r}_i \quad (27)$$

と書ける. したがって Jacobian 行列 $\mathbf{J}$ は, 形状関数の微分と節点座標とを用いて具体的に計算できる.

行列 $\mathbf{B}$ の要素には, 円筒座標系 ($O-rz$) での微分が含まれている. これは, 形状関数の無次元座標系 ($O-\xi\eta$) 内での微分および $\mathbf{J}^{-1}$ を用いて表現できる.

ここで述べた $\mathbf{B}$ を用いると, 軸対称回転体の回転方向 1rad 当りの微小扇形体積要素に対する要素剛性行列 $\mathbf{K}$ は, 四節点アイソパラメトリック要素を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_S \mathbf{B}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B} r dr dz d\theta \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B} r |\mathbf{J}| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (28)$$

と書くことができる. 同様に 1rad 当りの有限要素に対する“要素粘弾性減衰行列” $\mathbf{C}$ および要素質量行列 $\mathbf{M}$ のそれぞれは

$$\mathbf{C} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D}_1 \mathbf{B} r |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (29)$$

$$\mathbf{M} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} r |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (30)$$

Fig. 4 Viscoelastic Seismic Damper

(a) Shaking System (b) VESD in Test House

Fig. 5 Overview of Experimental Devices

と書ける. $\rho = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}$ であり ρ は材料密度である.

式 (28) から (30) の ξ および η 方向への積分は Gauss 積分点の座標 (ξ_{G_i}, η_{G_i}) を用いて計算する.

3.3 運動方程式の解法およびプログラムの入力と出力 粘弾性解析プログラムは, 式 (20) に示した分数階微分オペレータを含む運動方程式を解くために Zhang-Shimizu らによって開発された数値積分アルゴリズム⁽⁵⁾を使用している.

解析は, 境界条件や数値積分パラメータおよび有限要素モデルに加わる時刻歴等価節点外力を入力して, モデル節点の時刻歴変位応答を出力値として得る.

4. 粘弾性防振機器の動的特性把握

提案された粘弾性解析理論の妥当性や解析性能を実験的に確かめるために, 粘弾性耐震ダンパを製作し, これに対する動的特性を加振実験⁽¹⁰⁾より求め, 有限要素解析結果と比較する.

4.1 粘弾性耐震ダンパ 粘弾性防振機器の動的特性を実験的に把握するために, 粘弾性耐震ダンパを製作した. このダンパの外観を図 4 に示す.

製作した粘弾性耐震ダンパは円筒形状であり, 本体ケース, ピストンロッド, 粘弾性材料から構成されている. また, 本体ケースおよびピストンロッドには実験装置に設置するための治具が取り付けられている.

粘弾性材料は中空円筒形状であり, 本体ケースおよびピストンロッドに自己の接着力で固着している. ピストンロッドが軸方向に移動することにより, 粘弾性材料が変形し減衰力とばね力とを生じる.

4.2 粘弾性耐震ダンパの加振実験 実験には油圧アクチュエータを備えた加振機を使用した。ダンパのピストンロッドをアクチュエータ側に固定し、本体ケース側をロードセル側に固定した。実験装置の外観を図5(a)に示し、実験装置にダンパを取り付けたときの外観を図5(b)に示す。

実験では、最大変位振幅 $d = 3.0 \times 10^{-3}$ [m] (ひずみ $\gamma = 18\%$) 一定で正弦波加振を行なった。ただし、徐々に最大変位振幅に到達するように、予備加振を6波入力してから最大振幅の定常波を入力した。本体ケースに発生した荷重をロードセルで測定した。加振振幅や加振周波数などの条件を表1に示す。

なお、粘弾性耐震ダンパに使用した粘弾性材料は、ダンパが加振されるときにせん断方向に変形する。この場合、ひずみ $\gamma = 18\%$ 程度であれば、粘弾性材料は線形解析理論が成り立つ範囲の加振振幅であることを確認している。

Table 1 Test Conditions

amplitude d [m]	strain γ (%)	frequency f [Hz]
3.0×10^{-3}	18	0.1
		1.0
		2.0
		4.0

4.3 実験結果 ダンパに入力した正弦波変位時刻歴データ、および測定した荷重時刻歴データのそれぞれを図8に実験データとして示す。

5. 有限要素解析による特性把握

粘弾性解析プログラムを使用して、粘弾性耐震ダンパの変位時刻歴応答を解析した。

5.1 分数階微分モデルのパラメータ同定 ダンパに使用されている粘弾性材料の周波数特性から式(6)で表される分数階微分 Voigt モデルのパラメータ G , c ($= G\tau^q$), および q などを同定した。ここで c は“粘弾性率”である。

粘弾性材料の周波数特性、すなわち貯蔵せん断弾性率 G' および損失せん断弾性率 G'' を、粘弾性材料に正弦波せん断変形を与えて測定した。なお、材料特性のばらつきを排除するために、防振機器に使用した粘弾性材料と同じ製造ロットの材料を測定に使用した。

式(6)の分数階微分 Voigt モデルによって表現される材料の G' および G'' のそれぞれは

$$\begin{cases} G'(\omega) = G + c\omega^q \cos\left(\frac{\pi q}{2}\right) \\ G''(\omega) = c\omega^q \sin\left(\frac{\pi q}{2}\right) \end{cases} \quad (31)$$

Fig. 6 Storage Modulus and Dissipation Modulus of Viscoelastic Material

Fig. 7 FE Analysis Model (node:125, element:96)

と書くことができる。ここで ω は角振動数である。

図6は、ダンパに使用した粘弾性材料の周波数特性の実測値と、このデータに式(31)をカーブフィットさせた曲線である。

カーブフィットから求めたパラメータ G , c , q を表2の上段に示した。全体的には良く実験データに適合しているが、低周波側の一致度がやや悪いことが分る。

5.2 解析条件 粘弾性有限要素解析プログラムに入力した解析パラメータを表2に示す。材料から求められるパラメータを上段および中段に示した。数値積分用のパラメータを下段に示した。

粘弾性材料の体積弾性率 K は、引っ張り試験で精度良く求めることが難しいとされている。そこで、テストピースにせん断変形を加えて G を求めてから $K = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} G$ の関係を使って K を間接的に求めた。ここで ν はポアソン比であり 0.5 に近い値を取る。

Table 2 Parameters for FE Analysis

Shear modulus	G [N/m ²]	17046
"Viscoelasticity Modulus"	c [Ns ^q /m ²]	50772
Fractional order	q [-]	0.42
Volumetric Modulus	K [N/m ²]	32343
Poisson's ratio	ν [-]	0.48
Density	ρ [kg/m ³]	92.8
Integration parameters	α, β [-]	0.5, 0.25
Time step	Δt [s]	0.001

Fig. 8 Time Histories of Experimental Results and FE Analysis Results (●: Exp., —: FEA)

解析に用いた有限要素モデルは、製作した粘弾性耐震ダンパの材料形状を基に作成した。このモデルは節点数 125、要素数 96 であり、要素は回転方向に 1 rad の体積を持っている。作成した有限要素モデルを図 7 に示す。断面形状にゆがみがあるのは、製作時の粘弾性材料の収縮をモデルに反映しているからである。

5.3 解析結果 粘弾性有限要素解析理論を用いてダンパを解析した結果を、実験データと共に図 8 に示す。

6. 解析結果と実験結果との比較および考察

実験結果および解析結果を基に、応答の定常部分のヒステリシスループを作成し、それぞれを比較した。その結果を図 9 に示す。

有限要素解析結果と実験結果との比較から、加振周波数 $f = 1, 2, 4$ Hz における粘弾性解析結果は、実験結果と良好に一致している。

加振周波数が $f = 0.1$ Hz のときの解析結果は実験結果と比べてヒステリシスループの傾きがやや大きく、面積が小さく計算されている。これは、図 6 において $\omega = 0.62$ rad/s ($f = 0.1$ Hz) 付近における貯蔵せん断弾性率 G' が大きく、損失せん断弾性率 G'' が小さく推定されたためである。

7. 結 言

分数階微分オペレータを含む運動方程式の定式化、およびこの運動方程式の解法と解析を実行するためのプログラムの作成とを述べた。さらに、微小加振振幅での粘弾性耐震ダンパの加振の実施、線形粘弾性有限要素法による解析結果との比較により、提案した定式化法の妥当性や解析性能を検証した。

検証の結果、本解析手法は粘弾性材料テストピースの周波数特性に対するモデルパラメータの同定が精度良く行なわれれば、その材料を使用した防振機器の動

Fig. 9 Comparison of Experimental Results with FE Analysis Results (● : Exp., — : FEA)

的特性は有限要素解析により精度良く把握できることが分った。このことより、粘弾性有限要素定式化法が妥当であることが明かとなった。さらに、ダンパの減衰特性を精度良く推定していることから、“粘弾性減衰行列”を用いた有限要素解析は粘弾性構造物の特性把握に有効であることが分った。

本研究実施に当り 三和テッキ株式会社 砂子田 勝昭氏ならびにいわき明星大学 安野 拓也 助教授にご指導頂きました。ここに感謝いたします。

References

- (1) Bagley, R.L. and Tolvik, P.J., *Fractional Calculus a Different Approach to the Analysis of Viscoelastically Damped Structures*, AIAA J., Vol.21, No.5(1983b), pp.741-748.
- (2) Padvan, J., *Computational Algorithms for FE Formulations Involving Fractional Operators*, Computational Mech., Vol.2 (1987b), pp.271-287.
- (3) Miller, K.S. and Ross, B., *An Introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential and Equations*, (1993), John Wiley & Sons, Inc.
- (4) 清水・張, 分数階微分オペレータで記述される粘弾性体の有限要素解析, 機論 (C), Vol.66, No.645(2000), pp.21-28.
- (5) Zhang, W. and Shimizu, N., *Numerical Algorithm for Dynamic Problems Involving Fractional Operators*, JSME Int. J., Ser.C, Vol.41, No.3(1998a), pp.364-370.
- (6) Koeller, R.C., *Polynomial Operators, Stieltjes Convolution, and Convolution, and Fractional Calculus in Hereditary Mechanics*, ACTA Mech., Vol.58(1986), pp.251-264.
- (7) Gurtin, M.E. and Sternberg, E., *On the Linear Theory of Viscoelasticity*, Arch. Rational Mech. Anal. Vol.11(1962), pp.291-356.
- (8) Koeller, R.C., *Applications of Fractional Calculus to the Theory of Viscoelasticity*, Transactions of the ASME, J. of App. Mech. Vol.51(1984), pp.299-307.
- (9) Shimizu, N. and Zhang, W., *Fractional Calculus Approach to Dynamic Problems of Viscoelastic Materials*, JSME International Journal, Ser.C, Vol.42, No.4 (1999), pp.825-837.
- (10) 矢崎・那須野・清水・砂子田, 粘弾性耐震ダンパの開発とその評価, D&D Conf., No.01-5(2001), p.200.